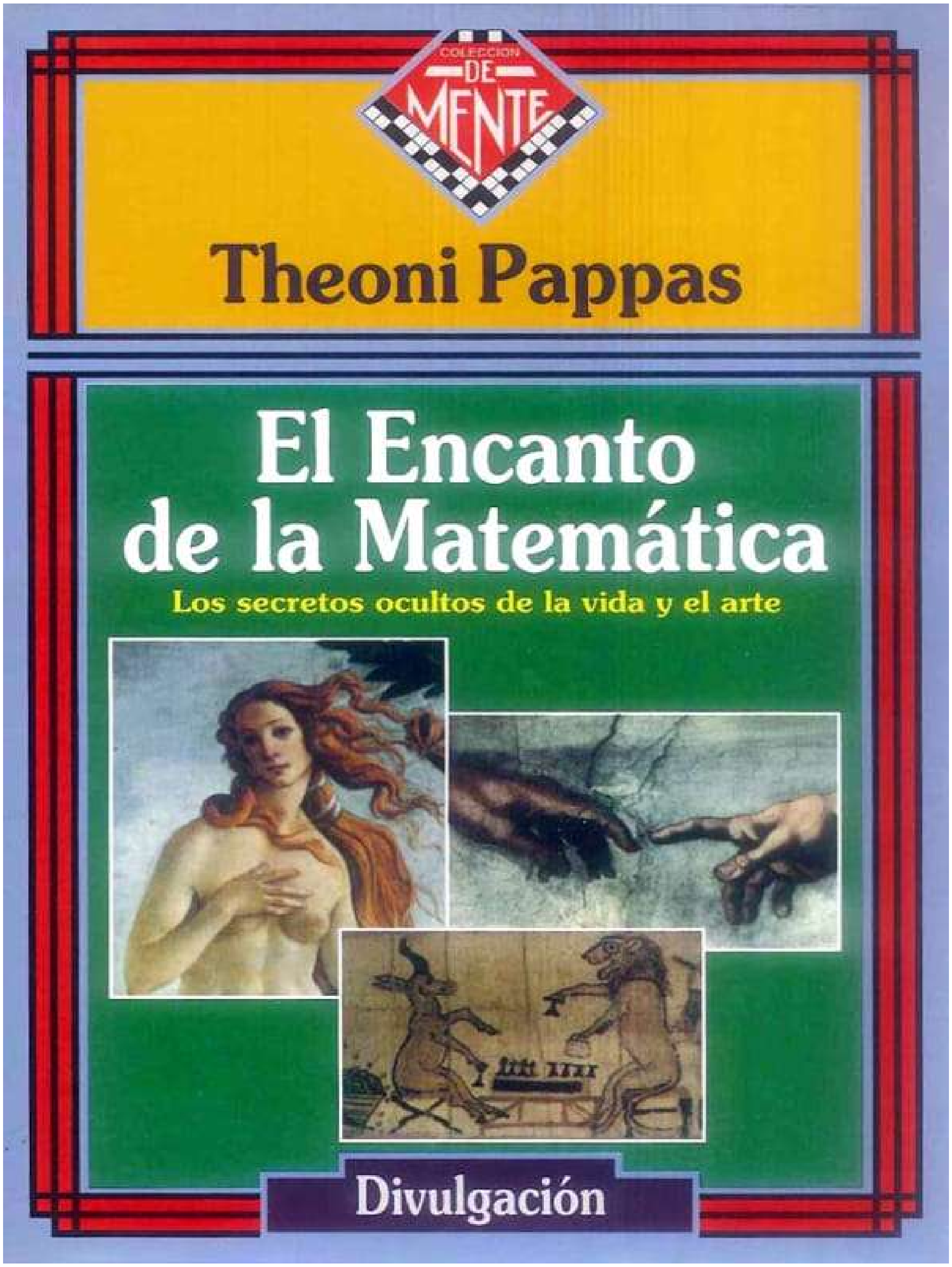

COLECCION
DE
MENTE
Theoni Pappas
El Encanto de la Matemática
Los secretos ocultos de la vida y el arte
Divulgación

Reseña

No es necesario resolver problemas ni ser matemático para descubrir el encanto de la matemática. Este libro es una compilación de ideas... ideas en las que subyace un tema matemático. No es un libro de texto. El lector no debe esperar convertirse en un experto en algún tema ni agotar una idea. El encanto de la matemática investiga el mundo de las ideas, explora la seducción que la matemática ejerce sobre nuestras vidas, y ayuda al lector a descubrirla en los lugares más inesperados. Así, este libro continúa el enfoque ya iniciado en La magia de la matemática.

Los tópicos y conceptos mencionados en cada capítulo no se limitan de ningún modo a esa sección. Por el contrario, los ejemplos pueden traspasar los límites arbitrarios de los capítulos. Aunque fuera posible, resultaría indeseable restringir una idea matemática a un área específica. Sin embargo, cada tópico es esencialmente completo, y puede ser disfrutado independientemente. Espero que El encanto de la matemática sea una puerta de entrada a los mundos matemáticos.

Índice

Este libro está dedicado a los matemáticos que han creado y siguen creando la magia de la matemática.

Preámbulo

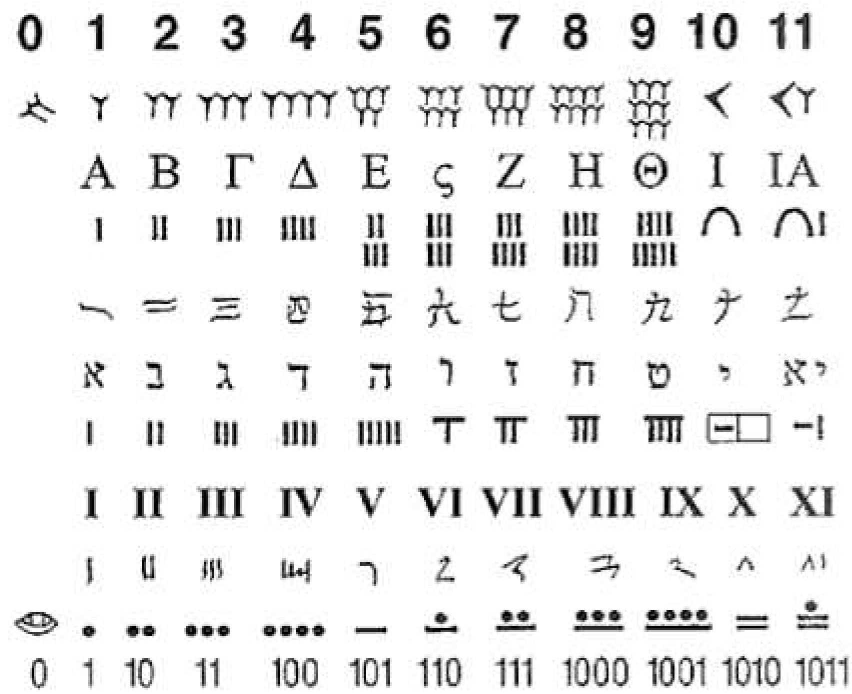
En casi todas las ciencias, una generación destruye lo que otra ha construido, y lo que una ha establecido, otra lo deshace. Sólo en la matemática cada generación añade un nuevo piso a la vieja estructura.
Hermann Hankel

En esta época de conflicto entre los estudios modernos y los antiguos, sin duda hay mucho que decir a favor de un estudio que no empezó con Pitágoras y que no terminará con Einstein, y que es el más antiguo y el más joven de todos.
G. H. Hardy

El descubrimiento de la magia matemática no se limita a la actualidad. Las historias e ideas del pasado son muy ricas en ella. Con frecuencia nos preguntamos de qué modo los antiguos usaron ideas tales como los números irracionales, las demostraciones, las secciones cónicas. Si no fuera por la curiosidad humana y por el deseo de aprender, ¿hubiera progresado la matemática hasta el lugar que ocupa en la actualidad? Este capítulo presenta unas pocas de la multitud de ideas matemáticas que han emergido en el transcurso de los siglos.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1 **Pascal** probabilidad **Laplace & Chu Shin-Chieh**
Zenón paradojas **Whitehead** • **Einstein** relatividad
Liber Abaci **Fibonacci** serie 1, 1, 2, 3, 5, 8,...
al Khwarizmi algebra **Bhaskara**
$\text{lado}^2 + \text{lado}^2 = \text{hipotenusa}^2$ **Pitágoras** $a^2 + b^2 = c^2$
teoría de conjuntos **Cantor** números transfinitos
Babbage ordenadores **Lovelace** programación
Loyd acertijos **Dudeney** • **Descartes** coordenadas cartesianas
Napier logaritmos • calculadora **Pascal** & **Leibnitz**
Apolonio cónicas **Hypatia**
Newton cálculo **Leibnitz & Seki Kowa**
Agnesi curvas & análisis **Noether** • **Diofanto** ecuaciones
Eratóstenes medida de la tierra
Euclides geometrías **Riemann & Bolyai & Lobachevsky**

Collage de ideas matemáticas y sus creadores



HINDO-ARÁBIGO • BABILONIO • GRIEGO • JEROGLÍFICO EGIPCIO • IDEOGRAMAS CHINOS • HEBREO • NÚMEROS CHINOS DE VARITAS • ROMANO • HIERÁTICO EGIPCIO • MAYA • NÚMEROS BINARIOS

La historia nos muestra que la creatividad matemática no es privilegio de ninguna cultura en particular, de ninguna época, civilización ni género. La cantidad de ideas y contribuciones sorprendentes producidas con el transcurso de los siglos es verdaderamente increíble, y resulta muy excitante explorarlas. Esa exploración llevará al lector en un viaje a través del tiempo y de todos los países del mundo. Y ese viaje revelará que algunas ideas fueron descubiertas casi simultáneamente en diferentes países, como ocurrió con la geometría hiperbólica. Sabemos que los números y alguna forma de sistema numérico son inherentes a todos los pueblos. Descubrimos que el uso del cero y de la posición del número para representar el valor fueron desarrollados en muchas partes del mundo... primero por los babilonios, con su base 60, luego por los mayas con un sistema de base 20 modificada, y por los hindúes cuando desarrollaron una notación posicional para el sistema de base 10. Descubrimos que ese sistema fue más tarde mejorado y normalizado por los árabes. Los chinos también tenían un sistema de valor posicional y usaron el cero con sus numerales varitas, que más tarde perfeccionaron hasta lograr un sofisticado sistema de numeración decimal usado especialmente para resolver cálculos. En este capítulo sólo mencionamos a unos pocos matemáticos y unas pocas ideas de los muchos miles que existen. Los mencionados de ninguna manera son superiores o más importantes que los que no aparecen. Insto a los lectores a que usen estas secciones como trampolines y base para estudios más profundos, y para posibilitar la comprensión de la magia matemática del pasado. Con ese espíritu se ofrecen las ilustraciones con listas de matemáticos famosos, el collage de matemáticos y sus ideas, y el diagrama de los sistemas numéricos. Nos encontramos en medio de muchos descubrimientos matemáticos nuevos. No es necesario ser matemático para entender la esencia de estas ideas ni para apreciar su creatividad. Debemos buscar la magia matemática en el pasado y en el presente.

Fermat	Poincaré	Du Chatelet	Euclides
Euler	Bhaskara	Ram Anu Jan	Noether
Platón	Riemann	Lobachevski	L-Hsing
Pascal	Leibniz	Arquímedes	Lagrange
Galois	Hilbert	Omar Khayyam	Cauchy
Cayley	Dedekind	Fibonacci	Euxodo
Pappo	Descartes	Kronecker	Jacobi
Tales	Boole	Kovaleskaya	Sócrates
Cantor	Seki Kówa	Cavalieri	Hamilton
Bolyai	Kumma	Bernoulli	Saccheri
Agnesi	Ptolomeo	Apolonio	Fourier
Gódel	Gauss	Weierstrass	Galileo
Napier	Legendre	De Moivre	Hermite
Zenon	Sylvester	Eratóstenes	Laplace
Abel	Sommerville	Kepler	Newton
Russell	Diofanto	Aristóteles	Germain
Lui Hui	Lovelace	Al-Khwarizmi	Einstein
Hypatas	Pitágoras	Whitehead	Birkhoff

Lista con algunos famosos matemáticos del pasado

Capítulo 1
Magia matemática del pasado

Contenido:

§. Los babilonios y las raíces cuadradas

¿Qué hacían con sus precisas aproximaciones de la raíz cuadrada?

Con frecuencia pensamos en los matemáticos de la antigüedad simplemente como eso... ¡como antiguos y remotos! Sin embargo, si miramos atrás, nos sorprenderemos al descubrir que estamos usando una idea, valor o concepto similar al que usaban las personas hace miles de años. Lo que sabemos de la matemática de los babilonios procede fundamentalmente de unas pocas tabletas de cera con texto cuneiforme, producto de las excavaciones arqueológicas. Esas tabletas datan de entre el año 3000 y el 200 a.C.[1] Revelan que los babilonios manejaban los siguientes conceptos

[1] Traducciones de O. Neugebauer, *Mathematics Keilschriftexts,* 1935-1937, F. Thureau, *Dangin Textes Mathematiques Babyloniens,* 1938, y O. Neugebauer y A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts.* Para acelerar la traducción numérica de las tabletas, O. Neugebauer desarrolló la notación de comas para separar valores posicionales y punto y coma para representar la coma sexagesimal.

matemáticos:

- *ecuaciones con una incógnita*
- *sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, tablas de aproximaciones*[2]
- *volúmenes y superficies*
- *cálculo de la superficie de un triángulo y de un trapezoide*
- *la aproximación de pi ~3 se usaba para determinar la superficie del círculo:* $3r^2$
- *el volumen de prismas y cilindros, multiplicando la superficie de la base por su altura*
- *el teorema de Pitágoras*
- *aspectos de la teoría numérica, por ejemplo:*

$$1 + 2 + 4 + ... + 2^9 = 2^9 + (2^9 - 1)$$

La tableta babilonia[3] de la página anterior ilustra una aproximación asombrosamente precisa de √2. Resulta igualmente sorprendente saber que el sistema numérico posicional de base sexagesimal desarrollado por los babilonios a partir del sistema sumerio, se presta a esa clase de precisión.[4] Fue el primer sistema numérico posicional de su época, y como inicialmente carecía de cero y de

---

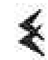
Por ejemplo,  se traduce 11, 1, ; 10, 3 que significa 11(60)+1+(10/60)+(3/3600).

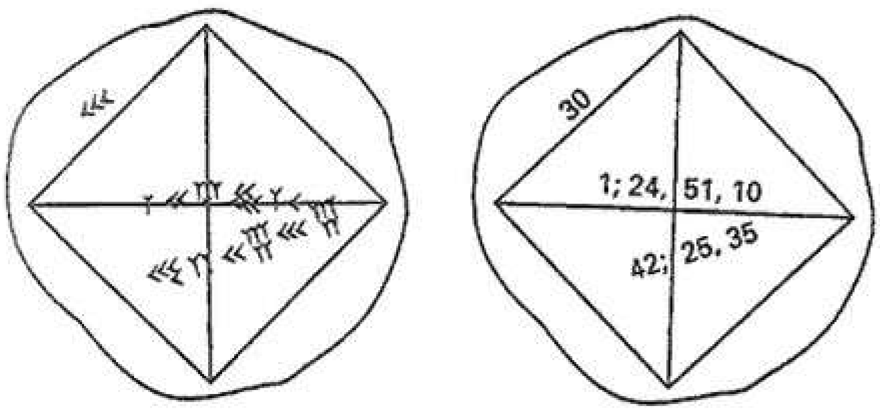
[2] Las tabletas han revelado tablas para aproximarse a varios valores matemáticos. Por ejemplo, se han encontrado tablas de recíprocos que se usaban cuando la división arrojaba resto, y tablas de valores de raíces cuadradas y cúbicas.

[3] Es la tableta YBC7289 de la colección babilónica de Yale.

[4] Los babilonios usaban dos símbolos para escribir sus números.  para el uno y  para el diez. La posición de estos símbolos determinaba su valor.

punto sexagesimal, se basaba en el contexto para indicar el valor de cada número. Por ejemplo, este número  podía representar 11(60)+12 = 672 u 11+12/60.

Más tarde, los babilonios idearon el símbolo  o  para representar una posición con valor cero.



¿Qué hacían los babilonios con aproximaciones tan precisas de √2? Si examinamos detenidamente esta tableta cuneiforme, veremos que la figura es un cuadrado en el que se han dibujado las diagonales. Un lado del cuadrado tiene el símbolo , que es la manera en que representaban el 30.

Sobre la diagonal horizontal escribieron  que representa 1; 24, 51, 10. Si suponemos que el punto sexagesimal está entre 1 y 24, el número se convierte en:

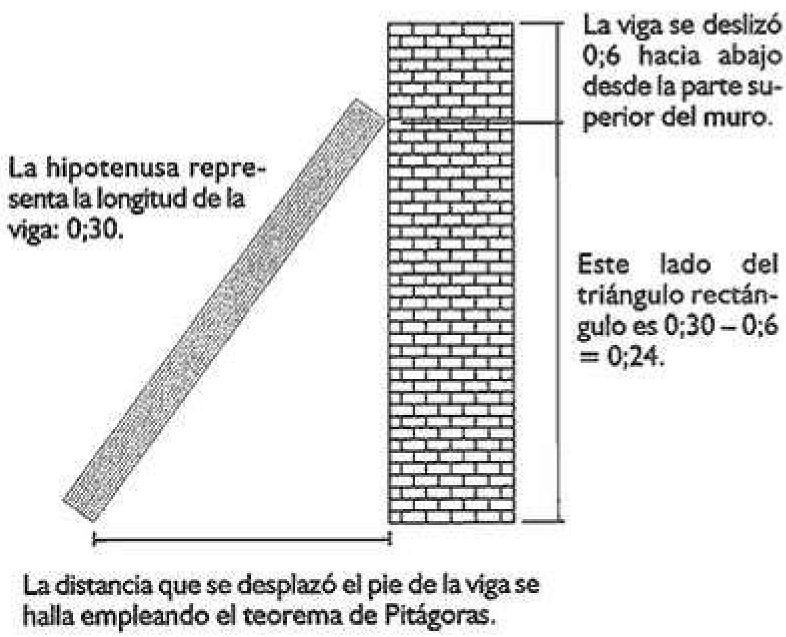
$$l + (24/60) + (51/60^2) + (10/60^3) =$$

$$= 1 + (2/5) + (51/3600) + (1/216000) \approx$$

$$\approx 1{,}4142129+$$

que puede compararse con √2 = 1,414213562.... Para llegar a esta estimación, los babilonios posiblemente utilizaron un método repetitivo de aproximación frecuentemente empleado por los griegos.[5]

Este problema aparecía en otra tableta babilonia: “Una viga (patu) de longitud 0;30 (se apoya contra un muro). El extremo superior se ha resbalado una distancia de 0;6. ¿Cuánto se ha desplazado el extremo inferior?” (La notación “;” es la aceptada para indicar el punto sexagesimal).



Sabemos que los babilonios comprendían el teorema de Pitágoras. El valor que calculaban para la diagonal vertical de la tableta es una

[5] Los antiguos griegos usaban el siguiente método de aproximación a las raíces cuadradas. Supóngase que su primera aproximación a 2 es, digamos, a = 1. Su próxima estimación era tomar $2/a$, que es igual a 2/1 = 2. El paso siguiente era el promedio de las dos primeras estimaciones, es decir (1+2)/2 =1,5. La estimación 1,5 podía luego ser promediada con una nueva aproximación 2/1,5 = 1,333... Para obtener mejores aproximaciones se continuaba el proceso.

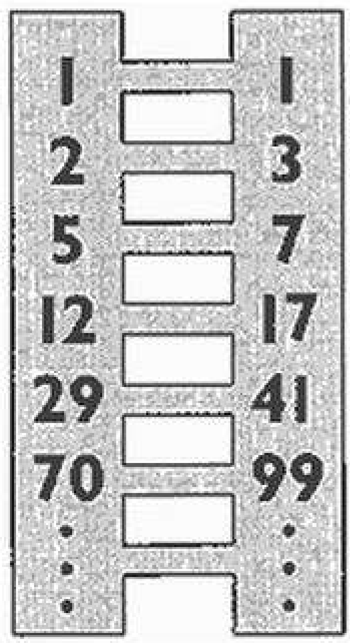
aproximación precisa de la longitud de la diagonal del cuadrado.

Es decir, los números escritos en diagonal en la tableta, 42; 25,35, se convierten en 42+(25/60)+(35/3600) ≈ 42,42638889, mientras que $30\sqrt{2} \approx 42{,}42640687$. Además de trabajar con triángulos rectángulos cuyos lados eran números racionales (por ejemplo {3,4,5}, {5,12,13}), también usaron el teorema de Pitágoras en triángulos rectángulos cuyos lados no eran todos números racionales. Esto explica que emplearan aproximaciones para números irracionales como $\sqrt{2}$. [6]

§. La escalera que asciende sobre

Los antiguos griegos descubrieron cómo dibujar segmentos, cuyas longitudes eran números irracionales, usando el teorema de Pitágoras. Solían inscribir y circunscribir polígonos regulares, y usaban también los conceptos de infinito y de límites para estudiar la superficie del círculo. También desarrollaron un tipo de escalera aritmética usando proporciones para aproximarse al valor de los números irracionales. He aquí cómo trabajaron para el caso de $\sqrt{2}$.

[6] De *Science Awaking,* por B.L. van der Waerden, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.



Empezando por 1 y 1 desde el tope de la escalera, el resto de los números de la primera columna se generan de la siguiente manera:

1 + 1 = 2

2 + 3 = 5

5 + 7= 12

12 +17 = 29

29 + 41 =70

He aquí cómo los números de la primera columna generan los de la segunda columna:

1 + 2 = 3

2 + 5 = 7

5 + 12= 17

12 + 29 = 41

29 + 70 = 99

La proporción 1:√2 se obtiene por el cociente de los números situados en los mismos peldaños de la escalera. Estos cocientes se aproximan cada vez más a 1/√2; en el límite, el valor es 1/√2.

Nota: Los dos números situados en cada peldaño de la escalera resuelven la ecuación:

$$y^2 - 2x^2 = \pm 1$$

Los valores de *x* son los números situados del lado izquierdo de la escalera.

1/√2 = 0,707106781....

1/1 = 1

2/3 = 0,666

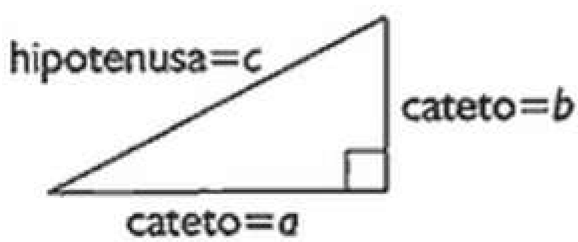
5/6 = 0,71428571429...

12/17 = 0, 70588235294... 29/41 = 0,70731707317

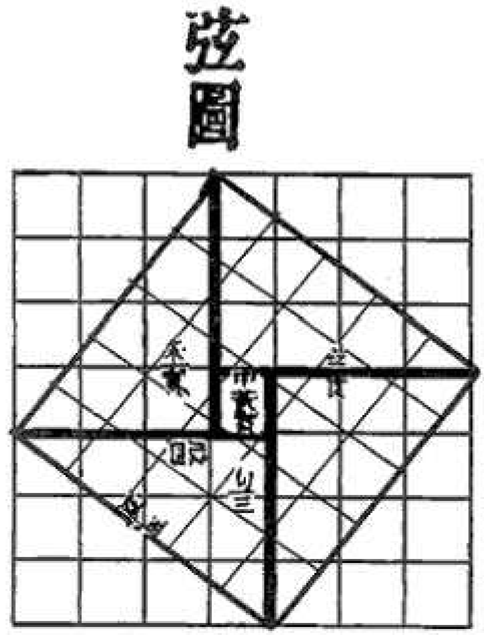
70/99 = 0,7070...

§. El método chino de apilar cuadrados

Es difícil encontrar expertos capaces de traducir la antigua escritura china. Encontrar expertos capaces de traducir manuscritos relacionados con ideas matemáticas es aún más difícil. Esto explica por qué son escasos los ejemplos chinos de temas matemáticos. *Hsuan-thu,* el apilado de cuadrados, era una técnica usada por los matemáticos chinos para llegar a conclusiones algebraicas utilizando medios geométricos y aritméticos. La ilustración que aquí presentamos procede de un manuscrito llamado *Chou Pei.* Está en disputa la fecha de *Chou Pei*, y las estimaciones oscilan entre el año 1200 a.C. y el año 100 d.C. Si la fecha 1200 a.C. es precisa, sería una de las primeras demostraciones conocidas del teorema de Pitágoras, adelantándose a Pitágoras y a los pitagóricos. El teorema de Pitágoras ha aparecido en muchas civilizaciones de la historia. En arquitectura, fue uno de los medios de asegurarse el trazado de un ángulo recto. En matemática ha sido y sigue siendo una herramienta indispensable, cuya aplicación se emplea en muchas disciplinas diferentes.

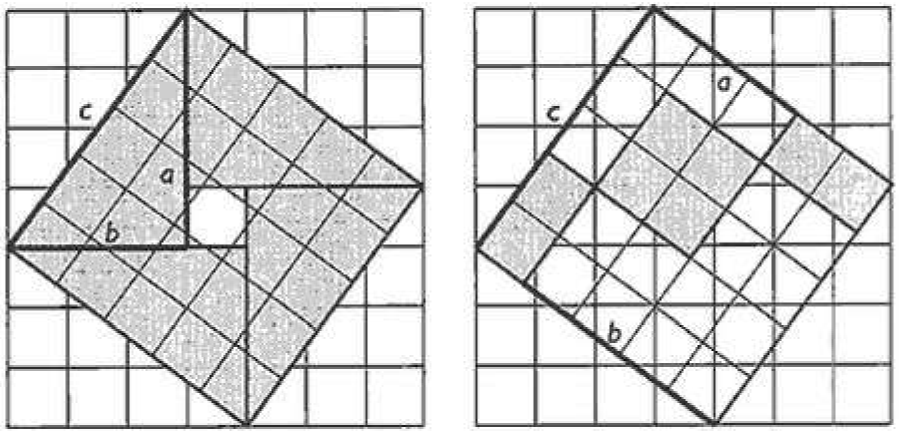


El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los dos catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa ($a^2 + b^2 = c^2$). (Lo inverso también es cierto).



En el diagrama de abajo a la izquierda, la superficie del cuadrado interior se indica como 5×5 o $5^2 = 25$ unidades cuadradas. Ha sido subdividido en 4 triángulos rectángulos, cada uno de ellos de superficie $(½)(3 \times 4)$ y un cuadrado de superficie 1×1, totalizando 25 unidades cuadradas.

En el diagrama de la derecha, el cuadrado está dividido en dos cuadrados más pequeños que se superponen, uno de 3×3 y el otro de 4×4. La parte en que se superponen tiene la misma superficie que la que dejan vacía en el cuadrado de 5×5, lo cual ilustra que la superficie del cuadrado más grande (5^2) es igual a la suma de las superficies de los dos cuadrados más pequeños, es decir, 3^2 y 4^2.

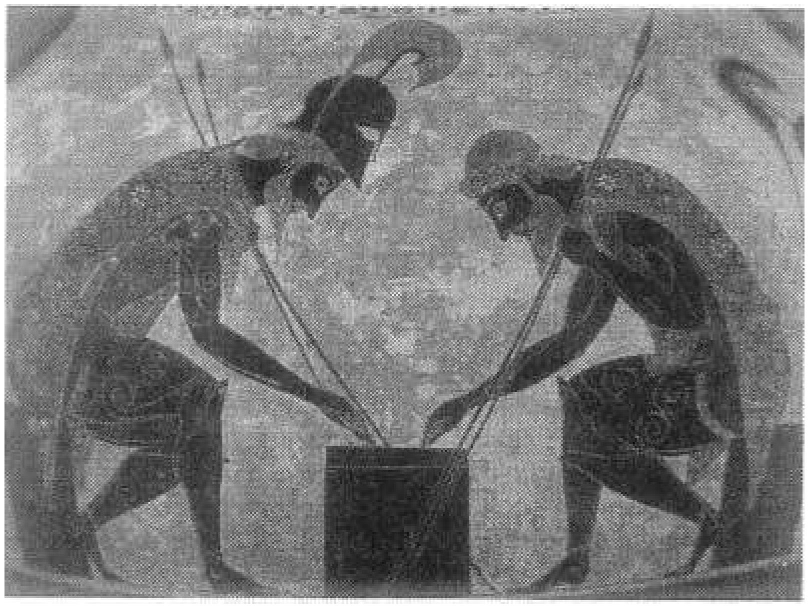


Izquierda: El diagrama explica cómo hallar la superficie del cuadrado interior sombreado sumando las superficies de los 4 triángulos y del cuadrado unidad que está en el medio. En general, muestra que: $c^2 = 4\,(½)ab+(a-b)^2 = 2ab+(a^2–2ab+b)^2 = a^2+b^2$. *Derecha: La suma de las superficies de los dos rectángulos sombreados es igual a la superficie del pequeño cuadrado sombreado (el cuadrado creado por dos cuadrados superpuestos). Si 5, 4 y 3 representan a las variables c, a y b, se demuestra que:* $a^2+b^2 = c^2$

§. Uno de los primeros generadores de números aleatorios

Aunque en la antigua Grecia no se llamara al dado un “generador de números aleatorios”, de hecho lo era y, según Homero, los héroes de la Guerra de Troya se entretenían con ellos entre combate y combate (en el Museo Arqueológico Nacional de Atenas puede verse un antiguo ejemplar).

Los dados han desempeñado muchos roles a lo largo de los siglos. Han sido usados para predecir la suerte, para determinar los movimientos de juegos tales como el *backgammon* y el *Monopoly,* mientras que en otros juegos son los elementos principales.

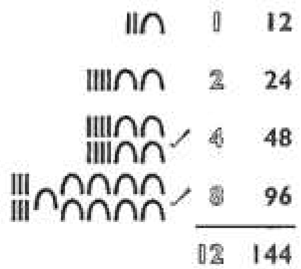


Exekias, Ayax y Aquiles jugando a los dados. Ánfora, siglo IV a.C.

Los matemáticos siempre han estado intrigados por los dados desde el punto de vista de la probabilidad. De hecho, pueden ser considerados responsables por haber desviado la atención de Blaise Pascal y de Pierre de Fermat hacia el tema de la probabilidad.

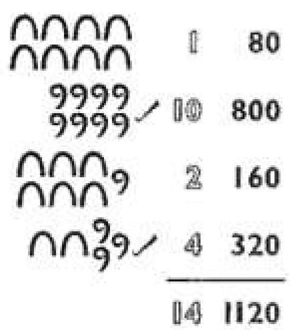
Mientras Pascal jugaba, un amigo le preguntó cómo se repartiría el pozo si el juego se interrumpiera antes de terminar. Pascal le escribió a Fermat sobre el problema. En 1654, los dos hombres elaboraron por correspondencia su teoría de la probabilidad, y de ese modo iniciaron una nueva rama de la matemática. En la actualidad los dados y otros generadores de números aleatorios se emplean para la enseñanza de diversos aspectos de esta teoría.

§. La multiplicación egipcia



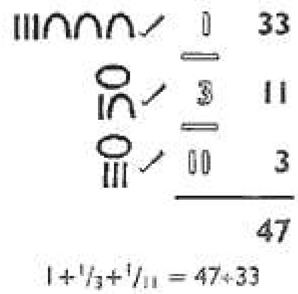
12×12 = 144

El método de multiplicación egipcio sobrevivió durante siglos, esparciéndose en muchas civilizaciones. En las escuelas de la antigua Grecia se lo enseñaba con el nombre de cálculo egipcio. En la Edad Media se enseñaban sus técnicas bajo el nombre de duplatio para la duplicación y de mediado para la división en mitades.



1120÷80 = 14

He aquí un ejemplo, tomado del papiro Rhind, de cómo un escriba egipcio hubiera multiplicado 12 × 12. Se empieza con 12. Después se duplica para que dé 24, que a su vez es duplicado para dar 48, y otra vez duplicado para dar 96. Se dibujan tildes junto al 4 y al 8, para indicar que suman 12. Luego se suman sus cifras correspondientes, lo que nos da la respuesta, 144. El método egipcio de multiplicación eliminaba la necesidad de memorizar las tablas, ya que se basaba fundamentalmente en la adición.



La división se hacía de manera similar. Para dividir 1120 por 80, hay que hallar el número que multiplicado por 80 dé 1120. Según cuán grande sea el número que se divide, el divisor es duplicado o multiplicado por 10, 100, 1000, etc. Los resultados pueden entonces duplicarse hasta hallar una suma que dé 1120. Si el problema no daba un resultado entero, los egipcios usaban fracciones, como en el ejemplo de 47/33.

§. El primer laboratorio científico

Con frecuencia los matemáticos y eruditos de la antigua Grecia son considerados principalmente como teóricos y filósofos. En la actualidad, nuevas investigaciones[7] han revelado que el primer laboratorio del que queda registro fue instalado por Pitágoras y los pitagóricos (siglo VI a.C.). No es sorprendente que no existan registros de los propios pitagóricos que respalden esta afirmación, ya que constituían un grupo clandestino que trabajaba en secreto. Pero sí hay evidencias posteriores. La ilustración procede de los escritos del erudito romano Boecio (siglo V d.C.).

[7] Estos hallazgos fueron presentados por Andrew D. Dimarogonas, de la Washington University de St. Louis, en el *Journal of Sound & Vibration,* mayo, 1990.

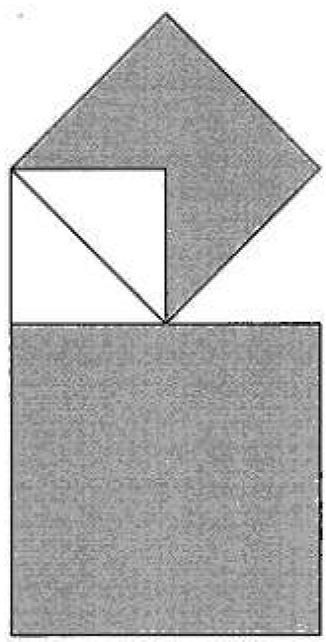
Muestra a Pitágoras experimentando con el sonido, específicamente con la relación entre las proporciones de un objeto (en este caso, campanas) y los tonos que produce. Teón de Esmirna (siglo II d.C.), junto con otros autores antiguos, escribió acerca de experimentos similares realizados por los pitagóricos y otros griegos. Si se consideran las invenciones del matemático griego Arquímedes (287-212 a.C.) —las leyes de la palanca y la polea, los métodos para comparar los volúmenes de los objetos mediante inmersión en el agua, el tomillo de Arquímedes, la catapulta— advertimos la existencia e importancia de la experimentación.

§. Platón duplica el cuadrado

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

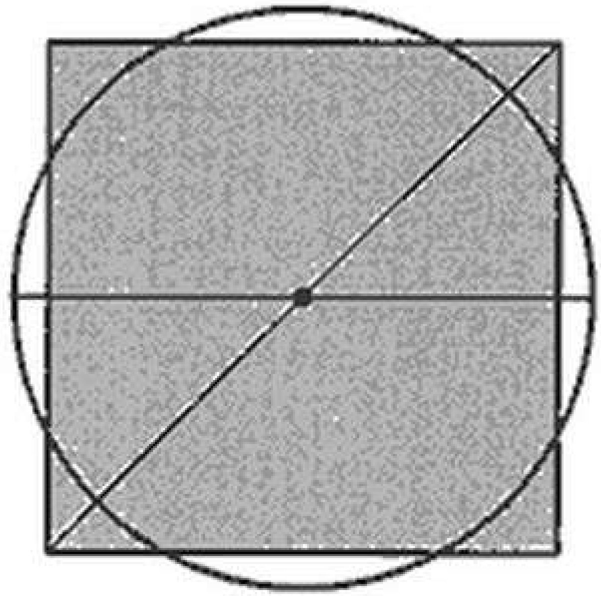
Que nadie que ignore la geometría entre aquí.

Estas palabras estaban inscriptas sobre las puertas de la Academia de Platón en Atenas. Aunque Platón (428-348 a.C.) no es famoso por sus contribuciones matemáticas, sí tiene renombre por haber establecido un centro donde él mismo guiaba, estimulaba e inspiraba el pensamiento matemático. Este elegante método para duplicar la superficie del cuadrado aparece en el diálogo platónico *Menón.* El diagrama ilustra cómo debe duplicarse un cuadrado y cómo no debe hacérselo.



El área sombreada del cuadrado superior es el doble que el área del cuadrado blanco. El cuadrado sombreado inferior tiene una superficie de cuatro veces la del cuadrado blanco. Adviértase que aunque sus lados son del doble de tamaño que los lados del cuadrado blanco, su superficie es cuatro veces la de éste.

§. Los romanos y la superficie del círculo



Para hallar la superficie de un círculo determinado, los romanos usaban la superficie de un cuadrado cuya diagonal era 1/4 más larga que el diámetro del círculo.

He aquí la precisión del método.

Supongamos que el diámetro del círculo es *d*. Entonces, la diagonal del cuadrado es

$$d + 0{,}25d = 1{,}25d$$

Aplicando el teorema de Pitágoras, el lado del cuadrado es

$$1{,}25d^2/\sqrt{2}$$

Elevando al cuadrado el lado del cuadrado, obtenemos la superficie del cuadrado como

$$1{,}5625d^2/2$$

Como el radio del círculo es 0,5*d*, y la fórmula para la superficie de cualquier círculo es πr^2, la superficie del círculo es:

$$(0{,}5d)2\pi = 0{,}25d^2\pi$$

Usando 3,1416 como aproximación de π, tenemos:

Método romano	*Método verdadero*
$1{,}5625d^2/2 = 0{,}78125d^2$	$0{,}25d^2\pi = 0{,}785d^2$

Si igualamos $0{,}78125d^2$ y $0{,}25d^2\pi$ y despejamos π, llegamos a la aproximación que los romanos tenían de π:

$$0{,}78125d^2 = 0{,}25d^2\pi$$

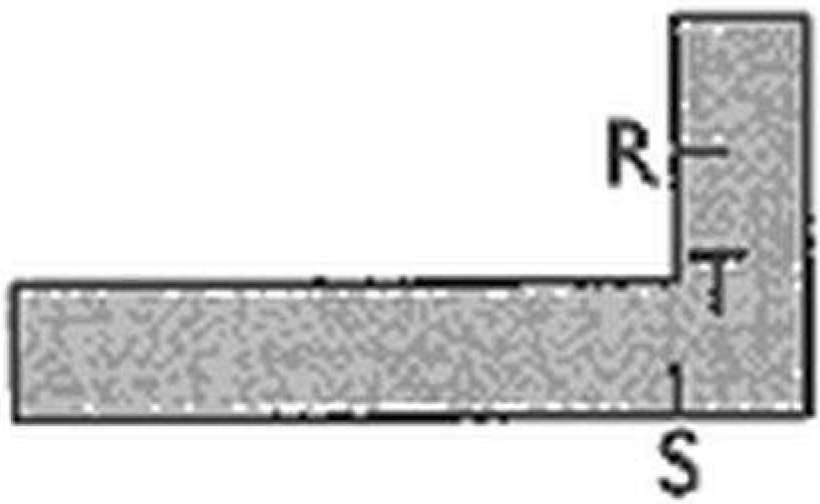
$$0{,}78125d2 / 0{,}25d2 = \pi$$

$$3{,}125 = \pi$$

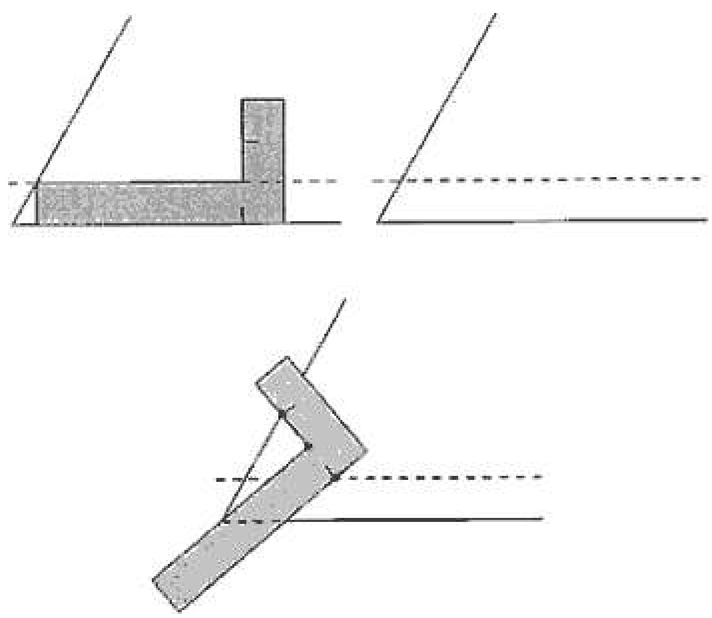
$$3 + {}^{1}/{}_{8} = \pi$$

§. Cómo trisecciona un ángulo el gnomon

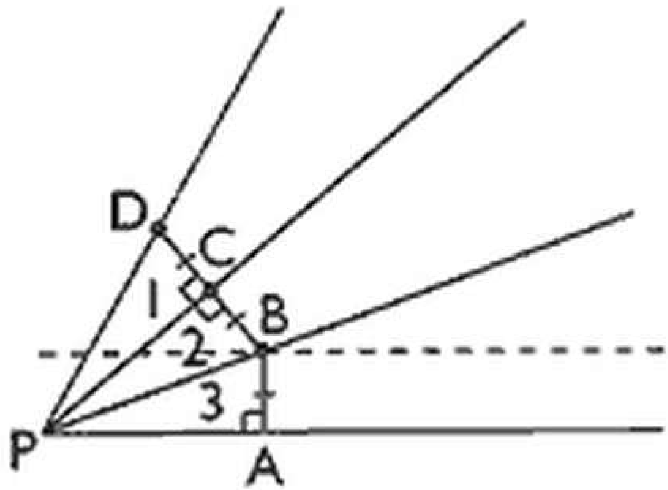
Triseccionar un ángulo era una de los tres famosos problemas de construcción imposible de la antigüedad que originaron muchos descubrimientos matemáticos. Aunque un ángulo no puede ser triseccionado usando solamente regla y compás, sí puede serlo empleando un instrumento al que los griegos llamaban gnomon (el gnomon era usado para hacer y determinar ángulos rectos). Los antiguos griegos triseccionaban el ángulo de la manera siguiente:



El gnomon tiene dos marcas, R y S, de tal modo que |TR| = |TS|



Arriba: Pasos 1 y 2: El gnomon se usa para hacer una línea paralela a un lado del ángulo. Abajo: Paso 3: El gnomon se coloca como se ve en la ilustración, con una marca sobre un lado del ángulo, otra sobre la línea paralela, y la regla pasando por el vértice del ángulo.



Paso 4: Se trazan las líneas de puntos para formar tres triángulos: $\Delta PCB \cong$ (hipotenusa común, un cateto similar), ΔPCB, ΔPCD un cateto común, un cateto similar). Así $\Delta PCB \cong \Delta PCD \cong \Delta PAB$, y por lo tanto $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3$ queda así triseccionado.

§. Misterios matemáticos no resueltos

Sin duda la matemática presenta una gran abundancia de problemas. En realidad, la matemática y los problemas son inseparables.

La historia demuestra que las ideas matemáticas han sido catalizadoras de los problemas matemáticos, y que los problemas matemáticos han estimulado muchas ideas y descubrimientos matemáticos. Los *tres problemas de construcción imposible de la antigüedad*[8], el *problema de los puentes de Königsberg*[9] y el *problema del postulado de las paralelas*[10] son ejemplos de problemas que han sido resueltos y que en su proceso de resolución estimularon ideas, pensamientos y descubrimientos matemáticos. El planteo y la exploración de problemas y cuestiones matemáticas, y el escrutinio de las soluciones y las pruebas son fuerzas estimulantes para los matemáticos.

He aquí algunos pocos famosos problemas matemáticos "no resueltos":

Los problemas no resueltos de los números primos

- ¿Existe alguna fórmula para determinar si un número determinado es primo o no lo es?
- ¿Hay un número infinito de pares primos? Un par primo es un par de primos consecutivos cuya diferencia es dos. Por

[8] Los *tres problemas de construcción imposible de la antigüedad,* que debían ser resueltos usando sólo una regla sin divisiones y un compás, eran: *la trisección del ángulo* (dividir un ángulo en tres ángulos congruentes), *la duplicación del cubo* (construir un cubo de volumen doble al de un cubo dado), y *la cuadratura del círculo* (construir un cuadrado de área igual a un círculo dado). Unos pocos de los descubrimientos a los que estos problemas dieron origen son la concoide de Nicomedes, la espiral de Arquímedes y la cuadratriz de Hippías

[9] El *problema de los puentes de Königsberg* era hallar un recorrido que atravesase los siete puentes sin pasar dos veces por el mismo puente. Euler desarrolló la noción de red mientras resolvía el problema.

[10] El *postulado de las paralelas* implicaba determinar si el quinto postulado de Euclides era en realidad un postulado o un teorema. El intento de demostrarlo llevó al descubrimiento de las geometrías no-euclidianas.

ejemplo, 3 y 5, ya que 5 – 3 = 2. Algunos otros son 5 y 7, 11 y 13, 41 y 43.

- El misterio del número perfecto impar: Un número perfecto es aquél que es igual a la suma de sus divisores propios (un divisor propio es un divisor que no es el número mismo). El número 6 es un ejemplo de un número perfecto par porque 6 = 1 +2 + 3. Otros ejemplos son 28, 496 y 8128. Alrededor del año 300 a.C., Euclides demostró que si un número de la forma 2^{n-1} es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es un número perfecto. Luego, en el siglo XVIII, Euler demostró que *cualquier número perfecto par* debe tener la forma dada por Euclides. Por ejemplo, 8128 = $2^6(2^7-1)$. Pero los números perfectos impares siguen siendo un misterio. Hasta ahora nadie ha encontrado un número perfecto impar, ni nadie ha probado que todos los números perfectos son pares.

La conjetura de Goldbach

¿Todos los números pares mayores que dos son la suma de dos números primos?

En 1742, el matemático alemán Christian Goldbach (1690-1764), le comunicó a Leonhard Euler (1707-1783) la conjetura de que *todo número par, salvo 2, era la suma de dos primos.* Ejemplos: 4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3; 10 = 5 + 5; 12 = 7 + 5, ... Aunque se considera que la conjetura de Goldbach es cierta, hasta el momento nadie la ha demostrado. Hasta ahora se han producido los siguientes avances: en 1931, el matemático soviético L. Schnirelmann aparentemente probó que cualquier número par puede escribirse como la suma de no más de 300.000 primos... algo muy alejado de *dos* primos. Iván M. Vinogradov (1891-1983) demostró que todos los enteros impares suficientemente grandes son suma de tres primos. En 1973, Chen Jing-run demostró que cualquier número par suficientemente grande es la suma de un primo y de un número que, o bien es primo o bien tiene dos factores primos.

Un margen demasiado estrecho

En el siglo XVII, Pierre de Fermat (1601-1665) escribió en el margen de uno de sus libros:

> *Dividir un cubo en dos cubos, una cuarta potencia, o en general cualquier potencia mayor que la segunda, en dos potencias de la misma denominación, es imposible, y sin duda he encontrado una maravillosa prueba de esto, pero el margen es demasiado estrecho para escribirla.*

En otras palabras: Si n es un número natural mayor que 2, no hay números enteros positivos x, y, z de modo que $x^n + y^n = z^n$.

La nota de Fermat se convirtió en un desafío. Durante siglos, la prueba o la negación de este teorema eludió incluso a los matemáticos más prominentes.

* * * *

El estudio de las ideas matemáticas que no han sido resueltas resulta tan interesante como investigar aquello que sí conocemos. Lo que hemos presentado es sólo una pequeña muestra de misterios matemáticos no resueltos. Aunque algunos de ellos son suficientemente simples como para explicárselos a personas sin formación matemática, las soluciones resultan sorprendentemente esquivas.

§. El último teorema de Fermat

No hay números enteros positivos que puedan resolver $x^n + y^n = z^n$ cuando n es un número natural mayor que 2.

Cuando el matemático del siglo XVII Pierre de Fermat garrapateó la nota citada en la página anterior en el margen de una traducción de la *Aritmética* de Diofanto, no se imaginaba el impacto que su comentario ejercería sobre el desarrollo de la matemática durante los 350 años siguientes. ¿Verdaderamente lo había resuelto? ¿O era tan sólo una broma? Nadie lo sabrá con seguridad, pero lo que sí sabemos es que se convirtió en uno de los famosos problemas no resueltos de la historia de la matemática. Al igual que los tres famosos problemas de construcción de la antigüedad, que el problema de los puentes de Königsberg, y que el quinto postulado de Euclides, el último teorema de Fermat ha estimulado las ideas y descubrimientos matemáticos durante siglos.

La comunidad matemática se muestra muy excitada y entusiasta con respecto a *Curvas elípticas modulares y el último teorema de Fermat*, una obra de 200 páginas de Andrew J. Wiles, profesor de matemática en la universidad de Princeton. Al presentar su obra en unas conferencias pronunciadas en Cambridge (en junio de 1993), concluyó su última charla con el anuncio de que había probado la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil que, en opinión de los matemáticos, era la clave para probar el último teorema de Fermat. En los círculos matemáticos predomina la sensación de que la obra de Wiles ha acabado con el problema del último teorema de Fermat.

Andrew Wiles

A lo largo de los siglos se han producido miles de “pruebas” del problema de Fermat, pero hasta el momento ninguna ha resistido un examen profundo. No es que el último teorema de Fermat sea algo tan extraordinario, pero como Fermat dijo “he descubierto una prueba verdaderamente maravillosa”, la solución (su prueba) se constituye en la belleza de este teorema. Su búsqueda ha provocado descubrimientos en teoría numérica, criptografía y códigos, para nombrar sólo algunas áreas.

Wiles había estado intrigado por el teorema de Fermat desde su adolescencia. Pero no profundizó en su prueba mientras no vio medios posibles a su alcance. Wiles considera que su trabajo es una colaboración de todos los matemáticos que lo precedieron. Entre estos matemáticos se encuentra Leonhard Euler, del siglo XVIII, quien probó el teorema para $n = 3$. El matemático alemán Ernst E. Kummer probó el teorema para todos los números menores que 100, excepto tres. Pruebas actuales realizadas mediante ordenador han revelado que no existen soluciones para los primeros cuatro millones de números naturales. En la década de 1950, Yuktaka Taniyama enunció su conjetura con respecto a las curvas elípticas y a sus estructuras en un plano hiperbólico. Tres décadas después, Gerhard Frey planteó que si la conjetura de Taniyama era cierta en el caso de cierto tipo de curvas elípticas (llamadas semiestables), entonces se podía probar el teorema de Fermat. Cuando Kenneth A. Ribet probó la proposición de Frey, Wiles decidió dedicarse al teorema de Fermat. A partir de ese momento trabajó intensivamente durante siete años. En mayo de 1993, llegó a manos de Wiles un trabajo de Barry Mazur, de Harvard. El trabajo describía una técnica numérica que tenía más de cien años de antigüedad, y que resultó muy importante para la finalización de su prueba.

§. Galileo y la proporción

Existen muchos conceptos matemáticos que no tienen restricciones en el dominio de la matemática, pero que están limitados cuando se los aplica al mundo real. La idea de la proporción es una de esas ideas útiles para resolver muchos tipos de problemas. Por ejemplo, si tres cajas idénticas de bolitas pesan 42 libras, ¿cuántas cajas hacen falta para llegar a un peso de 168 libras? Establecer una proporción es una de las maneras posibles de resolver este problema:

3 cajas/42 libras = ? cajas/168 libras.

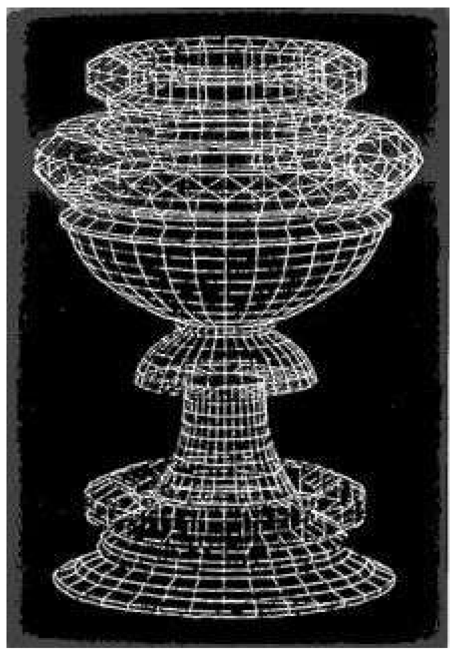
Pero no todos los problemas de proporción tienen una resolución realista. ¿Es posible cambiar la escala de un árbol y que sea funcional? ¿Puede existir una persona de cualquier tamaño? La composición de un objeto, sea un árbol o los huesos de una persona, desempeña un rol vital en la determinación de los límites máximos y mínimos de su tamaño. Una persona de cien pies de altura es imposible, porque la estructura y los materiales que componen el cuerpo humano no están preparados para esa forma gigantesca. Hasta las secoyas gigantes tienen límites en su altura, dictados por el sistema de sus raíces y las propiedades de la madera. Uno de los primeros registros del problema de aumentar o disminuir a escala el tamaño de un objeto figura en *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*, obra escrita por Galileo en 1638.

Allí Galileo afirma:

> “... *si se quiere mantener en un gigante la misma proporción que se encuentra en un hombre común, habrá que encontrar materiales más duros y resistentes para hacer los huesos, o bien habrá que admitir una disminución de fuerza en*

comparación con hombres de estatura media; pues si su altura se aumentara desmesuradamente, el gigante caería y quedaría aplastado bajo su propio peso. En tanto, si el tamaño del cuerpo se disminuye, la fuerza de ese cuerpo no disminuye en proporción. Por cierto, cuanto más pequeño es el cuerpo, tanto más grande es su fuerza relativa".

§. Los recipientes y la matemática



Con frecuencia resulta sorprendente descubrir cómo se matematizaban las ideas y los objetos del pasado. Existen numerosos ejemplos de distintos jarrones, contenedores y recipientes para depósito que han sido diseñados con muchas formas. Este diseño y dibujo de un cáliz, hecho por Paolo Uccello, pertenece a la colección en exhibición en la galería Uffizzi de Florencia, Italia. Aunque fue hecho durante la primera parte del siglo XV, su precisión y exactitud nos recuerdan el análisis por ordenador, e ilustra la perspectiva lineal, la constante existente entre las medidas proporcionales, y el uso de sólidos geométricos.

§. Geometrías... viejas y nuevas

He descubierto cosas tan maravillosas que me dejaron atónito... de la nada he creado un extraño nuevo universo.

Janos Bolyai, en una carta a su padre, 1823.

Cuando pensamos en la geometría, la mayoría de nosotros recordamos el curso de geometría de la escuela secundaria... todos esos teoremas “mortales” que tuvimos que “memorizar”, la excitación que nos produjo nuestra primera prueba, puntos, líneas, triángulos, cuadriláteros, círculos, sólidos, superficie, volumen. Lo bello de la geometría es que podemos visualizar sus elementos. Pero no nos damos cuenta de que una silenciosa evolución de las ideas se ha producido desde la antigüedad hasta el presente. Aquellos de nosotros que continuamos el estudio de la matemática aprendimos que en la geometría había mucho más que la geometría euclidiana. Aprendimos cómo se relacionaban la geometría y el álgebra por medio del sistema de coordenadas de René Descartes. Vimos cómo el quinto postulado de Euclides era cuestionado durante siglos por los matemáticos: muchos pensaban que no era una idea independiente, sino que podía ser probado a partir de elementos de la geometría ya existentes. Tal como la historia lo ha demostrado, el quinto postulado era definitivamente independiente dentro de la geometría euclidiana... pero los intentos fracasados condujeron a los descubrimientos de las geometrías no-euclidianas. Es imposible separar verdaderamente un campo de la matemática del resto, pues cuando los matemáticos conciben ideas lo hacen basándose en *todos* sus conocimientos matemáticos. Una línea temporal de la evolución de las geometrías resulta demasiado interesante como para pasarla por alto. El espacio limita esta línea temporal a la evolución de los campos de las geometrías, y no a las ideas específicas dentro de una geometría en particular. Esperamos que esto sirva como trampolín para sus propias investigaciones.

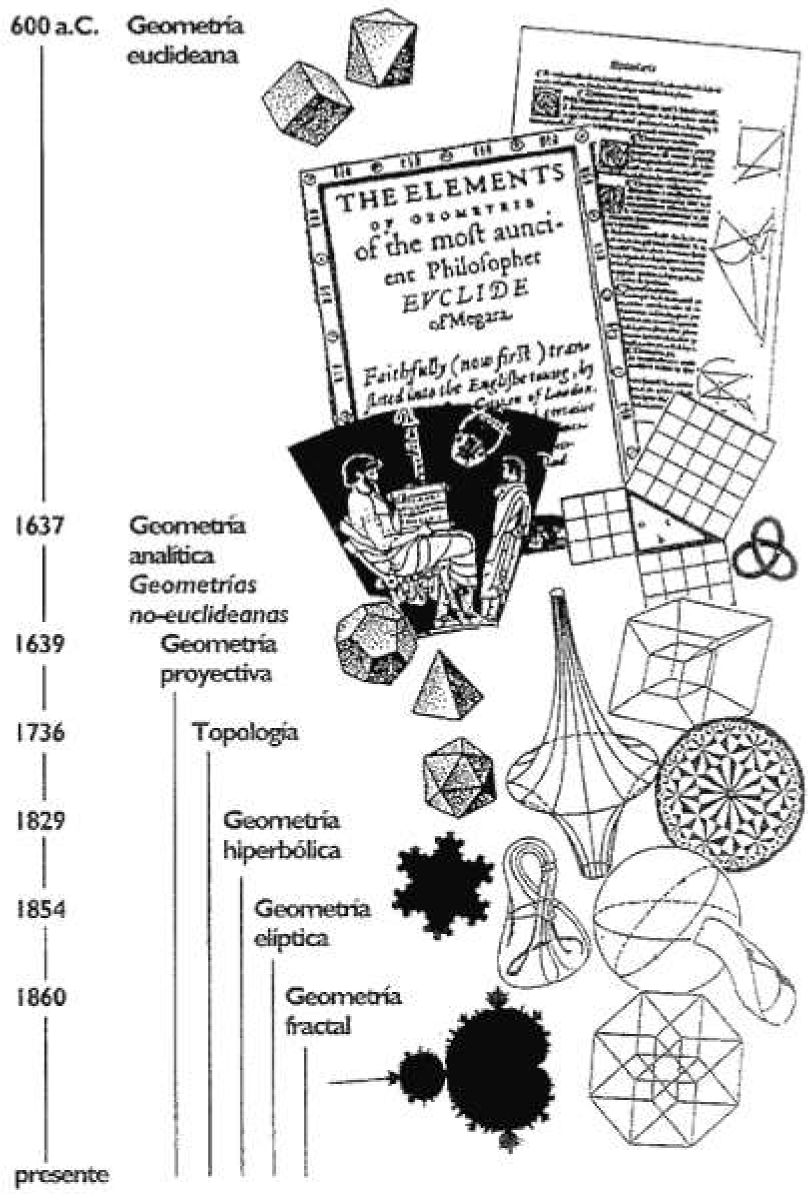
- 600 a.C. Tales introduce la geometría deductiva. Con los años ésta fue desarrollada por matemáticos y filósofos como Pitágoras y los pitagóricos, Platón y Aristóteles.
- 300 a.C. Euclides compila, organiza y sistematiza en trece libros, llamados *Los elementos,* las ideas geométricas que habían sido descubiertas y probadas.
- 140 a.C. Posedonio reexpresa el quinto postulado de Euclides.
- Siglo III d.C. Proclo (410-495 d.C.) es uno de los primeros críticos registrados del quinto postulado de Euclides.
- A lo largo de los siglos se hacen incontables intentos de probar el quinto postulado de Euclides.
- 1637 René Descartes formula la geometría analítica.
- Girolamo Saccheri (1667-1733) es el primero que intenta hacer una prueba indirecta del quinto postulado de Euclides. Desafortunadamente, no acepta los resultados de su trabajo. Antes de su muerte Saccheri publica un libro, *Euclides ab*

omni naevo vindicatus (Euclides absolutamente reivindicado), que llamó la atención de Eugenio Beltrami un siglo y medio más tarde. Si Saccheri no hubiera rechazado sus descubrimientos, hubiera acelerado un siglo el descubrimiento de una geometría no-euclideana.

- 1639 Girard Desargues (1591-1661) publica una obra sobre las cónicas en la que habla de su descubrimiento de la geometría proyectiva
- 1736 Leonhard Euler (1707-1783). Su estudio y resolución del problema de los puentes de Königsberg inicia el campo de la topología.
- 1795 Gaspard Monge (1746-1818) describe estructuras mediante proyecciones del plano.
- 1822 Jean Víctor Poncelet (1788-1867) revive con su tratado la geometría proyectiva, y formula el principio de dualidad.
- 1843 Arthur Cayley (1821-1895) empieza el estudio de los espacios n-dimensionales en geometría analítica.
- Georg Cantor (1845-1918). Su teoría de conjuntos proporciona una base a la topología, presentada en 1895 por Henri Poincaré (1854-1912) en su *Analysis Situs.* Desarrolla el conjunto de Cantor y los primeros fractales.
- 1871 Christian Félix Klein (1849-1925) realiza trabajos en geometría proyectiva y topología, y prueba la coherencia de las geometrías euclidiana, elíptica e hiperbólica.
- Siglo XIX Nicolai Lobachevski (1793-1856), Jonas Bolyai (1802-1860), y Carl Gauss (1777 -1855) descubren

independientemente la geometría hiperbólica.

- 1854 G. F. Bernhard Riemann (1826-1866) presenta la geometría elíptica.
- 1858 August Möbius y Johann Listing descubren independientemente las superficies de una sola cara, como por ejemplo la cinta de Möbius.
- 1888 Giuseppe Peano (1858-1932) crea la curva de Peano que llena el espacio (fractal).
- 1904 Helge von Koch (1870-1924) crea la curva copo de nieve de Koch (fractal).
- 1919 Félix Hausdorff define las dimensiones fraccionarias en la geometría fractal. A. S. Besicovitch generaliza el trabajo de Hausdorff.
- 1971 Vladimir Arnold vincula la geometría algebraica (la geometría analítica n-dimensional) y la topología
- 1951-1975 Benoit Mandelbrot acuña el término fractal y trabaja casi por sí solo en su desarrollo.



§.¿Qué hay en un nombre?

¿Alguna vez se preguntó de dónde proceden los nombres de ciertos campos matemáticos? Por ejemplo, consideremos el caso de la geometría hiperbólica y de la geometría elíptica. En ambos casos, sus creadores no tuvieron nada que ver con los nombres que se adoptaron finalmente. La geometría hiperbólica fue descubierta independientemente por Nikolai Lobachevski (1793-1856) y por

Janos Bolyai (1802-1860). El quinto postulado de la geometría euclidiana afirma que, por un punto P exterior a una línea dada L, puede pasar una y sólo una línea paralela a la línea L. Los frustrados intentos de los matemáticos de demostrar que este postulado era comprobable, y por lo tanto era un teorema, condujeron al descubrimiento de las geometrías no euclidianas. En la geometría hiperbólica se descubrió que existe más de una línea que pasa por P y que es paralela a L.

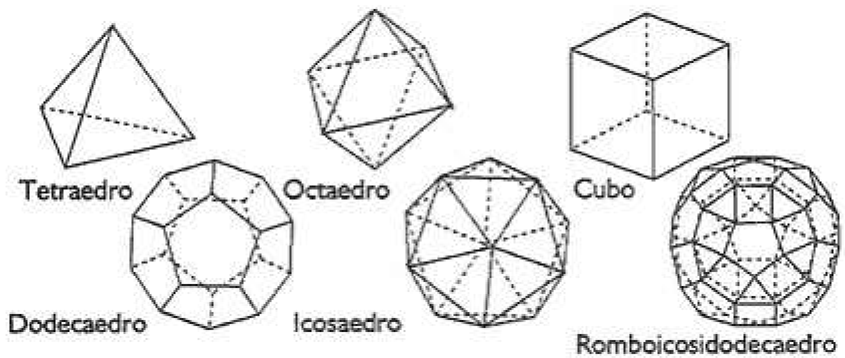
Nikolai Lobachevski fue honrado en un sello ruso en 1958.

El término hiperbólica viene de la palabra griega *hyperbole,* que significa excesivo. En este caso, se aplica al número de líneas paralelas que pasan por P y que son paralelas a L. Lobachevski se había referido originariamente a su geometría llamándola *geometría imaginaría y pangeometría.* Pero el nombre que se le da actualmente —geometría hiperbólica— fue responsabilidad del famoso geómetra Félix Klein, creador de la botella de Klein. Por añadidura, Klein también acuñó el término geometría elíptica para designar la geometría no-euclidiana de Georg Riemann, en la que no existe ninguna línea paralela a L que pase por el punto P. El término elíptica procede de la palabra griega *elleiptis,* que significa carecer.

§. La fórmula mágica de Euler

Lo especial de las ideas matemáticas es que una vez que han sido probadas, se cumplen en todos los casos. Por ejemplo, para sumar los primeros k números naturales, $1 + 2 + 3 + ... + k$, todo lo que debemos hacer es aplicar la fórmula $k(k + 1)/2$. Esta fórmula ha sido probada matemáticamente por medio de un método llamado inducción. Es físicamente imposible probar esta fórmula para cada uno de los conjuntos posibles de números naturales consecutivos, comenzando por 1; la belleza de las pruebas matemáticas es que no exigen este tipo de fuerza bruta.

El matemático suizo Leonhard Euler tiene el crédito de haber realizado muchos descubrimientos matemáticos, especialmente en el campo de la topología. Su solución al problema de los puentes de Königsberg, según se dice, inició el estudio de las redes topológicas. La topología estudia las propiedades de los objetos que no cambian cuando se los distorsiona. Por ejemplo, estirando o aplastando un cubo se lo puede convertir en un tetraedro, o viceversa. El tamaño del cubo obviamente cambia, así como el número de sus caras, vértices y lados. Podríamos preguntamos qué tipo de propiedades permanecen inalteradas. Una respuesta es que cualquier punto del interior del cubo sigue siendo un punto interior del tetraedro.



Fuera de la topología, un fascinante teorema que Euler probó sobre una propiedad invariable de los poliedros, es que *si se suma el número de caras del poliedro al número de sus vértices, y luego se resta el número de sus lados, el resultado es siempre* 2. Escrito en símbolos, $C+V-L = 2$. Pruébelo con los sólidos platónicos de arriba. Si se siente con energía, pruebe con el romboicosidodecaedro.

Solución

Para un romboicosidodecaedro:

$F = 62$ (30 cuadrados, 20 triángulos y 12 pentágonos); $V = 60$; $E = 120$; por lo tanto

$$F + V - E = 2$$

Capítulo 2

La matemática toca su música

Contenido:

- *Matemática y música*
- *Las escalas musicales y la matemática*
- *La matemática y el sonido*

La música es el placer que experimenta el alma humana al contar sin ser consciente de estar *contando.*

Gottfried Wilhelm Leibniz

Los sonidos, ya sea en forma de ruido o de música, están causados por la vibración de los objetos. Una vez que los objetos —una banda de goma, un pedazo de madera, un alambre o la columna de aire de una flauta— empiezan a vibrar, hacen que también vibren las moléculas de aire circundantes. Estas vibraciones se desplazan desde la fuente en todos los sentidos. Cuando llegan a nuestros tímpanos, estos comienzan a vibrar y envían a nuestro cerebro señales que crean la sensación de audición. Cada instrumento musical tiene un método de crear vibraciones que a su vez causan vibraciones a través del material y la estructura del instrumento. Por ejemplo, cuando se tañe la cuerda de una guitarra, sus vibraciones hacen que las otras cuerdas y el instrumento en su totalidad vibren.

Desde la antigüedad, la matemática ha sido usada para explicar la música. En la actualidad, la digitalización por medio de ordenadores, la cuantización de la música y del sonido, junto con el estudio de la acústica y de la arquitectura acústica están produciendo nuevas sensaciones sonoras.

§. La matemática y la música

¿Acaso la música no puede describirse como la matemática de los sentidos, y la matemática como la música de la razón?

J. J. Sylvester

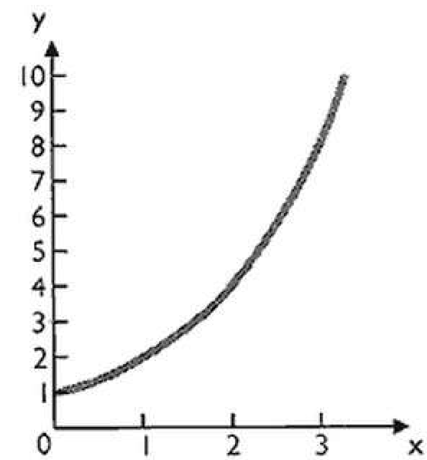
La música y la matemática han estado relacionadas durante siglos. Durante el período medieval, el curriculum educativo agrupaba la aritmética, la geometría, la astronomía y la música. Los ordenadores modernos están perpetuando ese vínculo.

Las partituras son la primera área obvia en la que la matemática revela su influencia sobre la música. En la escritura musical encontramos *tempo* (compás de 4 por 4, de 3 por 4, etc.), pulsos por compás, notas enteras (redondas), medias notas (blancas), cuartos de notas (negras), octavos de notas (corcheas), y así sucesivamente. Escribir música para que entre un número *x* de notas por compás se asemeja al proceso de encontrar un denominador común: las notas de diferente longitud deberán sumar un cierto valor en un cierto tiempo. El compositor crea música que encaja bella y naturalmente en la rígida estructura de una partitura escrita. Cuando se analiza una obra terminada, cada compás tiene el número prescripto de pulsos, al que el compositor llega empleando los diversos valores de las notas.

Además de la obvia relación de la matemática con la partitura musical, la música está vinculada a las proporciones, las curvas exponenciales, las funciones periódicas y la ciencia de los ordenadores.

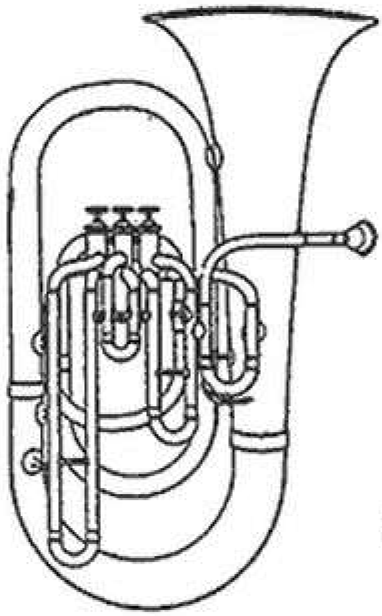
Con respecto a las proporciones, los pitagóricos (545-400 a.C.) fueron los primeros en asociar la música a la matemática. Descubrieron la relación existente entre la armonía musical y los números enteros, advirtiendo que el sonido causado por una cuerda tañida dependía de la longitud de la cuerda. También descubrieron que los sonidos armoniosos eran producidos por cuerdas igualmente tensas cuyas longitudes eran, en números enteros, proporciones... en realidad, cada combinación armoniosa de cuerdas tañida, podía expresarse como proporción de números enteros. Además, aumentando la longitud de la cuerda en proporciones de números enteros se obtenía una escala completa. Por ejemplo, si se empieza por una cuerda que produce la nota do, $^{16}/_{15}$ de la longitud de do nos da si, $^{6}/_{5}$ de do nos da la, $^{4}/_{3}$ de do nos da sol, $^{3}/_{2}$ de do nos da fa, $^{8}/_{5}$ de do nos da mi, $^{16}/_{9}$ de do nos da re y $^{2}/_{1}$ de la longitud de do nos da un do una octava más bajo.

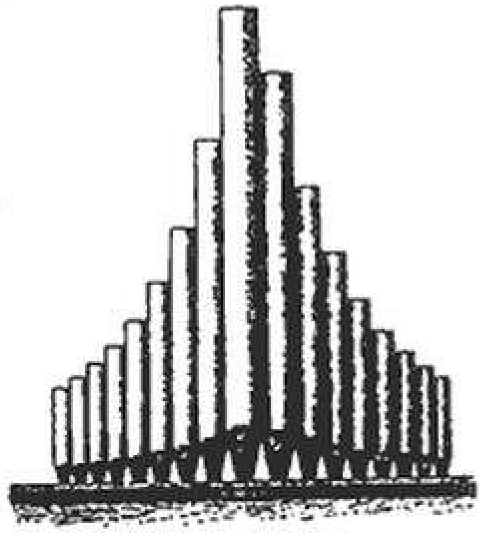
¿Alguna vez se ha preguntado por qué un piano de cola tiene la forma que tiene? En realidad, hay muchos instrumentos cuya forma y estructura están relacionadas con diversos conceptos matemáticos. Esos conceptos son funciones y curvas exponenciales. Con frecuencia se describe una curva exponencial por medio de una ecuación de la forma $y = k^x$, donde k es mayor que 0. Un ejemplo es $y = 2^x$. Su gráfico tiene la forma que aparece en la ilustración.



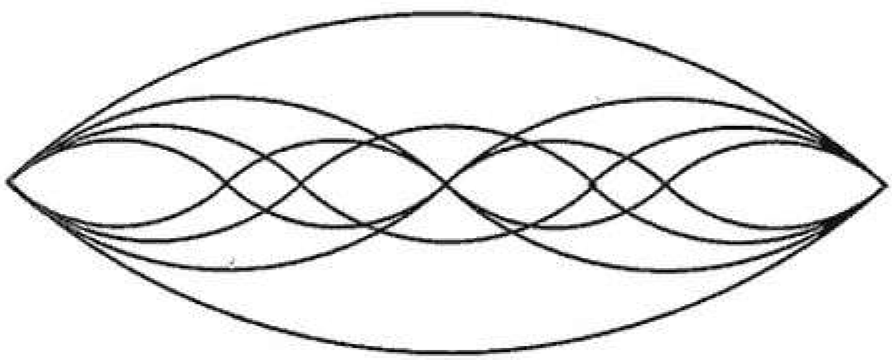
Los instrumentos musicales, ya sean de cuerdas o formados por columnas de aire, tienen estructuras que reflejan la forma de una curva exponencial.

El estudio de la naturaleza del sonido musical llegó a su clímax en el siglo XIX, con el trabajo del matemático Jean Fourier. Fourier demostró que todos los sonidos musicales, ya sean instrumentales o vocales, podían describirse por medio de expresiones matemáticas que eran las sumas de funciones periódicas simples. Cada sonido tiene tres cualidades —tono, intensidad y timbre— que lo distingue de otros sonidos musicales.





El descubrimiento de Fourier hizo que fuera posible representar y diferenciar estas tres propiedades del sonido. El tono o altura está relacionado con la frecuencia de la curva, la intensidad o sonoridad con la amplitud, y el timbre con la forma de la función periódica[11].



El diagrama muestra una cuerda vibrando entera y en secciones. La vibración más larga determina la altura del sonido y las más

[11] Una función periódica es aquella cuya forma se repite a intervalos regulares.

pequeñas producen los armónicos.

Sin una buena comprensión de la matemática de la música, no se hubieran podido emplear ordenadores en la composición musical ni se hubiera podido mejorar el diseño de los instrumentos. Algunos descubrimientos matemáticos, como el de las funciones periódicas, fueron esenciales en el moderno diseño de los instrumentos musicales y de los ordenadores activados mediante la voz. Muchos fabricantes de instrumentos comparan los gráficos periódicos de sonido de sus productos con gráficos ideales de esos mismos instrumentos. La fidelidad de la reproducción musical electrónica también está estrechamente relacionada con los gráficos periódicos. Músicos y matemáticos seguirán desempeñando roles igualmente importantes en la producción y la reproducción de la música.

§. Las escalas musicales y la matemática

La velocidad de la luz c, π, e, φ y el número de Avogadro son ejemplos de constantes de nuestro universo. Son números que desempeñan roles vitales en ecuaciones y fórmulas que definen a diversos objetos de nuestro mundo... ya sean geométricos, físicos, químicos o comerciales. Entre estas famosas constantes, el concepto de una octava debe ser incluido como una constante de naturaleza especial. La octava desempeña una parte de vital importancia en el mundo de la música. Establece la unidad o distancia de una escala. Del mismo modo que la proporción entre la circunferencia del círculo y su diámetro siempre es la constante π, la proporción del número de vibraciones entre dos cuerdas tañidas, una del doble de la longitud de la otra, es ½. Es decir, la cuerda más corta vibra el doble de veces por segundo que la cuerda original. Estas notas tienen el mismo sonido, y constituyen la longitud de una octava[12]. El número de notas o subdivisiones de una octava es arbitrario, y sufre la influencia de una cantidad de factores. Consideremos estos factores. Los sonidos o las notas forman una escala. Cada uno de ellos tiene una frecuencia particular[13]. Como ya dijimos, dos notas están separadas por una octava si la frecuencia de una es el doble de la de la otra[14]. El oído entrenado puede percibir alrededor de 300 sonidos diferentes o notas en una octava. Pero producir una escala con todas esas notas sería ridículo ya que los instrumentos tradicionales no pueden producirlas. Por ejemplo, si hubiera 300 notas en una octava, un piano de ocho octavas tendría que tener 2400 teclas blancas. ¿Se imagina usted a un pianista corriendo de un lado a otro para poder tocar en un teclado tan largo? De ese modo, el

[12] El término octava proviene del hecho de que la escala diatónica tiene siete notas diferentes desde el do hasta el si. El do más agudo es la octava nota.

[13] La frecuencia es el número de vibraciones por segundo. Hay una correspondencia uno a uno entre sonidos y números (su frecuencia), aunque nuestros oídos no están diseñados para percibir todos los distintos sonidos posibles.

[14] Una cuerda sujeta en sus extremos produce una cierta nota: por ejemplo, un do con 264 vibraciones por segundo. Si se sujeta la cuerda a mitad de su longitud, se obtiene la octava, que vibra a 528 vibraciones por segundo.

número de posibilidades está limitado por la fisiología de nuestro oído y por la capacidad de nuestros instrumentos. ¿De entre los 300 sonidos discernibles, cuáles y cómo fueron seleccionados los usados en una escala? Seleccionar las notas de una escala es una tarea análoga a la de seleccionar un sistema de numeración. ¿Qué base debe emplearse y qué símbolos deben usarse para representar los números? En el caso de la escala, es necesario seleccionar la longitud de la cuerda de una octava y determinar el número de subdivisiones (las notas que comprende la escala). Al igual que en el caso de los sistemas numéricos, encontramos que las escalas evolucionaron de manera diferente en las diversas civilizaciones.

Ecuaciones musicales. Esta ilustración muestra las relaciones existentes entre la redonda (una unidad), la blanca (media unidad), la negra (cuarto de unidad), la corchea (octavo de unidad) y la semicorchea (dieciseisavo de unidad). Una nota con puntillo es una manera de expresar las fracciones, porque siempre es igual a una vez y media su valor. Existen, además, símbolos para los silencios:

en la ilustración se muestran el silencio de blanca y el de corchea.

Los antiguos griegos usaron letras de su alfabeto para representar las siete notas de su escala. Estas notas estaban agrupadas en tetracordios (cuatro notas), que eran situados en grupos llamados modos. Los modos fueron precursores de las modernas escalas mayores y menores de Occidente. Los chinos usaban una escala pentatónica (de cinco notas). En la India, la música era —y es— improvisada dentro de los límites específicos definidos por las *ragas.* Esta octava está dividida en 66 intervalos llamados *srutis,* a pesar de que en la práctica sólo hay 22 srutis, a partir de los cuales se forman dos escalas básicas de siete notas. La escala persa dividía la escala en 17 o en 22 notas.

Un fresco que representa a músicos, procedente de la tumba de Djeserkara, en Tebas.

Vemos entonces que, aunque la octava era una constante determinada, a partir de ella evolucionaron diferentes sistemas musicales. Por añadidura, los instrumentos musicales de una cultura no pueden necesariamente ser usados para interpretar la música de otra cultura.

Se han hallado restos arqueológicos de instrumentos, recipientes, estatuas y frescos que representan a músicos vocales e instrumentales. Hay muchos ejemplos antiguos de música escrita: unas tabletas de arcilla sumerias encontradas en Irak parecen revelar una escala de ocho notas (alrededor de 1800 a.C.); fragmentos escritos sobre piedra y papiros provenientes de la antigua Grecia; libros de texto (alrededor de 100 d.C.) y un manuscrito con notas representadas mediante letras (alrededor de 300 d.C.), también griegos, y el manuscrito de un canto arábigo-musulmán de la España del siglo VIII.

Músico en un vaso griego de alrededor de 400 a.C.

Durante el siglo VI a.C., Pitágoras y los pitagóricos fueron los primeros en asociar la música con la matemática. Los pitagóricos creían que los números, de alguna manera, gobernaban a todas las cosas. Podemos imaginamos su deleite cuando descubrieron la octava de una nota, la periodicidad de las notas, y la proporción entre las notas de un instrumento de cuerdas. Por añadidura, creían que los cuerpos celestes producían sonidos y que cada planeta tenía su propia música. Esta idea llegó a ser conocida como “la música de las esferas”. Kepler, que descubrió varias de las leyes del movimiento de los planetas, creía en este concepto, y de hecho escribió música para cada uno de los planetas conocidos. En la actualidad, los astrónomos han recibido señales de radio transportadas por los vientos solares. Estos sonidos, que incluyen silbidos, siseos, gemidos, cuando son sintetizados a velocidad aumentada, se vuelven más melodiosos. Los científicos también han observado oscilaciones del sol que, supuestamente, producen vibraciones de diversos períodos.

¿Las escalas musicales son necesarias para producir música? Si lo fueran, ¿cómo harían los pájaros para cantar? Sin embargo, casi todas las versiones de una historia o de una melodía musical cambian ligeramente con la comunicación oral. Para que una composición pueda ejecutarse, las escalas son esenciales: son el lenguaje escrito de la música, del mismo modo que las ecuaciones y los símbolos son el lenguaje escrito de la matemática.

§. La matemática y el sonido

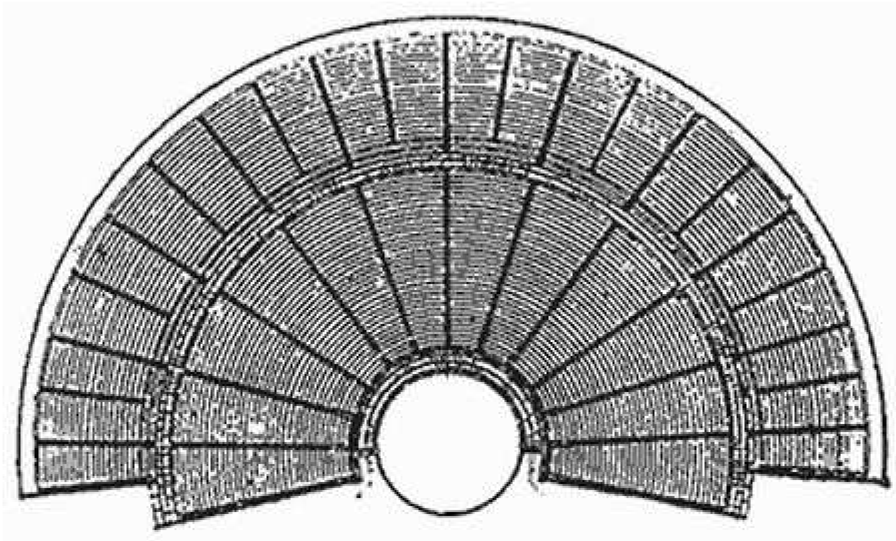
Las ideas matemáticas han ejercido influencia sobre la música y las ondas sonoras durante siglos. Una caminata en el interior de la cúpula de la catedral de San Pedro, en Roma, convencerá a cualquiera de que la curvatura de las paredes de la cúpula transmite su susurro a otra persona situada en el lado opuesto. Si se asiste a una tragedia griega en el antiguo anfiteatro de Epidauro se advierte que sus diseñadores deben haber estudiado y experimentado con la matemática de la acústica antes de diseñar y construir este fenomenal teatro al aire libre.

La catedral de San Pedro, en el Vaticano

Un espectador sentado en la última fila puede oír fácilmente a un actor que dejara caer un alfiler en el centro del escenario. Se han empleado formas matemáticas específicas para diseñar los reflectores de sonidos que penden del techo de la sala de conferencias situada en el edificio del Capitolio de los Estados Unidos.

Esas formas reflejan las conversaciones de individuos situados en puntos focales de las parábolas: dos individuos pueden mantener una conversación normal desde los dos puntos focales, ajenos al nivel de ruido reinante en la sala.

En el caso de dos parábolas situadas tal como se ve en la ilustración, el sonido originado en un punto focal rebota en el cielorraso parabólico y se desplaza en forma paralela hasta el cielorraso opuesto, donde rebota hacia el otro punto focal.

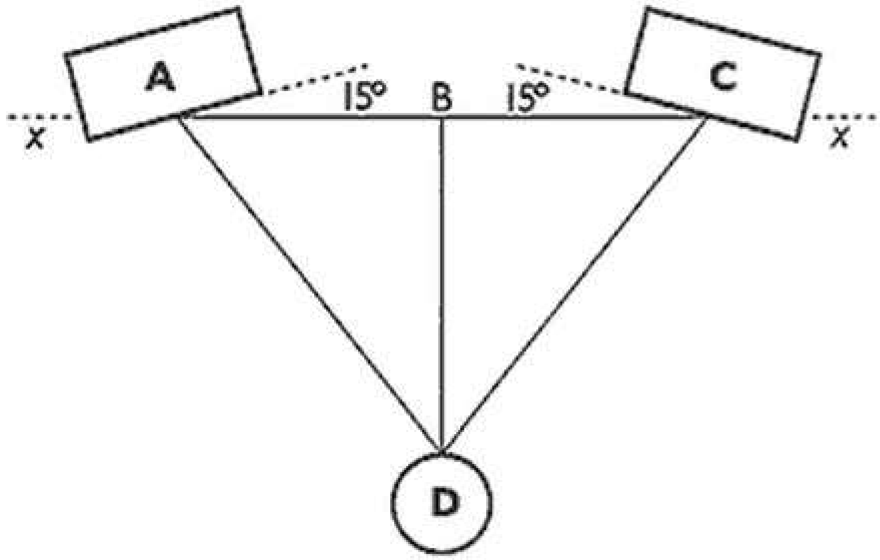


El diagrama de arriba es un esquema del antiguo anfiteatro de Epidauro, Grecia. La fotografía de abajo es el anfiteatro en la actualidad. Tanto el diseño como la localización favorecen la acústica.

Como vemos, el hecho de encontrar puntos ideales para emitir y recibir sonidos no es una cuestión de azar. La acústica y el sonido están directamente relacionados con ideas y objetos matemáticos. En el siglo XIX, el matemático Jean Fourier demostró que las ondas sonoras eran simples funciones periódicas, y que el tono, la intensidad y el timbre del sonido estaban relacionados respectivamente con la frecuencia, la amplitud y la forma de las funciones sinusoides.

Más recientemente, Danny Lowe y John Lees, matemáticos e ingenieros acústicos, han inventado el QSound. El QSound produce sonidos multidimensionales. A diferencia del sonido estéreo, que produce diferentes sonidos procedentes de diferentes parlantes, el QSound llega a nosotros desde todas las direcciones. Literalmente escuchamos el sonido en tres dimensiones. Para escuchar una cassette o CD que ha sido registrado con QSound no se requiere más equipo que un estéreo.[15] Con una grabación así, sólo hay que situarse y situar los parlantes de la manera ilustrada en el diagrama, y dejar que la matemática del sonido haga todo lo demás.

[15] *La inmaculada colección*, de Madonna, y *The Soul Cages*, de Sting, fueron los primeros álbumes en Qsound. Desde entonces han aparecido, o están a punto de hacerlo, álbumes de Janet Jackson, Paula Abdul, Bon Jovi, Europe, Richie Zambora, Stevie Nicks, Julián Lennon, Freddie Jackson, y Wilson Phillips, entre otros.



Los puntos A y C marcan la ubicación de los parlantes. El punto D es la ubicación del oyente. B es el punto medio del segmento AC. La distancia BD debe ser mayor o igual que la distancia AB. x es la distancia de los parlantes a las paredes... un mínimo de 1 metro.

Capítulo 3

La revolución de los ordenadores

El ordenador, el instrumento creativo del siglo XXI

Contenido:

Errar es humano, pero para arruinar verdaderamente las cosas hace falta un ordenador.

Anónimo

Estemos preparados o no, nos guste o no nos guste, el ordenador es el instrumento del siglo XXI. El ordenador ejerce influencia sobre todas las facetas de nuestras vidas, tanto en sentido positivo como negativo. Ha acelerado la producción de cambios. Para los escritores de hoy, el ordenador es el lápiz, la pluma o la máquina de escribir. Para el contador o el empleado bancario es la calculadora. Para el artista es el pincel y la paleta, para el científico es el laboratorio, para el arquitecto es el tablero de dibujo, para el ingeniero es el instrumento de diseño, para el profesor es su herramienta de investigación, para el bibliotecario es el catálogo y las fichas de referencia, para el matemático es una calculadora/ordenador increíblemente rápida y precisa. Sin embargo, cuando las cosas no marchan exactamente como se las había planeado, el ordenador se convierte en el chivo expiatorio, y nos dicen cosas como “perdió su archivo”, “se cayó el sistema”, “parece haber un virus”. No obstante, como ha afectado casi todos los aspectos de nuestra vida diaria, ahora dependemos del ordenador.

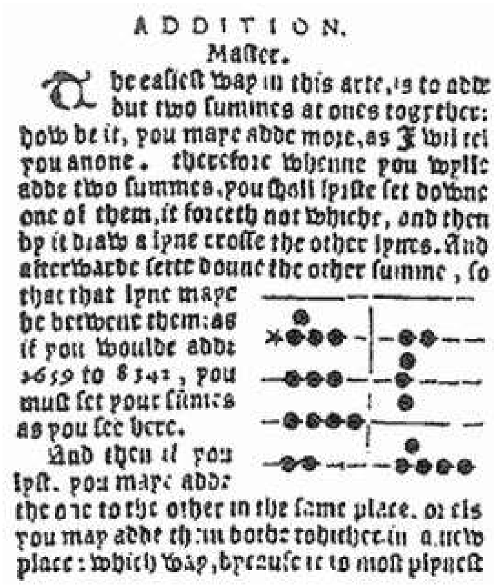
Algunos lenguajes desarrollados para comunicarse con los ordenadores.

§. Una mirada al pasado: Calculadoras obsoletas

- Los diez dígitos de nuestras manos fueron nuestro primer instrumento para contar.
- Los chinos idearon una caja con divisiones para usar con sus numerales varitas. Esta caja era usada para escribir sistemas de ecuaciones.
- El ábaco fue usado para realizar cálculos por muchas culturas, incluyendo a los chinos, los griegos, los romanos y los japoneses.
- Los incas usaron los nudos del quipu como instrumento para llevar cuentas.
- Las varitas de Napier fueron inventadas por John Napier en el

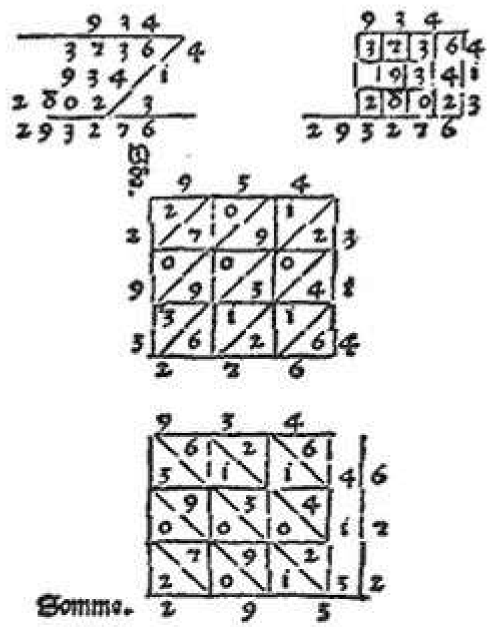
siglo XVII para ayudar al proceso de cómputo.

- La regla de cálculo fue inventada alrededor de 1620 por Edmound Gunter.
- La primera máquina sumadora fue inventada por Blaise Pascal en 1642. Y en 1673, Gottfried Wilhelm von Leibniz inventó una máquina que también podía multiplicar y dividir.
- A principios del siglo XIX, los diseños y trabajos de John Babbage en la máquina diferencial y analítica proporcionaron la base para el ordenador moderno.


ADDITION.
Master.
The easiest way in this arte, is to adde but two summes at ones togyther: how be it, you maye adde more, as I wil tel you anone. therefore whenne you wylle adde two summes, you shall fyrste set downe one of them, it forceth not whiche, and then by it draw a lyne crosse the other lynes. And afterwarde sette doune the other summe, so that that lyne maye be betwene them: as if you woulde adde 2659 to 8342, you must set your summes as you see here.
And then if you lyst, you maye adde the one to the other in the same place, or els you may adde them bothe togither in a new place: which way, bycause it is most playnest

Esta ilustración es una reproducción del antiguo libro de aritmética inglés *The Grounde of Artes,* de Robert Recorde. Además de las líneas que representan los 0, 10, 100, etc., los lugares entre estas líneas también se usaban para representar los 5, 50, 500 según los números romanos. La “x” sobre la línea fue inicialmente usada para marcar la línea de los 1000, pero más tarde fue usada para indicar el punto que separa los millares al escribir números tales como

23.650. Cuando se acumulaban cinco contadores en una línea, se los quitaba y se *llevaba* un contador al espacio superior. De allí el posible origen de la expresión "llevarse". Además de escribir este libro, Robert Recorde (aproximadamente 1510-1558), introdujo el símbolo "=" para representar igualdad, y escribió un importante texto de álgebra llamado *The Whetstone of Witte* y otro de geometría, *Pathway* to *Knowledge.*

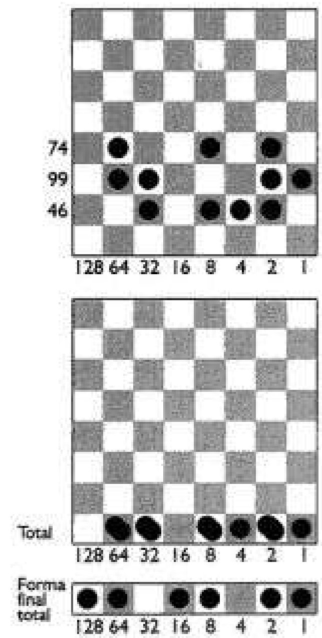


Estas tablas pertenecen a un libro impreso en 1478 en Treviso, Italia. Muestran cuatro métodos para multiplicar 934×314.

§. La calculadora tablero de ajedrez de Napier

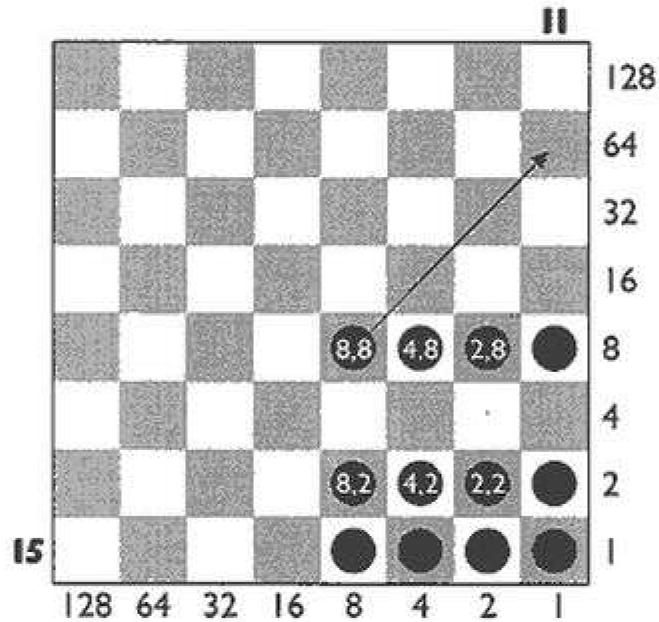
El sistema binario (de base dos) que usa sólo ceros y unos para representar los números, tiene la clave de comunicación con los ordenadores electrónicos, ya que 0 y 1 podrían indicar las posiciones "apagado" y "encendido" de la electricidad.

El famoso matemático escocés John Napier (1550- 1617) utilizó el concepto de base dos antes del advenimiento de la electricidad. Napier es famoso por haber revolucionado los cálculos gracias a su invención de los logaritmos. Uno de sus inventos, conocido como varitas o huesos de Napier, estaba basado en los logaritmos y era usado por los comerciantes para realizar multiplicaciones y divisiones, aunque también podía emplearse para hallar raíces cuadradas y cúbicas. Menos conocido es su método de calcular usando un tablero de ajedrez. Aunque no empleó la notación binaria para escribir los números, el tablero ilustra la manera en que el matemático expresaba los números con base dos. Por ejemplo, para sumar 74+99+46, cada número se escribe en una fila del tablero de ajedrez, colocando marcadores en los cuadrados apropiados de la fila de tal modo que la suma de los valores de los marcadores (indicados a lo largo de la fila inferior) totalice el número que representan. Por ejemplo, el 74 tiene marcadores en el 64, el 8 y el 2, ya que 64+8+2 = 74. Después de que cada número ha sido expresado de esta manera, los números se suman juntando los marcadores de una misma columna en la casilla correspondiente de la fila inferior. Dos marcadores que compartan la misma casilla equivalen a un solo marcador colocado inmediatamente a su izquierda. Así, dos marcadores "2" producen un marcador "4". Trabajando de derecha a izquierda, los marcadores que comparten el mismo cuadrado son quitados y reemplazados por un marcador

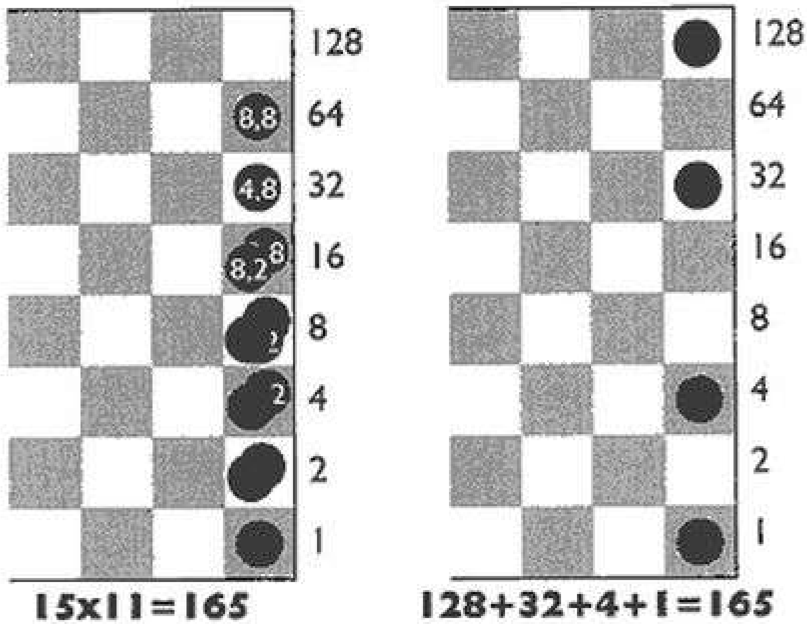


colocado en el cuadrado vecino de la izquierda. Al finalizar este proceso, ningún cuadrado tendrá más de un marcador. La suma de los valores de los marcadores restantes representa la suma de los números.

Para multiplicar usando el calculador de tablero de ajedrez de Napier, los multiplicandos se anotan a lo largo de la fila inferior y de la columna de la derecha.



Supongamos que queremos multiplicar 15×11. El 15 se anota con marcadores colocados en la fila inferior, y el 11 con marcadores colocados en la columna vertical de la derecha. Luego, un nuevo marcador se coloca en la casilla donde se intersecan una fila y una columna que tienen marcadores. Después, el proceso de multiplicación se continúa simplemente deslizando en diagonal los marcadores de las filas hasta la columna de la derecha. Como en el caso de la suma, siempre que dos marcadores ocupan la misma casilla, se los quita y se coloca uno en la casilla superior. La columna resultante representará el producto de 15×11.



§. Una mirada al presente: Los ordenadores están en nuestros árboles

Es indigno de hombres excelentes perder horas como esclavos en el trabajo de cálculos que sin duda podría delegarse a otro si se usaran máquinas.

Gottfried Wilhelm von Leibniz

"Soy un dinosaurio". "No quiero tener nada que ver con ellas". "No entiendo cómo una persona puede pasar tanto tiempo delante de un ordenador". "Son muy impersonales". "Soy analfabeto con los ordenadores". ¿Cuántas veces usted ha escuchado o hasta pronunciado alguna de estas afirmaciones? Pero es necesario aceptar, independientemente de lo que puedan sentir algunas personas, que los ordenadores han llegado para quedarse. Han hecho nuestra vida más fácil en algunos sentidos, la han complicado en otros, y han invadido nuestra privacidad. En realidad, resulta difícil imaginar la época en que los ordenadores no existían. ¡Ahora los ordenadores están hasta en nuestros árboles!

El crecimiento de los árboles puede esquematizarse empleando redes matemáticas o puede representarse por medio de fractales. Los ordenadores pueden usarse para modelar incendios forestales, y a partir de allí para desarrollar métodos de extinción o para crear incendios controlados. Por añadidura, actualmente los ordenadores se usan extensamente para preservar bosques urbanos. Muchas ciudades, en un esfuerzo destinado a preservar y mantener la salud de sus árboles, recurren a los ordenadores. Washington D.C. tiene una base de datos de alrededor de 109.000 árboles de la calle, en tanto París, Francia, tiene registrados 100.000 árboles en sus ordenadores. ¿Qué clase de información se ingresa? Usualmente, cada ciudad decide cuáles datos son esenciales para su situación particular. La base de datos de París incluye: la locación del árbol (cada árbol es numerado consecutivamente en una calle, y se registra su distancia de los edificios, su posición en la acera y la distancia que lo separa de los árboles adyacentes), sus estadísticas vitales (especie, sexo, edad, tamaño del tronco, altura), tipo de poda recibida, estadísticas ambientales (incluye tipo de suelo, dimensiones del plantero, riego, drenaje), la salud del árbol (enfermedades detectadas, status), polución ambiental y sus efectos.

El registro inicial de esa información lleva mucho tiempo, como también lo lleva la tarea de mantener los registros actualizados. Como los árboles son un invalorable bien de la comunidad, tanto en el aspecto estético como ambiental, el tiempo invertido y los resultados a largo plazo hacen que las bases de datos valgan la pena. En San Francisco, California, los jardineros municipales mantienen el inventario de los árboles de la ciudad empleando ordenadores portátiles. París siguió el método usado en Washington D.C., en donde el inventario inicial fue realizado por ingenieros agrónomos recién graduados, usando también ordenadores portátiles.

Sin ordenadores, esas bases de datos tan sofisticadas no hubieran sido posibles. El espacio necesario para acumular esos datos hubiera sido enorme, por no hablar de la necesidad de actualizar, buscar y seleccionar los datos.

A medida que el ordenador evolucionó, sus funciones lentamente invadieron diferentes aspectos de nuestras vidas. Hoy nos encontramos en el mismo punto que los primeros comerciantes y navegantes, cuando se preguntaban cómo habían podido desempeñarse sin un juego de varitas de Napier, o como los escribas incas cuando se preguntaban cómo habían podido hacer un inventario de la población y de los productos del imperio careciendo del quipu.

Como vemos en el caso de la forestación urbana, los ordenadores desempeñan un papel fundamental en la acumulación, procesamiento y selección de datos. En la actualidad, los equipos de recepción de datos son usados por los restaurantes para procesar los pedidos y los comercios y empresas emplean el código de barras para sus ventas, sus inventarios y sus seguimientos.

Código de barras para etiquetar o mantener registro de cosas tales como árboles, libros o productos alimentarios y envasados.

Los ordenadores son invalorables en las ciencias para analizar, comparar y computar información, ahorrando muchísimo tiempo, y haciéndolo con menos errores. La influencia futura que esta herramienta ejercerá sobre la civilización será tan grande como el impacto que ejerció la bombilla eléctrica.

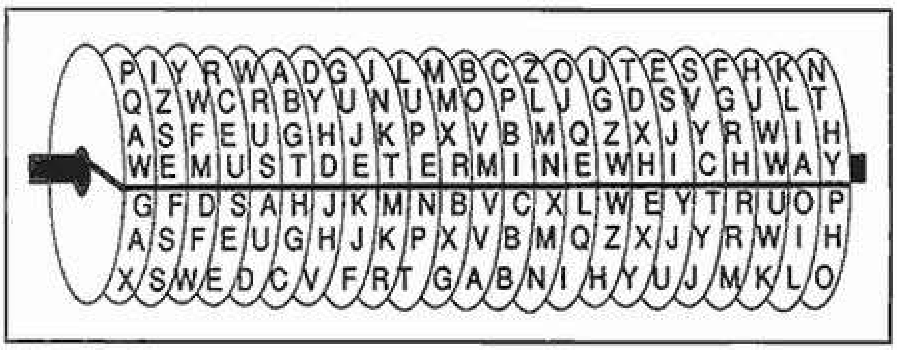
§. La matemática se convierte en detective

Las ondículas matemáticas son una nueva técnica, un nuevo instrumento empleado en los Estados Unidos para combatir el crimen. Los matemáticos han desarrollado el análisis por medio de ondículas para procesar imágenes de manera más rápida y precisa. Este método divide una imagen en sus componentes básicos. Después aísla la información importante y de

relevancia, necesaria para reconstruir la imagen, y descarta toda la información no esencial. En consecuencia, las ondículas reducen la cantidad de datos necesarios para archivar, transmitir y recomponer la imagen, con lo que se ahorra tiempo y dinero. Por añadidura, las ondículas no distorsionan la imagen, como ocurre con otros métodos para almacenar imágenes comprimidas. Esto permite al FBI una mayor eficiencia para identificar y comparar las imágenes de impresiones digitales de las personas.

§.¿Cuál es mi secreto?

Los gobiernos, los revolucionarios y los financistas siempre han tenido la necesidad de enviar y recibir secretos. En el transcurso de los siglos se han ideado muchos métodos para codificar y decodificar mensajes. Entre ellos se cuentan el cilindro espartano,[16] la cifra cuadrada de Polibio,[17] la sustitución de letras de Julio César, la rueda de cifras de Thomas Jefferson y el código militar alemán conocido como Enigma. También hay muchos ejemplos en la literatura en los que la criptografía es un elemento importante de la trama, como en *El escarabajo de oro* de Poe, *La jangada* de Veme, o *La aventura de los bailarines* de Conan Doyle.



Una parte de la rueda cifrada de Thomas Jefferson. Fue hecha con 36 ruedas de madera de la misma dimensión. Cada rueda tenía las letras del alfabeto impresas en diversas disposiciones. Un mensaje se alineaba a lo largo del eje horizontal de metal. Luego el que lo enviaba escribía las letras de cualquier otra línea horizontal, y lo despachaba. El receptor alineaba esas letras sin sentido sobre el eje horizontal, y buscaba en el cilindro hasta encontrar una línea de letras que tuviera sentido.

Durante los últimos 20 años, bancos, agencias gubernamentales y

[16] Plutarco describe cómo se intercambiaban mensajes arrollando en espiral una estrecha banda de pergamino o cuero alrededor de una vara cilíndrica. Luego se escribía el mensaje, se quitaba la banda y se la enviaba a un receptor que tenía un cilindro de exactamente el mismo diámetro, alrededor del cual se la volvía a enrollar.

[17] El griego Polibio (alrededor de 200-118 a.C.) diseñó un cifrado por sustitución basado en un cuadrado de 5×5, que convertía cada letra del alfabeto en un número de dos dígitos usando sólo los números del 1 al 5.

compañías privadas han usado la fórmula de codificación DES para transmitir información de seguridad. Este método emplea 56 bits de datos, que teóricamente llevaría 200 años decodificar usando un súper-ordenador. Las agencias de inteligencia y policiales temen que los métodos actuales no sean adecuados y que nos les permitan interceptar comunicaciones de criminales, terroristas y gobiernos extranjeros. En consecuencia, se ha propuesto un sistema con una nueva fórmula que emplea 80 bits, y que teóricamente llevaría más de un millón de años decodificar. Este nuevo enfoque emplea un microchip especial que sería insertado en teléfonos, satélites, máquinas de fax, módems, etc., para codificar comunicaciones secretas. El chip emplearía fórmulas matemáticas clasificadas secretas, ideadas por la National Security Agency. Por añadidura, las claves matemáticas de decodificación de los datos codificados serían guardadas por el FBI y otras agencias designadas por el Fiscal General de los Estados Unidos. El proceso de fabricación del chip hace que sea *casi* imposible desarmarlo y decodificarlo. Hay personas, como Mitchell Kapor, de la Electronic Frontier Foundation (un grupo político de Washington D.C.), que opinan que: “Un sistema basado en tecnología secreta nunca ganará la confianza del público norteamericano”.[18]

```
×919 +93?9 2# &¿9¡ 9605# 4%2 32 ×2 $23$2 #9 38##9
$2# $890#5. 2¡ #9 32/?869 ¿969 $2# #9$5 23?2 ÷91
%¡9 !9#9×2¿9. $272 !92¿ %¡ /235 !%9#4%82¿9
3%3/2¡$8$5 $2 %¡ +8#5 9 ?¿9×23 $2# 575 8*4%82¿$5
$2# !¿9¡25. 9##8 23?9 2# ?235¿5.
```

[18] *Secret Phone Scheme Under Firt*, por Don Clark, San Francisco Chronicle, Mayo, 1993.

El mensaje cifrado por sustitución en *El escarabajo de oro,* de Edgar Allan Poe.

La traducción es: Vaya *hasta el gran árbol que se ve desde la silla del diablo. En la séptima rama del lado este hay una calavera. Deje caer un peso cualquiera suspendido de un hilo a través del ojo izquierdo del cráneo. Allí está el tesoro.*

§. Recogiendo primos

Uno de los primeros métodos de descubrir números primos fue ideado por el matemático griego Eratóstenes (275-194 a.C.), quien creó un cedazo numérico que eliminaba los múltiplos de los números hasta algún número determinado. Desde entonces, los matemáticos han estado inventando nuevos medios para descubrir e identificar números primos.

En 1640, Pierre de Fermat afirmó que todos los números de la forma $F_n = 2^{2n}+2$ (para n = 0, 1, 2, 3, ...) eran primos. Esto es cierto para el caso de los primeros cinco números de Fermat (para n = 0, 1, 2, 3 y 4). Pero en el siglo siguiente Leonhard Euler descompuso el sexto número de Fermat (F_5) como 641×6.700.417. Después, en 1680, el número de Fermat F_6 fue descompuesto en primos como 274.177×67.280.421.310.721. En la actualidad, no se ha encontrado ningún otro que sea primo, y en 1993 fue demostrado que el vigesimosegundo número de Fermat (F_{22}) era compuesto.[19] En 1644, el monje francés Marín Mersenne escribió una expresión (2^p–

[19] *Projects in Scientific Computation,* por Richard E. Crandall, Spinger Verlag, Santa Clara, CA, 1994.

1, siendo *p* un número primo) que daría como resultado primos. Pero no *todos* los números producidos por esta expresión son primos. En la actualidad se conocen 33 primos de Mersenne. Trabajando con expresiones (tales como las usadas para los números de Mersenne, los de Fermat, los de Carmichael, y otros), teoría numérica y técnicas de programación de ordenadores, los matemáticos, utilizando súper-ordenadores o redes de ordenadores personales especialmente preparados buscan números primos cada vez más grandes, mientras investigan características o pautas más estables.

¿Por qué tanto interés por los primos?

Por:

- curiosidad matemática
- establecer nuevos registros
- probar la eficiencia y el hardware de los nuevos ordenadores
- usar números primos para formar números de muchos dígitos destinados a la codificación de material confidencial.

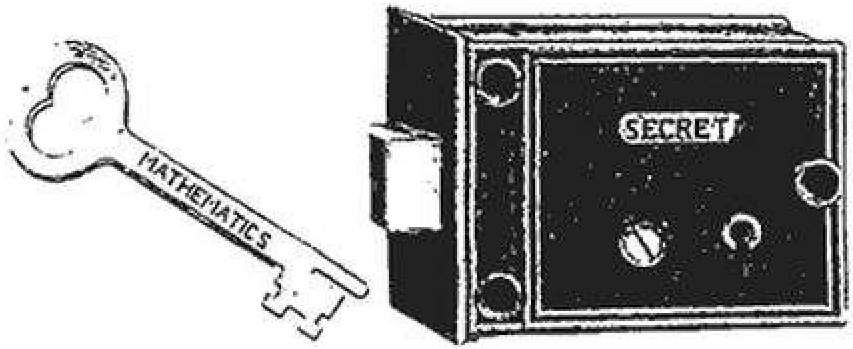
Los ordenadores actuales, ayudadas por una programación ingeniosa para resolver problemas han hecho posible descubrir números primos literalmente enormes. ¿Cuál es el más grande primo explícito hasta el momento? $2^{859.233}–1$.[20]

§. Criptografía, anarquía, ciberpunks y remailers

¿Nunca se preguntó con irritación por qué recibe tanta cosa inútil

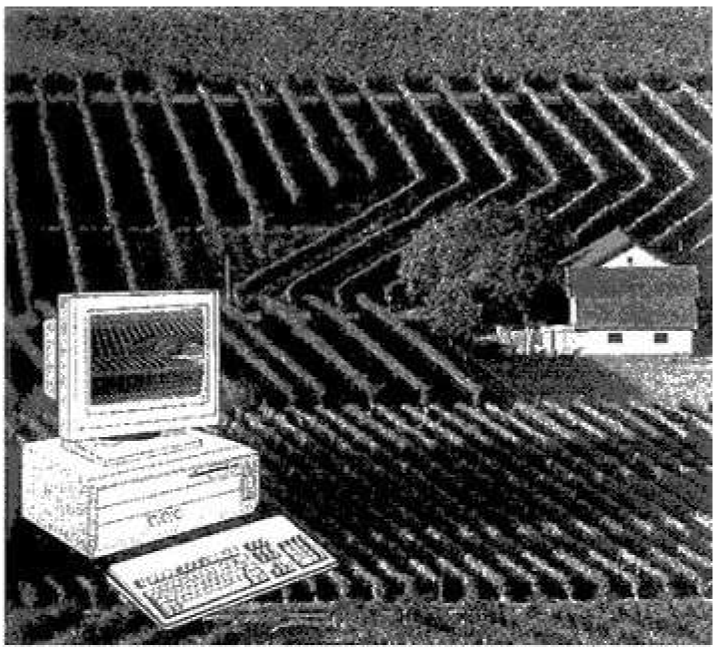
[20] Hallado por David Slowinski en 1993. Verificado, a pedido suyo, por Richard Crandall.

por correo... catálogos que nunca pidió, ofertas de “súper” compras?



¿Cómo accedieron a su nombre y dirección? Bienvenido a la era de la electrónica y de la pérdida de privacidad. Existe un registro considerable de datos electrónicos acerca de la mayoría de los individuos, registro al que puede acceder un usuario de ordenador / modem para crear un perfil de usted basado en las cosas que ha comprado, sus pasajes para viajar, sus registros médicos, sus infracciones de tránsito, préstamos importantes, etc. Aunque esta pérdida de privacidad fue creada por los métodos tecnológicos actuales para acumular información y acceder a ella, tal vez exista la manera de recuperar esa privacidad por medio de los mismos métodos. Los ciberpunks, como se llaman a sí mismos, han acudido al rescate. Defienden la privacidad del individuo, y usan sofisticados métodos de criptografía para codificar la información, obstaculizando así un acceso fácil a ella. Naturalmente, esta anarquía criptográfica tiene sus pros y sus contras. Algunas personas creen que los organismos del gobierno tienen derecho a espiar, y que los nuevos métodos de los ciberpunks obstaculizan esa función. El *remailer* es un ejemplo de los nuevos métodos desarrollados empleando criptografía avanzada: permite enviar información vía modem sin dejar ninguna “huella” que permita rastrear al que la envía. Muchas personas creen que si los gobiernos pueden usar métodos y recursos para codificar información importante, los individuos también tiene derecho a usar métodos similares para defender su vida privada.

§. Ordenadores, irrigación y conservación del agua

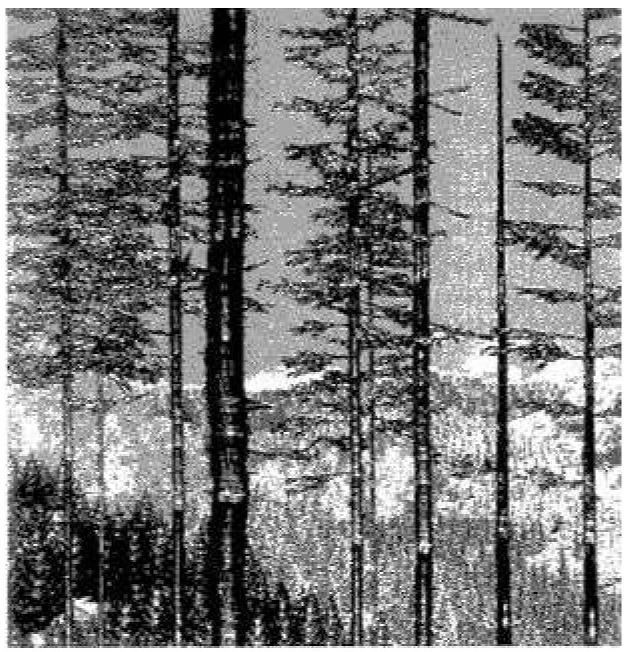


Resulta extraño ver plantaciones exuberantes que crecen en tierras secas, a veces agrietadas. Pero ahora, con el uso de la irrigación de goteo sub-superficial por ordenador, es posible enviar a las raíces agua, fertilizantes y ocasionalmente pesticidas. Con la aplicación de este tipo de irrigación, el viñatero Lee Simpson, de Fresno, California, ha reducido a la mitad su consumo de agua y ha duplicado la productividad de sus tierras, reduciendo además a la sexta parte el empleo de plaguicidas. Un proyecto de prueba del Departamento de Recursos Hídricos de California, realizado en un campo algodonero de 65 hectáreas de Harris Farms, también en Fresno, produjo 295 kilos de algodón por hectárea, 170 kilos más por hectárea que los años anteriores, y empleó 7 centímetros menos de agua por hectárea. Claude Phené fue el promotor de este “nuevo” tipo de cultivo (la irrigación por goteo ha existido desde hace más de 20 años). Durante años, Phené defendió la conservación de agua y la mejora de las cosechas que este método producía pero recién en 1987 algunos granjeros le prestaron atención. Phené probó sus métodos en la cosecha de tomate en California. Tierras que antes producían 10 toneladas por hectárea, ahora producían 40 toneladas. Phené señala que no tiene sentido inundar de agua una habitación para regar una planta en maceta. Sus estadísticas afirman que la agricultura de California emplea el 85% del abastecimiento de agua estatal, y que si la irrigación por goteo mediante ordenador[21] se empleara tan sólo en una cosecha —por ejemplo, la de algodón—, los 15 centímetros de agua ahorrados en cada una de las 567.000 hectáreas serían suficientes para abastecer de agua a Los Ángeles. El método también reduce el empleo de herbicidas, ya que las malezas no crecen tanto debido a que las plantas son regadas desde la raíz, no inundadas. Por añadidura, las cantidades de fertilizantes y plaguicidas empleadas también se reducirían a menos de la mitad. Las técnicas por ordenador también

[21] Los cultivos se irrigan mediante cañerías subterráneas ubicadas 45 cm. bajo la superficie. Sensores muy precisos detectan el rocío matinal, miden la cantidad de agua que las plantas absorben y emiten y miden las condiciones meteorológicas en la superficie. A lo largo del día el ordenador recoge y analiza los datos y envía pequeñas cantidades de agua y, ocasionalmente, fertilizantes, herbicidas y plaguicidas. Sin necesidad de poseer un ordenador, los pequeños productores pueden vigilar sus campos vía modem conectándose al sistema centralizado local.

permitieron que Phené descubriera la interacción entre los diferentes nutrientes, el momento adecuado para aplicarlos y sus efectos en el rendimiento de la cosecha, la cantidad óptima de fertilizante para mejorar la calidad de las plantas, y numerosos factores más, desde la textura del suelo hasta las características de las raíces.

§. Los ordenadores combaten los incendios forestales



En la actualidad, los modelos por ordenador son una herramienta muy poderosa, que los científicos y profesionales usan en un amplio espectro de disciplinas. Los economistas pueden usarlos para predecir ciclos económicos, los médicos para monitorear y predecir la difusión de una enfermedad contagiosa o, junto con la teoría del caos, para predecir arritmias cardíacas. Los sociólogos los han empleado, junto con las estadísticas, para observar una tendencia social. La lista resulta prácticamente interminable.

Hasta hace poco tiempo, las armas para combatir el fuego eran las ropas protectoras, hachas, picos, cuerdas, sierras, mantas anti-inflamables, agua, productos químicos. En la actualidad, el equipo de los que combaten los incendios también incluye ordenadores portátiles, y hasta un laboratorio de campaña en medio del bosque, con ordenadores personales. Además de mantener control de las personas y los suministros, los ordenadores también se utilizan para el análisis de los incendios forestales.

En 1984, mientras trabajaba para el Laboratorio de Incendios del Servicio Forestal de los Estados Unidos, la matemática Patricia Andrews desarrolló el programa *Behave.* La localización del fuego, la topografía de la zona, las condiciones climáticas (velocidad del viento y dirección, sequedad, etc.), los tipos de árboles o arbustos inflamables y mucha información más se ingresa a los ordenadores. El programa luego predice cuál es la mejor manera de combatir el incendio. Naturalmente, el programa no puede predecir todas las consecuencias posibles, pero Behave puede ser modificado constantemente para incluir más situaciones a medida que éstas se producen, como en el caso de los “fuegos coronados” de Yellowstone, donde las llamas se extienden en la parte superior de las copas de los árboles. *Effects* es un programa compañero del anterior que se usa para ayudar a las autoridades forestales a tomar decisiones sobre los incendios controlados. Estas armas de alta tecnología para combatir incendios se aplican actualmente en China, han sido traducidas al castellano, y países como Italia han solicitado información sobre ellas.

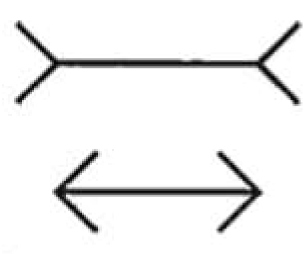
§. Una mirada al futuro: Ciberespacio / realidad virtual

Es la perenne juventud de la matemática lo que la distingue de las otras ciencias con una desconcertante inmortalidad.

Eric Temple Bell

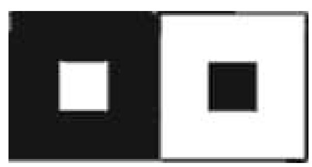
En el siglo XVI, la gente gozó del placer de la cámara obscura. Escenas móviles de cosas que ocurrían afuera de una habitación eran proyectadas sobre la pared de un cuarto oscurecido. No se necesitaban aparatos electrónicos para producir esas escenas dentro de la habitación. Después, en la segunda mitad del siglo XIX, se despertó el interés por las ilusiones ópticas. Los físicos y los psicólogos escribían acerca del modo en que nuestra mente se engañaba por lo que percibía. La estructura física del ojo y el análisis de la manera en que nuestra mente procesa la información del ojo se estudiaron concienzudamente, en un esfuerzo por explicar las distorsiones que engañaban a nuestra mente, haciéndole creer que existían.

Algunos de los descubrimientos fueron:



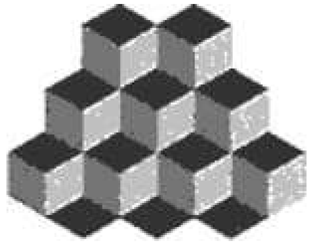
1. La ubicación de ciertos ángulos y segmentos pueden llevar a nuestros ojos hacia adentro o hacia afuera, haciendo de ese modo que un objeto aparezca más corto o más largo.

2. Los objetos horizontales tienen una tendencia a parecer más cortos porque las retinas de nuestros ojos son curvas.

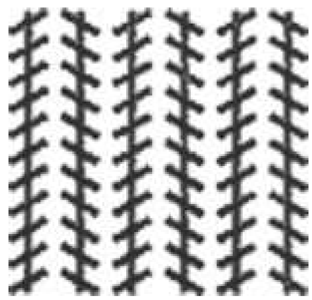


3. Sobre la retina, la imagen de una región clara invade la imagen de una región oscura, haciendo que la región oscura parezca más pequeña.

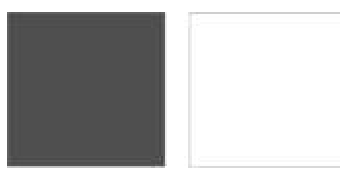
4. Objetos idénticos situados en diferentes ubicaciones en un dibujo en perspectiva parecen tener tamaño diferente.



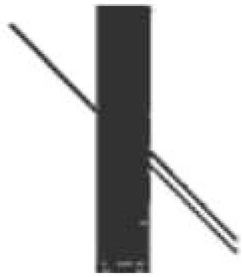
5. Si una imagen puede ser interpretada de más de una manera, entonces nuestra mente hace oscilar la imagen entre las diferentes interpretaciones.



6. Los segmentos diagonales sobre líneas paralelas las hacen parecer no paralelas.



7. Un espacio vacío y un espacio idéntico pero lleno parecen de tamaño diferente.

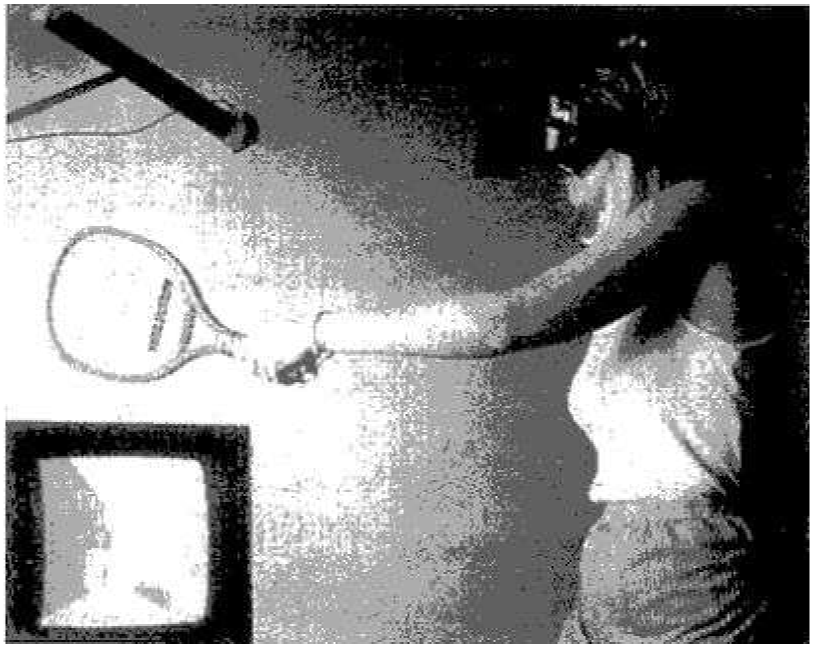


8. Una diagonal cortada por una barra vertical parece no continuarse en la misma línea.

Ahora, en el siglo XX, los científicos dedicados a la informática, los matemáticos y los inventores están llevando la óptica, la tecnología informática y las ilusiones ópticas a nuevas cimas con la creación de *mundos artificiales.* Equipado con diferentes recursos, el observador ya no es simplemente un sujeto pasivo, sino que *entra verdaderamente a mundos creados por el ordenador.*

En esos mundos artificiales, uno puede ser participante. Por ejemplo, se puede elegir ser:

- un corredor “olímpico” que experimenta la excitación de correr por la medalla de oro.
- un controlador de tráfico aéreo que dirige aviones que vuelan a su alrededor en tres dimensiones.
- un meteorólogo que vuela por el mundo experimentando de primera mano las condiciones climáticas que han sido programadas y procesadas por el ordenador.
- un átomo a punto de unirse con otro y formar una molécula.
- un arquitecto que ve su diseño más reciente caminando verdaderamente a través de habitaciones hechas con imágenes de ordenador.



Aquí una cibernauta entra al campo de paddle del ordenador, y empieza el juego. Los jugadores sienten verdaderamente que están jugando en el campo de juego del ordenador. Fotografía cortesía de Autodesk, Inc., Sausalito, California.

Realidad virtual, *ciberespacio* y *realidad artificial* son algunas de las expresiones acuñadas para describir esta nueva forma de ilusiones ópticas. En el confinamiento de una pequeña habitación, uno puede ponerse equipo especial de ordenador,[22] y de pronto encontrarse caminando por la campiña inglesa, inspeccionando el avance de un proyecto situado a miles de kilómetros de distancia o, convertido en una abeja, enterarse de cómo se recoge el polen. Las aplicaciones que puede tener este tipo de tecnología desconciertan la mente. El ciberespacio está todavía en sus etapas iniciales, y aún falta mucho

[22] El equipamiento para el ordenador puede tener muchas formas, incluyendo anteojos especiales, "data gloves" (guantes para transmisión de datos) y "data suits" (trajes para transmisión de datos).

por desarrollar y refinar.[23] Es de esperar que su evolución y popularidad no sea un medio de controlar las mentes, sino más bien de expandirlas. Los científicos en informática y los matemáticos están abriendo nuevos campos en gráfica de ordenador, especialmente usando geometría fractal, para crear estos efectos especiales. Tal vez la holoconsola de *Star Trek-La nueva generación* no sea tan imaginaria.

Sala de estar generada por ordenador, esperando una visita a la realidad virtual. Fotografía cortesía de Autodesk, Irte., Sausalito, California.

§. El hipertexto

[23] Algunas de las universidades y empresas que desarrollan estos mundos artificiales son: University of North Carolina; Autodesk, Inc., de Sausalito, CA; HITL en la University of Washington; VPL Research Co., de Redwood Coty, CA; Camegie Mellon University. El Museo Estatal de Historia natural de Connecticut tiene una instalación creada por Myron Krueger llamada *Video Place.* En la University of California, en Berkeley, se puede jugar *Dactyl Nightmare,* un juego de realidad virtual.

Las especulaciones acerca de la cuarta dimensión aparecieron en el siglo XIX, cuando August Möbius advirtió que la sombra de una mano derecha podía convertirse en la sombra de una mano izquierda simplemente si se pasaba la mano a través de la tercera dimensión. Nadie imaginó que el término hipercubo[24] provocaría la aparición de términos tales como *hiperespacio, hiperser, hypercarcd*,[25] y ahora *hipertexto.* Aunque estos últimos dos términos no están directamente relacionados con la cuarta dimensión, sí están relacionados con el ordenador y con su habilidad de pasar de una idea a otra... el uso interactivo del ordenador. Es algo que puede pensarse de manera análoga a pasar de una dimensión a otra. Los participantes deciden dónde ir, y el ordenador los transporta allí. Por ejemplo, la interactividad permite, después de decidirse lo que se quiere hacer, leer o ver, que el ordenador inmediatamente presente información sobre ese tópico, información que puede incluir una banda sonora, gráficos e incluso un vídeo. Supongamos que usted quiere saber algo sobre el día “D” de la Segunda Guerra Mundial. El ordenador está en condiciones de ofrecerle información histórica, mapas de la invasión y de cómo se llevó a cabo, noticieros de ese período, y hasta algunas canciones populares de la época. Usted elige los tópicos mediante el botón del

[24] Hipercubo es un término acuñado para designar al cubo de cuatro dimensiones.

[25] *HyperCard* tiene dos significados. Puede ser la marca registrada de un programa de ordenador que le permite crear y acceder a grupos de fichas con información de varios tipos (incluyendo gráficos, vídeo, sonido) al seleccionar un tópico determinado. HyperCard (hipercarta) también puede ser una carta (que es de dos dimensiones) que fue cortada y doblada en un modelo tridimensional, similar al libro ilustrado en la pantalla del ordenador. Es difícil para uno dejar pasar la oportunidad de recrear una hipercarta con una tarjeta de 8×12 cm.

mouse.[26]

El hipertexto se basa en el uso interactivo del ordenador, permitiendo así una participación más activa. Un hipertexto no se lee del principio al fin de manera tradicional. En cambio, el ordenador funciona como instrumento para explorar otras resoluciones posibles, y a partir de allí se produce una nueva historia. Con el hipertexto, el lector puede tramar su propio relato, seleccionando ciertas ideas o palabras (subrayadas o en otro color sobre el texto) que se encuentran interconectadas en una especie de red tramada en el programa original. Mientras usted lee el relato en el ordenador, puede elegir la dirección que desea darle al argumento. Usted no crea el argumento, sino más bien elige opciones en el trayecto, y después ve qué ocurre. Un clic con el mouse en una palabra o imagen clave puede llevarlo a otro lugar, a una nueva idea e incluso a otra línea argumental. El lector puede ver cómo el autor desarrolla el relato siguiendo los caminos que el lector eligió. Las reacciones ante la literatura interactiva son dispares. Algunos creen que es una mera curiosidad mucho más interesante en la teoría que en la práctica. Se encuentra en sus etapas iniciales, y hasta el momento, una vez que un relato ha sido "alterado" por el lector, no puede cambiarse.

Por añadidura, también puede resultar difícil al novicio decir

[26] Parece una forma simple de obtener conocimientos. ¿Cuáles son algunas de las dificultades? Se depende del material almacenado en esa pieza particular de software. Otras fuentes distintas a aquellas del programa no se encuentran a mano. Si se está usando el programa para algo más que conocimientos generales, se debe ser cuidadoso para no transformarlo en única fuente. Con un poco de optimismo, esta forma de hallar información no reprimirá la creatividad o el deseo de investigaciones adicionales, sino que las estimulará.

cuándo ha terminado el relato, ya que aún puede disponer de palabras o frases claves, permitiendo que siga pasando a algo nuevo o que incluso se mueva en círculos por error. Las historias tramadas así requieren tiempo y práctica por parte del lector de hipertextos inexperto, que demorará en orientarse dentro de esta nueva forma de lectura. Las características de los programas y de las técnicas de escritura deben refinarse hasta lograr un funcionamiento óptimo que permita al lector absoluta libertad para explorar sus potencialidades. Tal como lo ha expresado George P. Landow, profesor de inglés de la Universidad de Brown: "Verdaderamente tiene la potencialidad de ser la próxima manera de relatar una historia... La pregunta que sigue es: ¿se trata de un caos y anarquía totales, o es una nueva forma de lectura que convierte al lector en una especie de creador?"[27]

Hay muchas personas que opinan que el hipertexto es la introducción de una nueva manera de escribir y lo consideran una forma de arte. Hasta el momento, el mayor interés se ha concentrado en el lector, que ayuda a dar forma a la dirección del relato. Pero pensemos en lo que ese relato implica para el autor. El escritor no desarrolla una sola línea argumental, sino toda una familia de posibles líneas y sus desenlaces relativos: lo que llamamos la trama de la red. Como el resto de los procesos interactivos, la red puede enriquecerse con gráficos, sonido y vídeo. Es demasiado pronto para arriesgar un juicio sobre la literatura interactiva, especialmente porque los relatos de hipertexto acaban

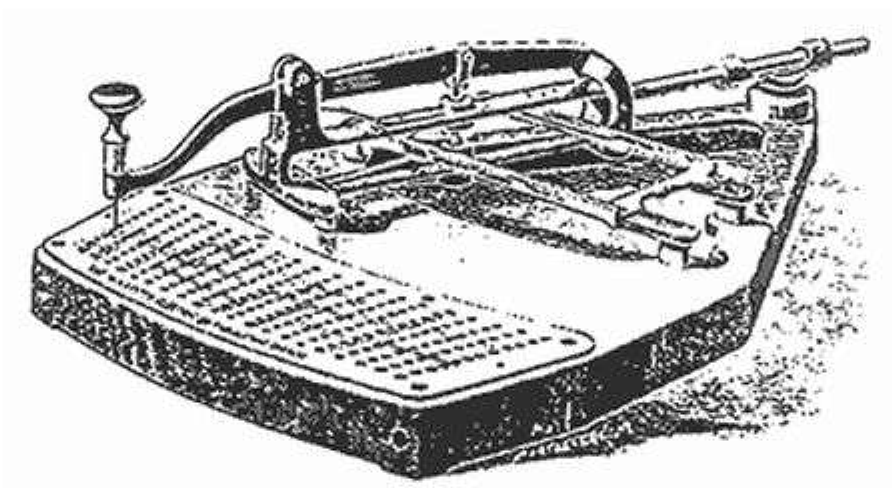
---

[27] *A New Way to Tell Stories,* San Francisco Chronicle, San Francisco, CA, Abril 1993.

de aparecer o de ser publicados en los boletines electrónicos, pero será fascinante seguir los desarrollos. ¿Será una nueva locura? Una sola cosa es segura: el hipertexto no existiría de no ser por la existencia del ordenador moderno.

§. Pequeño Fermat

Con frecuencia se tiene la sensación de que las personas comunes creen que los ordenadores ya han llegado a su último estado de desarrollo, pero los especialistas saben que no es así. Con el mismo espíritu que Charles Babbage, M. M. (Monty) Denneau, George V. y David V. Chudnovsky y Saed G. Younis crearon a *Pequeño Fermat,* un ordenador diseñado para resolver gigantescos problemas de cálculo sin los errores numéricos asociados a los ordenadores convencionales. Usando ideas de la teoría numérica —específicamente la aritmética modular y los números de Fermat—, el nuevo ordenador puede llevar a cabo cómputos virtualmente sin errores. Pequeño Fermat está programada en un lenguaje llamado Younis. Al utilizar los números de Fermat como divisores en aritmética modular, se puede acelerar cierto tipo de cálculos y evitar el empleo de números reales. Hasta el momento Pequeño Fermat es un prototipo único, pero sus creadores creen que es ideal para procesar señales digitales e imágenes y para la resolución de diversos problemas de hidrodinámica, química y aerodinámica que requieren de ecuaciones diferenciales. Lo que es más, esperan que sirva de modelo para mejorar el desempeño de los súper-ordenadores.



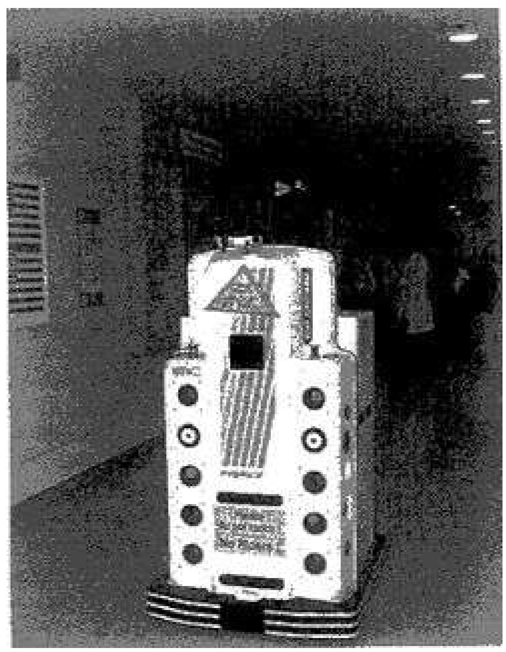
El teclado de perforación para la máquina tabuladora de Herman Hollerith, de 1890, que revolucionó el procedimiento del censo en los Estados Unidos. La tarjeta perforada que usaba fue antecedente directo de las viejas tarjetas de ordenador, hoy reemplazadas por medios magnéticos.

§. Ordenadores y A-life

Con los cambios tecnológicos produciéndose a gran velocidad, y con la cantidad de nuevas ideas y aplicaciones que surgen de un día para otro, los ordenadores parecen invadir todos los aspectos de nuestra vida, lo advirtamos o no. Muchos laboratorios científicos son ahora un simple ordenador, que emplea toda su capacidad en la simulación y la creación de modelos.

A-life, como suele designársela, es una manera de simular formas de vida, su conducta, reproducción y evolución. Un ejemplo reciente de su uso son los murciélagos generados por ordenador en *Batman - La vuelta.* ¿Cómo fueron hechos? Utilizando lógica, matemática y ordenadores, los hábitos de una forma de vida, en este caso los murciélagos, son analizados en pasos lógicos básicos, que luego se trasladan al ordenador programándose una simulación que capta los movimientos y los hábitos de la forma de vida. Las aplicaciones posibles son de gran alcance. Un ejemplo es la investigación de enfermedades realizada en el Scripp Research Institute. Allí, Gerald Joyce usa las simulaciones por ordenador para desarrollar un procedimiento de laboratorio en el que las enzimas evolucionan según su disposición en el código genético de un virus de SIDA. Por el método del ensayo y el error, estas enzimas exploran una cura.

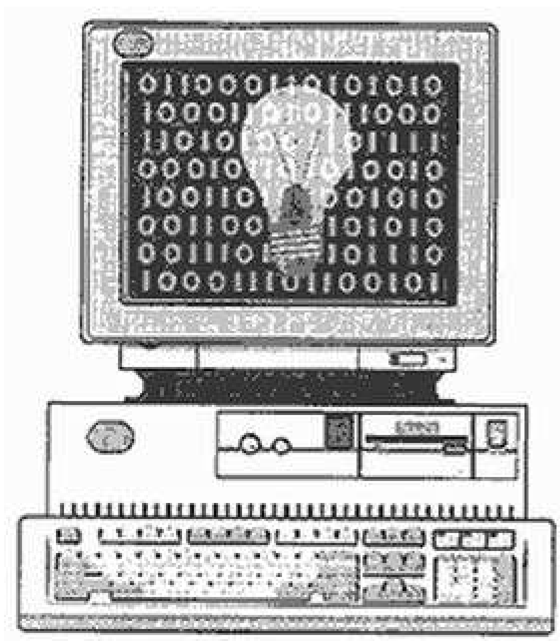
Los ordenadores pueden desarrollar sus propios programas basados en el modo en que resuelven ciertos problemas. Los programas diseñados según este método incluyen conducir autos, predecir resultados económicos, y predecir movimientos planetarios. El pionero de la computación John von Neuman afirmó que las máquinas no sólo podían procesar información, sino también reproducirse a sí mismas. Algunos defensores de A-life creen que la esencia de la vida es un conjunto de reglas que dirigen la interacción de células, átomos, moléculas, etc. Además, se está desarrollando una estrecha relación entre A- life y la matemática fractal. Por ejemplo, se han desarrollado simulaciones por ordenador de células de plantas que se dividen según un conjunto de instrucciones.



El robot usado en el Stanford University Hospital (Stanford, California) para llevar documentos de un lado a otro. Foto cortesía de Stanford University Medical Center, Visual Arts Service.

Una de ellas creció en formaciones celulares casi idénticas a las de un helecho. Gracias al estudio de insectos como las hormigas se han creado simulaciones de robots en miniatura. Estos robots reciben la orden de desplazarse y cambiar de dirección solamente cuando se topan con un obstáculo que no pueden superar. Los nuevos robots superan con mucho el desempeño de robots tradicionales de mayor tamaño cuando se trata de avanzar por un camino evitando obstáculos. De hecho, Atitila, un robot especial diseñado por el Mobot Lab del MIT, pesa sólo 1,6 kilos y será usado para explorar Marte.

§. Ordenadores ópticos



Nuestros ordenadores actuales funcionan por medio de la electricidad. Pero algunos científicos están trabajando en el desarrollo de un nuevo tipo compuesto de fibras ópticas, láseres y dispositivos que procesan datos y llevan a cabo cálculos vía luz[28] en vez de electricidad. A diferencia de los ordenadores electrónicos en los que datos y programas son acumulados en chips de memoria,

[28] El único momento en que no se usa la luz ocurre cuando los interruptores ópticos son activados y los pulsos de luz se convierten momentáneamente en corriente eléctrica.

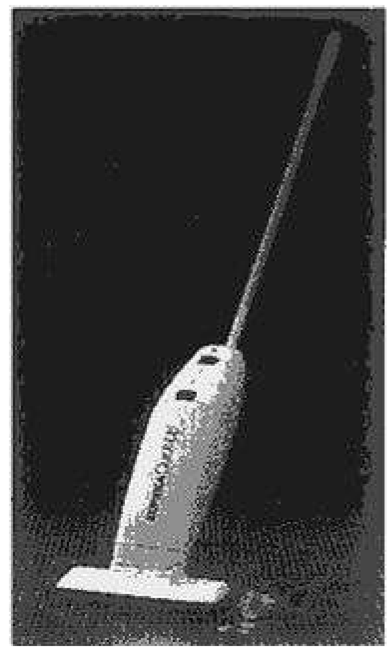
discos rígidos o diskettes, el ordenador óptico hace circular los datos en forma de pulsos de luz a través de las fibras ópticas. “Por primera vez tenemos un ordenador en el que los programas y los datos están siempre en movimiento en forma de luz, eliminando la necesidad de la acumulación estática”, dice Harry F. Jordán, del Centro de Computación Optoelectrónica de la Universidad de Colorado, en Boulder, Colorado. Más de cinco kilómetros de fibra óptica actúan como memoria principal, donde se codifican instrucciones y datos en pulsos de luz. Jordán y Vincent P. Heuring encabezan la investigación en la Universidad de Colorado. El ordenador que han desarrollado, hasta el momento “demuestra el principio de que todos los componentes de una máquina multipropósito pueden hacerse con medios ópticos”.[29]

§. Lógica difusa y ordenadores

Supongamos que tomo un tronco y lo agrego a los que arden en mi chimenea. Empieza a arder inmediatamente. ¿En qué momento preciso el tronco dejará de ser considerado un tronco? Una persona podría decir que inmediatamente después que empezó a arder. Otra podría decir que cuando se ha quemado hasta la mitad, y otra podría decir que es un tronco hasta el momento en que se convierte en brasa. Por más lógicos que deseemos ser al dar esta respuesta, no hay ninguna respuesta definida. No hay una respuesta correcta ni equivocada. No hay manera de cuantificar la respuesta. Todo es una cuestión de grado. Una cita a las cinco de la tarde significa lo

[29] Henry Jordan, citado en Science News, Enero 23, 1993.

mismo para todo el mundo. Pero una cita fijada para la tarde puede significar las 15:30 para una persona y las 17:30 para otra. En realidad, hay muchas horas posibles, según a quien se cite. Y ése es el caso de muchas otras cosas en la vida, porque en la vida y en el universo hay una naturaleza subjetiva. La lógica del *verdadero o falso,* del *sí o no,* no puede dar cuenta de esas situaciones ni del estado siempre cambiante de todas las cosas de la tierra y del universo. Con esas cosas trabaja la lógica difusa.



La lógica difusa puede estar dentro de:

- su lavarropas, si su máquina decide el mejor ciclo de lavado para el nivel de agua, cantidad de carga, tela y nivel de suciedad y de manchas. Después de un ciclo de lavado, si el agua no está suficientemente limpia la máquina repetirá el ciclo.
- su aspiradora, si puede adaptar automáticamente la succión basándose en información reunida por medio de sus sensores infrarrojos.

La lógica difusa es una buena manera de ver las cosas y de analizar el mundo. La expresión *lógica difusa* fue acuñada en la década de 1960 por el profesor de Berkeley Lofti Zadeh, pero es posible que las paradojas sean responsables de su nacimiento. A lo largo de los siglos las paradojas han creado puntos ciegos en la lógica tradicional: la lógica de verdadero o falso no podía emplearse para explicar paradojas tales como la del montículo de arena de Euclides[30] o la de la pertenencia a una clase de Bertrand Russell[31]. Estas paradojas van de la mano con muchas situaciones de la vida real que no pueden responderse con un simple sí o no... la lógica tradicional no tiene lugar para las gradaciones de una situación. Aunque la lógica difusa tuvo su origen en los Estados Unidos, ha sido adoptada por los filósofos y científicos orientales. Del mismo modo que los objetos matemáticos no pueden describir con precisión las cosas de nuestro mundo, la lógica tradicional no puede ser aplicada con exactitud al mundo real ni a las situaciones que se dan en él. La lógica tradicional y los programas de ordenador se basan en afirmaciones que son o bien verdaderas o bien falsas (la electricidad en "encendido" o en "apagado"; el 1 o el 0 del sistema binario). Para humanizar los ordenadores, la lógica difusa debe entrar en escena. La lógica difusa trata de imitar el modo de funcionamiento del cerebro humano. En otras palabras, intenta convertir la inteligencia artificial en inteligencia real. Las compañías japonesas y coreanas son las primeras en innovar con aplicaciones

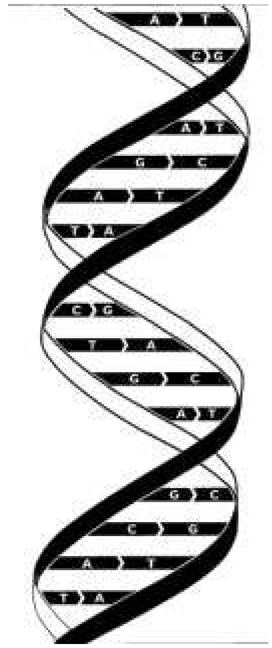
---

[30] Euclides, filósofo griego del siglo IV a.C., consideró cuántos granos de arena hacen un montículo: en qué momento, si se quita un grano, un montículo deja de ser un montículo.

[31] La paradoja de Bertrand Russell (1872-1970) trata de la noción de pertenencia a un conjunto. Un conjunto *es* un miembro de sí mismo o *no es* un miembro de sí mismo. Los conjuntos entre cuyos miembros no se cuentan ellos mismos son llamados regulares. Por ejemplo, el conjunto de las personas no se contiene a sí mismo, ya que no es una persona. Los conjuntos que se contienen a sí mismos como miembros son llamados irregulares. Un ejemplo es el conjunto de los conjuntos con más de cinco elementos. El conjunto de todos los conjuntos regulares, ¿es regular o irregular? Si es regular, no puede contenerse a sí mismo. Pero como es el conjunto de todos los conjuntos regulares, debe contener a *todos* los conjuntos regulares, incluyéndose a sí mismo. Si se contiene a sí mismo, es irregular. Pero si es irregular, se contiene a sí mismo como miembro, y se supone que sólo debe contener conjuntos regulares.

que emplean la lógica difusa. Entre otras cosas, están produciendo ordenadores, aparatos de aire acondicionado, cámaras, lavaplatos, partes de automóviles, televisores y lavarropas que están enriquecidos con tecnología de lógica difusa. El ordenador del prototipo Mitsubishi HSR-IV, presentado en el Tokyo Motor Show en octubre de 1993, usa lógica difusa para imitar el procesamiento de información en el cerebro del conductor. El ordenador estudia los hábitos normales del conductor, y después selecciona una respuesta para diversas situaciones que pueden presentarse. Por ejemplo, si el radar incorporado detecta un obstáculo, el sistema de lógica difusa decide si el conductor lo ha advertido o no (basándose en conductas anteriores). Si el conductor no responde de la manera prevista, el sistema puede controlar automáticamente los frenos para evitar una colisión.

Hasta el momento, muchos científicos occidentales se han mostrado reticentes a emplear la lógica difusa, ya que creen que amenaza la integridad del pensamiento científico. Otros científicos creen que la lógica difusa enriquece y expande las posibilidades de la programación de ordenadores, ya que considera un espectro más amplio de variables para dar solución a un problema específico o para diseñar un producto en particular. En el pasado, la National Science Foundation rechazó propuestas relacionadas con la lógica difusa, pero tal vez los proyectos futuros sean considerados bajo otra luz, especialmente porque cada vez más empresas norteamericanas, como Ford, Otis, Pacific Gas & Electric, Motorola y General Electric, han expresado interés por las aplicaciones y usos esta lógica.



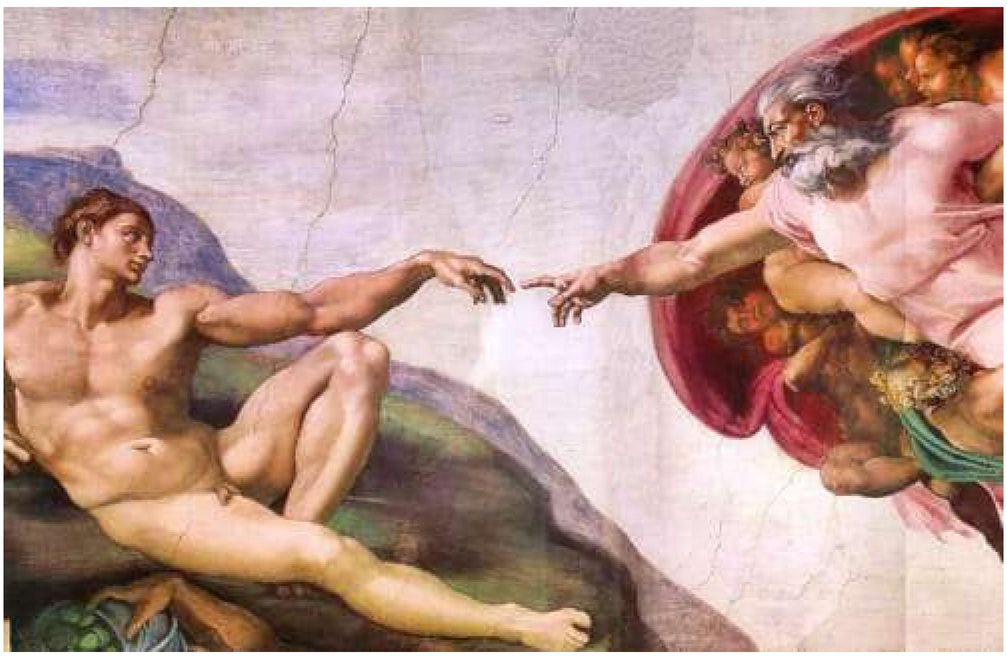
Capítulo 4
La matemática y los misterios de la vida

Contenido:

Sería posible imaginar la vida y la belleza como "estrictamente matemáticas" solamente si nosotros mismos tuviéramos la infinita capacidad matemática de poder formular sus características

matemáticas de una manera tan extremadamente compleja que todavía no hemos logrado inventarla.
Theodore Andrea Cook (1867 - 1928)

El mundo científico usa constantemente ideas matemáticas en su intento de develar los misterios de la vida.



De *La creación de Adán,* de Miguel Angel. Capilla Sixtina, Vaticano, Roma, Italia.

Este capítulo presenta algunas de las áreas en las que se emplea la matemática en busca de respuestas a preguntas tales como la manera en que funcionan nuestros cuerpos o cómo comenzó la vida.

Parece un misterio que una disciplina que se ocupa de objetos inanimados y objetos de nuestra imaginación pueda tener respuestas para esas preguntas.

§. Matematizando el cuerpo humano

Presión sanguínea: 120/80

Colesterol: 180

Triglicéridos: 189

Glucosa: 80

Temperatura: 36,7°C.

En la medicina actual, nosotros, los pacientes, nos vemos bombardeados por números y porcentajes que analizan nuestra salud y la manera en que están funcionando nuestros cuerpos. Los médicos han tratado de definir los espectros numéricos que son normales. Los números y la matemática parecen estar en todas partes. En realidad, en nuestros cuerpos las redes de nuestro sistema cardiovascular, los impulsos eléctricos que nuestros cuerpos usan para producir movimientos, las maneras en que se comunican las células, el diseño de nuestros huesos, la misma estructura molecular de los genes... todos ellos poseen elementos matemáticos. En consecuencia, en un esfuerzo destinado a cuantificar las funciones del cuerpo humano, la ciencia y la medicina han recurrido a los números y a otros conceptos de la matemática. Por ejemplo, se han diseñado instrumentos para traducir los impulsos eléctricos del cuerpo a curvas sinusoides, haciendo de este modo factible la comparación de resultados. Los resultados de un electrocardiograma, un electromiograma, un ultrasonido, muestran la forma, amplitud y cambio de fase de una curva. Todo esto proporciona información al técnico entrenado. Números, porcentajes y gráficos son aspectos de la matemática adaptados a nuestros cuerpos. Consideremos ahora otros conceptos matemáticos y la forma en que se relacionan con el cuerpo.

Theodore A. Cook publicó este análisis de El nacimiento de Venus, de Sandro Botticelli. En su libro Curvas de la vida, el autor afirma: "la línea que contiene la figura desde el tope de la cabeza hasta la planta de los pies está dividida a la altura del ombligo en proporciones exactas dadas por... la sección áurea (φ).... Tenemos siete términos consecutivos de la sección áurea en la composición completa".

Si usted cree que el descifrado de códigos, cifras y jeroglíficos mayas es un desafío excitante, imagínese lo excitante que es poder develar los códigos moleculares que el cuerpo usa para comunicarse. La ciencia ha descubierto ahora que los glóbulos blancos de la sangre están relacionados con el cerebro.

La mente y el cuerpo se comunican por medio de un vocabulario de sustancias bioquímicas. El descifrado de estos códigos intercelulares ejercerá un impacto asombroso sobre la medicina, del mismo modo que nuestra creciente comprensión de los códigos genéticos está revelando muchísimas ramificaciones dentro del campo de la salud. El descubrimiento de la doble hélice del ADN fue otro fenómeno matemático. Pero la hélice no es la única espiral presente en el cuerpo humano. La espiral equiangular se encuentra en muchas zonas de crecimiento... posiblemente porque su forma no cambia a medida que crece. Búsquela en la estructura de crecimiento de su cabello, en los huesos de su cuerpo, en la cóclea del oído interno, en el cordón umbilical y tal vez hasta en sus huellas digitales.

Los aspectos físicos y fisiológicos del cuerpo también nos conducen a otras ideas matemáticas. El cuerpo es simétrico, lo que le da equilibrio y un centro de gravedad. Además de permitir el equilibrio, las tres curvas de la columna vertebral son muy importantes para el buen estado físico y para conferir al cuerpo la capacidad física de sostener su propio peso y otras cargas. Artistas como Leonardo da Vinci y Alberto Durero trataron de ilustrar la concordancia del cuerpo con diversas proporciones y medidas, tales como la sección áurea.

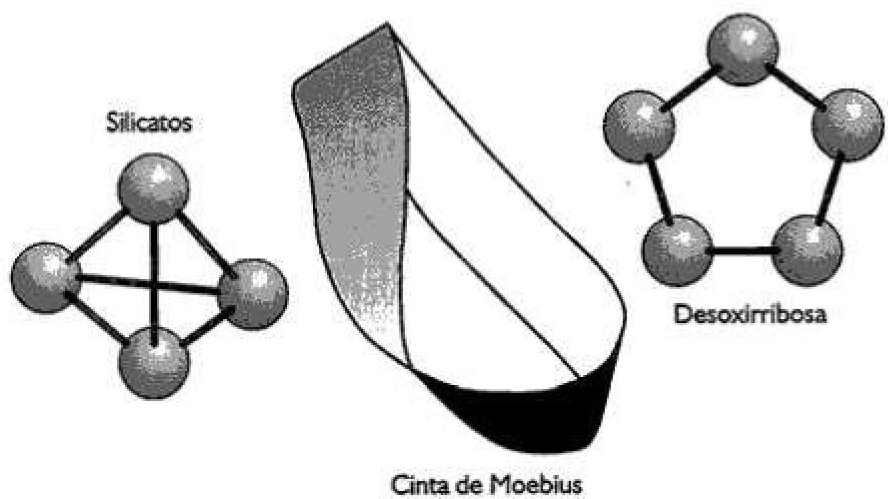
Por sorprendente que pueda parecer, la teoría del caos también tiene un lugar en el cuerpo humano. Por ejemplo, se está investigando la teoría del caos en relación con las arritmias. El estudio de los latidos del corazón y el motivo por el cual el corazón de algunas personas late irregularmente parece referimos a la teoría del caos. Por añadidura, las funciones del cerebro y de las ondas cerebrales y el tratamiento de los desórdenes cerebrales también están relacionados con la teoría del caos.

Si exploramos el cuerpo a nivel molecular, también encontramos relaciones con la matemática. Hay formas geométricas, como poliedros y cúpulas geodésicas, presentes en las formas de varios virus invasores. En el virus del SIDA (HTLV-1) encontramos simetría icosaédrica y una estructura de cúpula geodésica. Los nudos que aparecen en las configuraciones del ADN han llevado a los científicos a usar descubrimientos matemáticos de la teoría de nudos para el estudio de las formas adoptadas por las cadenas de los ácidos nucleicos. Los hallazgos de la teoría de nudos y las ideas procedentes de diversas geometrías han probado ser invalorables para el estudio de la ingeniería genética.

La investigación científica y la matemática son una combinación esencial para descubrir los misterios del cuerpo humano y para analizar sus funciones.

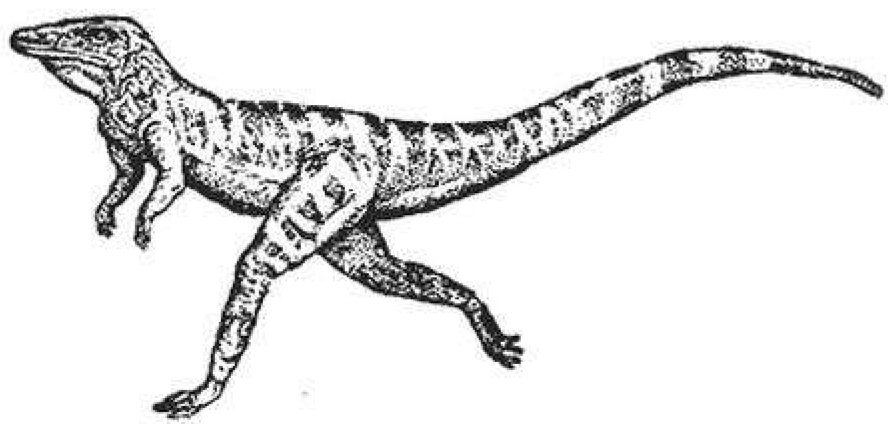
§. Modelos matemáticos y química

Los objetos matemáticos están presentes en muchas sustancias químicas producidas naturalmente. Al estudiar la estructura molecular, encontramos pentágonos bajo la forma de la desoxirribosa, tetraedros en las moléculas de silicatos, hélices dobles en el ADN, formas poliédricas en los cristales y en otras formaciones moleculares. Por eso no resulta una sorpresa que, al crear nuevas sustancias, los químicos se basen en modelos matemáticos. Los átomos de carbono son adecuados como bloques de construcción, a causa de la manera en que pueden unirse para formar cadenas y anillos o estructuras tridimensionales. Por ejemplo, en 1938, Leo Paquette, un químico de la Ohio State University, formó una molécula similar a un dodecaedro, que consiste en 20 átomos de carbono rodeados por 20 átomos de hidrógeno.



Se parecía a una pelota de fútbol y fue denominado *dodecaedrano.* Pero los modelos euclidianos no son los únicos que se utilizan. En junio de 1983, algunos químicos de la University of Colorado formaron un compuesto al que denominaron *tris* (tetrahidroximetiletileno), que adopta la forma de la cinta de Möbius (el descubrimiento realizado en 1848 por August Möbius, que tiene un solo lado y un borde único). El tris está compuesto por cadenas de átomos de carbono y oxígeno y termina en grupos de alcoholes, que se prestan a unirse fácilmente cuando se imprime un medio giro a la cadena.

§. Matemática e ingeniería genética



Jurassic Park ha proporcionado al público una clara conciencia de las maravillas y de los posibles horrores de la ingeniería genética. El drama de la vida se despliega dentro de una célula viva. No importa si esa célula viva es humana, de pez, de planta, de insecto o de bacteria: toda célula viva es el hogar de una molécula helicoidal de ADN (ácido desoxirribonucleico). ¿Pero qué hace esta espiral matemática tridimensional en el interior de una célula? ¿Cuál es su función? ¿Y cómo se relacionan los genes —los transmisores de las características de las formas de vida— con el ADN? En este punto entran en juego los conceptos matemáticos de patrón, secuencia, relación, correspondencia uno a uno, y todos ellos desempeñan un papel en la develación de los códigos y los misterios de la célula viva. Dentro de la célula de una planta o de un animal encontramos un núcleo[32] donde residen los cromosomas. El ADN está dividido en cadenas llamados cromosomas, y los genes se encuentran en las moléculas del ADN. Las moléculas y proteínas del ARN (ácido ribonucleico) también se encuentran en el núcleo, junto con cantidades minúsculas de otros materiales y agua. Las diferentes especies tienen diferentes números de cromosomas. Por ejemplo, los humanos tienen 46, ciertas especies de flores tienen 4, en tanto el cangrejo ermitaño tiene 254.[33] Es sorprendente considerar que cada célula viva está compuesta por los mismos seis elementos: carbono, hidrógeno, oxígeno, fósforo, nitrógeno y azufre. En la célula, estos átomos se combinan para formar moléculas de agua, fosfatos y azúcar. Además, forman macromoléculas (moléculas enormes formadas por miles de átomos unidos) como los lípidos, almidones, celulosa y los aún más complejos ácidos y proteínas nucleicas. La molécula de ADN con sus genes proporciona el mapa de la vida de una célula. Aunque los elementos constitutivos esenciales de todas las células son los mismos, los diferentes organismos tienen mapas genéticos absolutamente diferentes. Y aunque los genes usan los mismos “símbolos” (elementos que forman el código de la célula), las diferentes estructuras de las cosas vivas están formadas por medio

---

[32] Las células protociotes, tales como las bacterias de un organismo, no tienen núcleo, mientras que las eucariotas, que se encuentran en las plantas y animales, tienen cada una su núcleo.

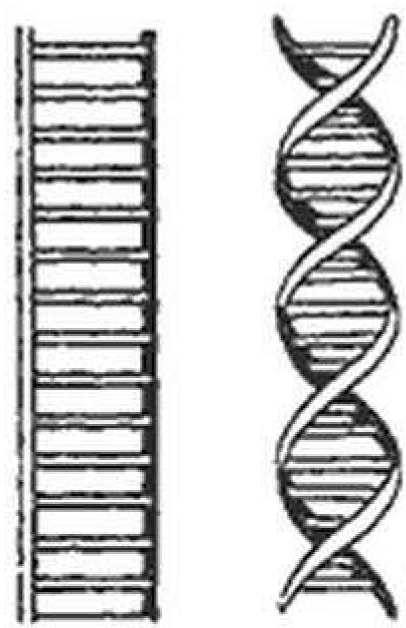
[33] La diferencia entre las cantidades está influida por muchos factores, incluyendo los diferentes estados que las especies experimentan durante su vida.

de diferentes combinaciones de secuencias de estos “símbolos”. En cada célula los códigos son descifrados por el mismo tipo de mecanismo empleado para reproducirse y para crear proteínas y otras estructuras celulares.

La formación de códigos genéticos se basa en la comprensión de los ácidos nucleicos. Los ácidos nucleicos se forman a partir de nucleótidos —constituidos por un azúcar, un fosfato y una base (hay cinco clases de bases a las que se indica mediante los símbolos A, C, G, T, U).[34] En el ADN sólo aparecen cuatro bases: A, C, G y T. Cada base sólo puede aparearse con otra única base complementaria: A con T y C con G. En el ADN dos cadenas de ácidos nucleicos se reúnen por sus bases y forman la famosa doble hélice. Es la forma pentagonal de la desoxirribosa lo que da la forma de espiral, y hacen falta 10 peldaños para completar una vuelta. Por otra parte, el ARN sólo tiene las bases A, C, G y U, y usualmente forma una cadena simple y no doble, mucho más corta que la del ADN. El diagrama del ADN ilustra la manera en que la cadena de bases forma un código específico. Cuando se lleva a cabo la copia genética (o réplica del ADN), la doble hélice del ADN se desenrolla a una velocidad de más de 8000 r.p.m., y se separa en las bases formando dos cadenas. Mientras esto ocurre, los nucleótidos libres (no unidos a la célula) que tienen el “símbolo” de base correcta, unen sus bases a las bases del ADN en cada una de las cadenas divididas. De este modo dos hélices dobles idénticas de ADN se forman dividiendo la original al medio y agregando los nucleótidos

[34] A es adenina, C es citosina, G es guanina, T es timina, U es uracilo.

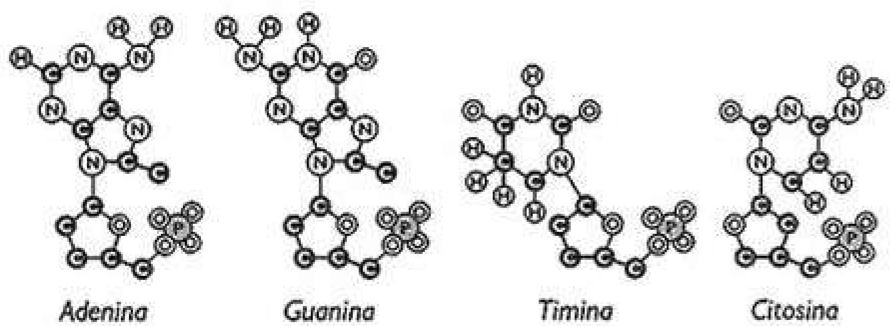
libres a cada mitad. Además de la duplicación del ADN, los genes también se ocupan de formular proteínas[35] y de otras funciones celulares. Los genes son gatillados a la acción gracias a varios estímulos (por ejemplo, la exposición a una hormona en particular). ¿Cómo hace un gen para orquestar sus actividades?



El ADN está formado por dos cadenas helicoidales unidas entre sí para formar una doble hélice.

[35] Como los ácidos nucleicos, las proteínas también son largas cadenas de unidades menores llamadas aminoácidos (hasta el momento se han identificado 50 tipos de aminoácidos). Cada proteína está identificada por una secuencia y cantidad específica de aminoácidos. Las enzimas proteínicas son responsables de dirigir las reacciones químicas de una célula viva. ¿Dónde entra en escena el ARN? Cuando el ADN se divide durante el proceso de reproducción, se construye un ARN mensajero a lo largo de la cadena del ADN, haciendo coincidir las bases complementarias (este proceso se llama *transcripción*). El ARN mensajero lleva este código genético desde el ADN a los traductores del código genético (llamados moléculas ARN de transferencia). Allí una cadena de aminoácidos es conectada en la secuencia traducida mediante ARN ribosomal y se forma la proteína. Aunque aquí se han eliminado muchos pasos por simplicidad, la maravilla de este proceso que tiene lugar simultáneamente en las células vivas es deslumbrante.

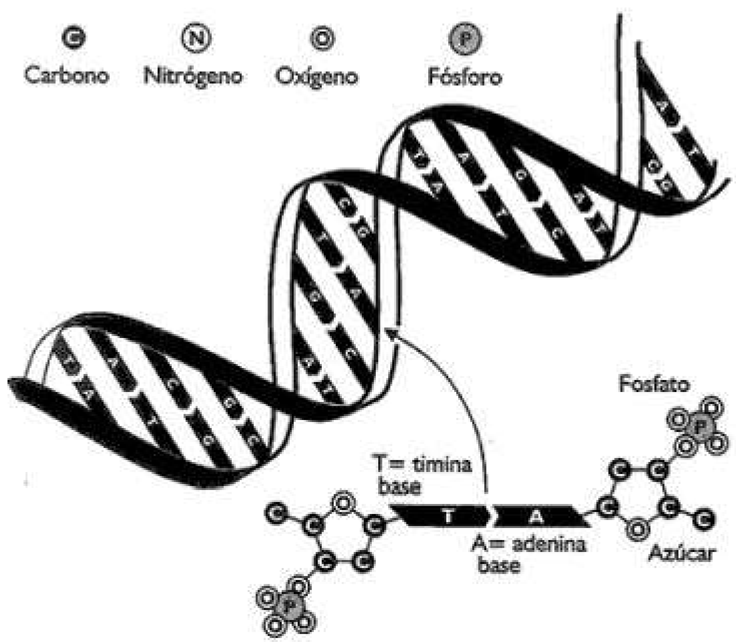
Los miles de genes alineados en la molécula de ADN son análogos a los interruptores de "encendido" y "apagado" de las instrucciones binarias de un ordenador. Los que están en "apagado" dejan de transmitir una señal, en tanto los que están en "encendido" empiezan a transmitir sus propias instrucciones. Todo este proceso se lleva a cabo de manera simultánea.



En una célula viva hay enormes números de nucleótidos. Hay cuatro tipos de nucleótidos formados por una base y parte de la hélice. Adviértase que las moléculas de fosfato de azúcar (parte inferior de los diagramas) son idénticas, y por lo tanto encajan entre sí en cualquier orden para formar una cadena de la hélice del ADN.

La ingeniería genética es el proceso de manipulación de la estructura de las moléculas del ADN. Los ingenieros genéticos han encontrado maneras de duplicar, alterar, dividir y unir secuencias de códigos; en otras palabras, han hallado el modo de cambiar el mapa de una célula. Pueden hacer el denominado ADN recombinante, un ADN que consiste en una combinación de bases tomadas de organismos totalmente diferentes, por ejemplo, una célula humana y una célula bacteriana.

Además del estudio de las secuencias, códigos y hélices, las formas y estructuras matemáticas también tienen importancia para categorizar la infinita combinación de átomos y moléculas que componen las células vivas. Como estas estructuras tridimensionales, como las proteínas, no son rígidas sino que con frecuencia parecen estar anudadas, los matemáticos dedicados a la teoría de nudos y al modelado mediante ordenador están desempeñando un papel de importancia cada vez mayor en la ingeniería genética. La teoría del caos es otro campo de importancia, ya que cambios minúsculos y simples en los estímulos de los genes pueden tener como consecuencia una enorme diferencia en el resultado, es decir, una mutación. ¿Y qué ocurre con los fractales? ¿Acaso la vida de una célula no puede considerarse una creación similar a los fractales, de enorme sofisticación, donde los objetos dados son los seis elementos básicos de la vida y su regla el programa genético de la molécula de ADN?



Un ejemplo de un peldaño de la escalera del ADN

Los dos filamentos de la doble hélice se enrollan en direcciones opuestas. Por eso los azúcares y los fosfatos se encuentran en ubicaciones opuestas en ambos.

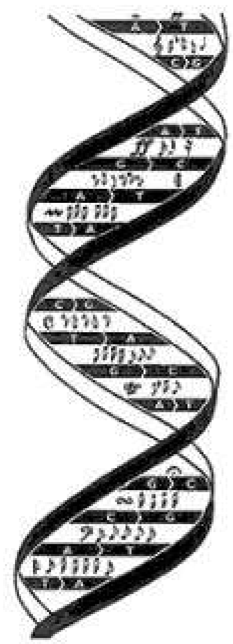
Como las técnicas de la ingeniería genética se crean y desarrollan con gran velocidad, las compañías de biotecnología están compitiendo por usar los últimos resultados científicos para descubrir nuevas curas y manufacturar drogas milagrosas. Los productores de alimentos también desean emplear las técnicas genéticas para manipular los genes de diversos productos[36] con el objeto de mejorar el tiempo de vida, el tamaño, el sabor y la resistencia a las plagas. La alteración de los códigos genéticos puede hacerse ahora en una fracción del tiempo que insume la ocurrencia del proceso de selección natural. Pero las preguntas siguen vigentes. ¿Todos estos cambios son deseables, son efectivos, son dañinos? ¿El consumidor no informado correrá el riesgo de consumir alergénicos potenciales ocultos y agregados durante la manipulación genética? La responsabilidad que deben asumir los ingenieros genéticos es enorme. ¡Están experimentando con la vida después de que ésta ha evolucionado durante millones de años!

§. La música del cuerpo

Hemos oído hablar del lenguaje corporal creado por los mensajes

[36] Estos incluyen: tomates con genes de lenguado para resistir heladas, no madurar en la planta y no dañarse fácilmente durante el transporte; patatas con genes del gusano de seda para aumentar la resistencia a las enfermedades; maíz con genes de luciérnaga para disminuir el daño producido por los insectos. Los grupos de acción de consumidores, como el Pure Foods Campaign, de Washington D.C., se han organizado para vigilar la comida genéticamente alterada.

que enviamos de acuerdo con la manera en que movemos nuestro cuerpo o las posturas que asumimos. Algunos científicos[37] han explorado las estructuras descubiertas en el ADN desde un punto de vista totalmente diferente... el de la música de los genes. Dos cadenas helicoidales se unen por sus bases compatibles[38] para formar la estructura de doble hélice del ADN. Las bases tienen códigos genéticos y junto con el ADN son el mapa de la célula viva. Las estructuras de estas bases son intensamente estudiadas con la esperanza de descifrar sus significados. Se ha observado que en el gen recurren secuencias repetitivas de bases. El vínculo con la música se hace evidente, si uno piensa que las secuencias recurrentes son las melodías recurrentes de una canción. En realidad, se ha puesto música a muchas de estas secuencias, tanto en una octava como en otros intervalos.

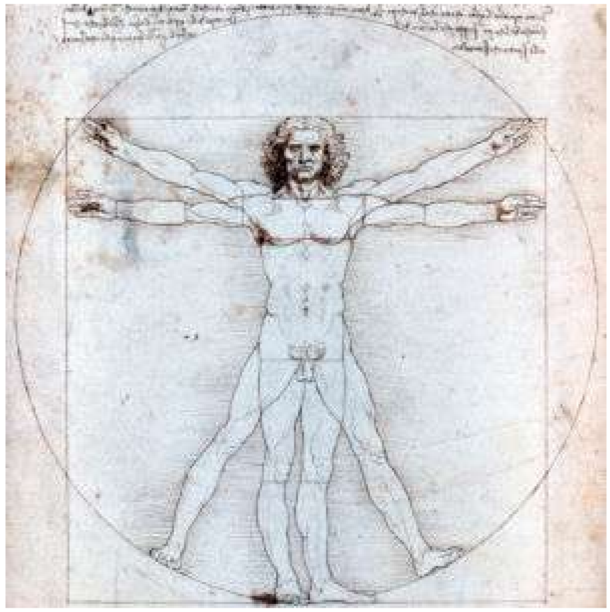


Como ya mencionamos antes, la música y la matemática han estado vinculadas a lo largo de los siglos. Los pitagóricos relacionaron los números y las escalas musicales. Hasta Johannes Kepler (1571-1630), vinculó la velocidad de los planetas al recorrer sus órbitas elípticas con la armonía musical, aunque en la actualidad no se atribuye a esta relación ninguna significación científica. Por lo tanto, no es inusual que los científicos y los

[37] Dr. Susumo Ohno, del Departamento de Biología Teórica del Beckman Research Institute of the City of Hope, Duarte, California.
[38] Sólo determinadas bases se aparean con otras. Estas son: la A con la T, y la G con la C. La manera en que aparecen en la cadena forma el código genético del ADN.

matemáticos investiguen la música del cuerpo.

§. Los secretos del hombre del renacimiento



Este famoso dibujo de Leonardo da Vinci apareció en el libro *De Divina Proportione*, que ilustró para el matemático Luca Pacioli en 1509. En uno de sus cuadernos, Leonardo escribió una extensa sección sobre las proporciones del cuerpo humano. Allí determinó medidas y proporciones para todas las partes del cuerpo, incluyendo la cabeza, los ojos, las orejas, las manos y los pies, basándose en numerosos estudios, observaciones y mediciones. Además hizo referencia a los trabajos de Vitruvio, el arquitecto romano (alrededor de 30 a.C.) que también se ocupó de las proporciones del cuerpo humano. Leonardo escribe sobre la manera en que Vitruvio ejerció influencia sobre él:

> *"Vitruvio, el arquitecto, dice en sus trabajos sobre arquitectura que las medidas del cuerpo humano han sido distribuidas por la Naturaleza de la siguiente manera: ...Si se abren las piernas de*

tal modo de disminuir la propia estatura en ¼, y se abren y alzan los brazos hasta que los dedos medios lleguen al nivel de la parte superior de la cabeza, se sabe que el centro de los miembros extendidos estará en el ombligo, y el espacio entre las piernas será un triángulo equilátero".

Y luego agrega Leonardo: "La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura".[39]

§. Nudos en los misterios de la vida

Desde la época en que Alejandro Magno cortó el nudo gordiano, los nudos y sus varias formas han invadido muchas facetas de nuestra vida. Magos, artistas y filósofos se han sentido intrigados por nudos tales como el nudo trébol, que no tiene principio ni fin. En la actualidad los científicos investigan los nudos porque consideran que es posible que guarden algunas claves de los misterios de la vida. Estas teorías oscilan entre el mundo cósmico y el mundo microscópico.

A primera vista, podría pensarse que no hay nada especial en los nudos, salvo para atar o asegurar cosas como zapatos o aparejos en una embarcación. Pero en matemática existe todo un campo llamado teoría de nudos, y permanentemente se producen descubrimientos que vinculan esta teoría directamente con el mundo físico.

[39] Richter, Jean Paul, editor. *The Notebooks of Leonardo da Vinci*, vol. 1, Dover Publications, 1970, New York.

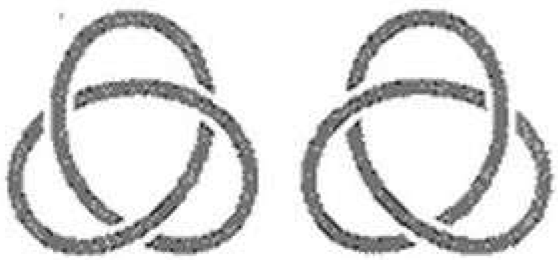
Diseño de nudo celta del Evangelio de San Juan. Libro de Durrow. De Celtic Design, Ed Sibbett, Jr., Dover Publications, 1979.

La teoría de nudos es un campo muy reciente de la topología. Sus orígenes pueden relacionarse con el siglo XIX y la idea de Lord Kelvin de que los átomos eran vórtices anudados que existían en el éter, que, según se creía, era un fluido invisible que llenaba el espacio. Lord Kelvin creyó que era posible clasificar estos nudos y obtener una tabla periódica de elementos químicos. Aunque su teoría no era cierta, el estudio matemático de los nudos es un tópico corriente en la actualidad.

Lo que diferencia a los nudos matemáticos de los nudos corrientes, usados en la vida cotidiana, es que no tienen extremos. Son un tipo de lazo cerrado, que no puede transformarse en un círculo. Lo que los matemáticos han intentado hacer es clasificar los nudos para poder distinguir los diferentes tipos existentes. Algunas de las ideas de importancia que han sido formuladas hasta el momento son:

• un nudo no puede existir en más de tres dimensiones

• el nudo más sencillo posible es el nudo trébol, que tiene tres entrecruzamientos. Se produce en versiones hacia la izquierda y hacia la derecha, que forman entre sí imágenes especulares.

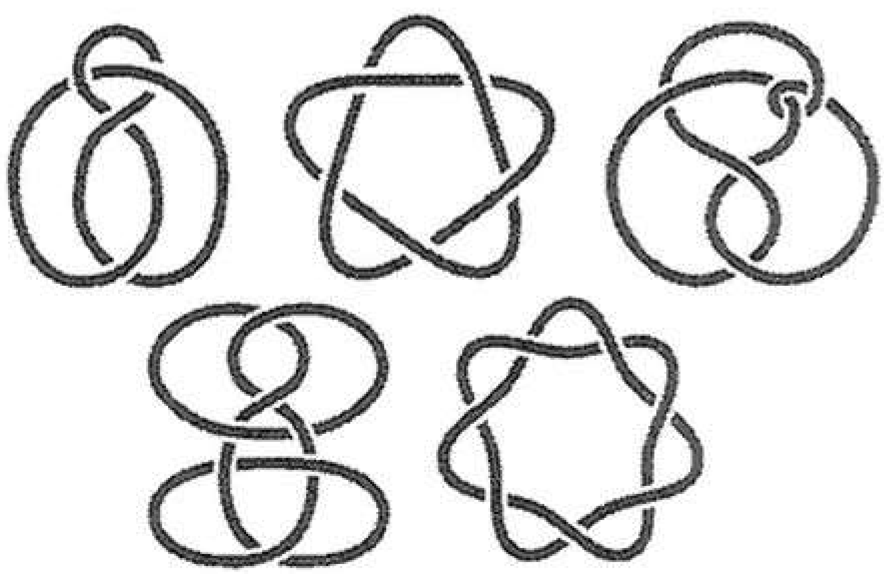


El nudo trébol

• sólo existe un nudo con cuatro entrecruzamientos.

• sólo existen dos tipos de nudos con cinco entrecruzamientos.

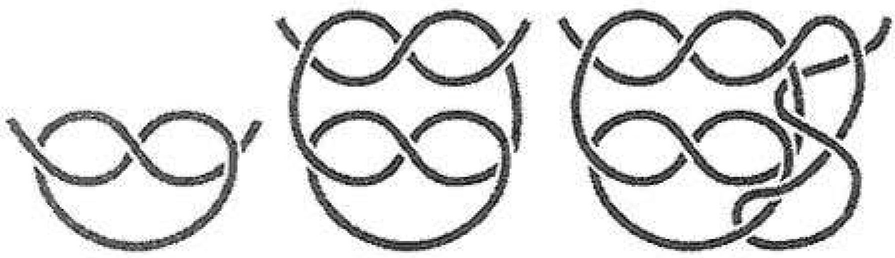
• hasta el momento se han identificado más de doce mil nudos con trece o menos entrecruzamientos, sin contar las imágenes especulares.



De izquierda a derecha: el primer nudo tiene 4 entrecruzamientos, el segundo, 5, el tercero, 6, y el cuarto y el quinto tienen 7.

• Observe el diagrama siguiente. Estos nudos son imágenes especulares entre sí. Cualquiera creería que, al ser opuestos, se desharían mutuamente al juntarse. ¡Pruébelo! (Simplemente pasan uno a través del otro y permanecen sin cambio).

• Ahora observe el nudo Chefalo o falso nudo. ¿Qué ocurre al tirar de los extremos? (Los nudos se desarman).



El estudio de los nudos en el campo de la topología trata de explicar estas diferentes propiedades. Los ordenadores han entrado en escena. El *Geometry Supercomputer Project*[40] está empleando tecnología avanzada de ordenador para estudiar y producir representaciones visuales tridimensionales de formas y ecuaciones matemáticas, tales como nudos toroidales y fractales.

Los matemáticos han desarrollado otros métodos para clasificar y probar nudos.[41] Ahora observan la sombra que arroja y escriben

[40] Un grupo internacional de matemáticos y científicos que trabajaban en forma conjunta con matemáticos puros a través de redes de comunicación para resolver difíciles problemas de geometría. *Science News*, vol. 133, p. 12, enero 3, 1988.

[41] Un “nudo” que puede ser llevado a no tener retorcimientos ni cruces, es decir, transformado en un lazo, o es un círculo o está desanudado.

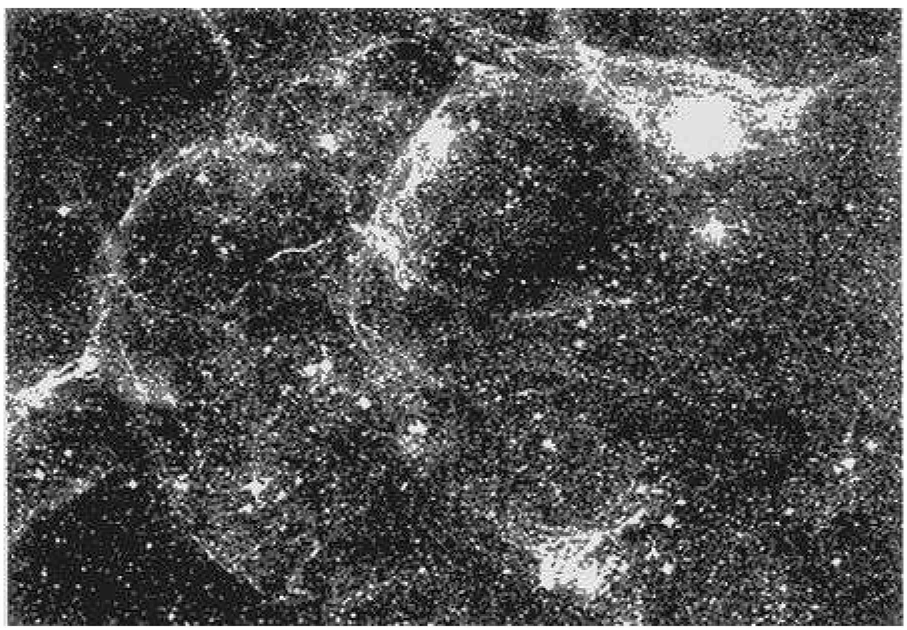
una ecuación que la describe.[42] Recientemente se han descubierto algunas conexiones interesantes que vinculan la teoría de nudos con la biología molecular y la física. Los científicos han usado los descubrimientos matemáticos y aplicado las nuevas técnicas de la teoría de nudos al estudio de la configuración del ADN: han descubierto que las cadenas de ADN pueden formar lazos que, a veces, están anudados. Ahora los científicos pueden aplicar la teoría de nudos para decidir si la cadena de ADN que están observando ya ha aparecido antes con otra forma de nudo. También pueden determinar la secuencia de pasos mediante la cual las cadenas de ADN se transforman para producir una configuración en particular. La misma técnica les permite predecir configuraciones aún no observadas. Todos estos descubrimientos pueden resultar de gran utilidad para la ingeniería genética.

De manera similar, la teoría de nudos resulta muy útil en física cuando se estudia la interacción de partículas que semejan nudos. La configuración de un nudo puede emplearse para describir las diferentes interacciones que pueden producirse. Los físicos que exploran la *Teoría del Todo* (TDT), creen que los nudos desempeñaron un papel vital en la creación del universo. En su incesante investigación de la TDT, los científicos intentan desarrollar un modelo matemático que unifique las fuerzas de la naturaleza (electromagnetismo, gravedad, interacción fuerte e interacción débil). Por cierto, están convencidos que la TDT puede

[42] Las primeras ecuaciones de ese tipo fueron hechas por John Alexander en 1928. En la década de 1980 Vaughan Jones hizo descubrimientos adicionales en la ecuación de nudos. *Science News,* vol. 133, p. 329, mayo 21, 1988.

encontrarse. Algunos han dedicado toda su vida de trabajo a la búsqueda de respuestas. En la Teoría del Todo más difundida en este momento, algunos físicos creen que la esencia del universo está ligada a objetos llamados *supercuerdas.* Una versión de esta particular teoría afirma que el universo, todas las formas de materia y de energía, surgieron, desde el instante del Big Bang, a partir de las acciones e interacciones de estas supercuerdas. La teoría describe al universo como de 10 dimensiones (9 dimensiones espaciales y una temporal), con sus elementos constructivos, de materia y energía, formados por cuerdas infinitesimales. Especula, además, con que en el momento del Big Bang las 9 dimensiones eran iguales. Cuando el universo se expandió, sólo 3 de las dimensiones espaciales se expandieron con él. Las otras 6 dimensiones permanecieron sin desplegarse y contenidas en geometrías compactas que miden tan sólo 10^{-33} centímetros de extensión (es decir, 10^{33} dimensiones colocadas lado a lado miden 1 centímetro). Así, se cree que estas cuerdas poseen dentro de ellas seis dimensiones. Los científicos ahora intentan describirlas empleando modelos topológicos de 6 dimensiones. Se cree que estas supercuerdas pueden ser abiertas o cerradas en un lazo simple, y conforman las diferentes formas de materia y energía del universo alterando sus vibraciones y rotaciones. En otras palabras, las supercuerdas se distinguen entre sí por el modo en que vibran y rotan.

La importancia de la teoría de supercuerdas se compara con la de la teoría de la relatividad general de Einstein. Es difícil imaginarse cuatro dimensiones. Einstein planteó que para describir la ubicación de un objeto en el universo es necesario tener en cuenta la longitud, el ancho, la altura y el tiempo. Diez dimensiones son imposibles de imaginar. Pero si pensamos en las dimensiones como números descriptivos que permiten situar la localización y las características de un objeto dentro del universo, todas ellas se toman más comprensibles.



Algunos científicos creen que las supercuerdas pueden explicar la estructura del universo.

Estas ideas de la TDT han estado evolucionando durante veinte años. La gravedad ha sido el factor de demora, porque los cálculos (que incluyen la gravedad) necesarios para respaldar las diversas formas de la teoría producían infinitos matemáticos.[43] El gran

[43] Los infinitos matemáticos pueden aparecer por operaciones tales como dividir un número por

avance se produjo en 1974, cuando John Schartz y Joel Scherks consideraron a la gravedad como un objeto geométrico curvado en la décima dimensión, de manera similar a cómo Einstein describió la gravedad en la geometría de la cuarta dimensión.

La matemática empleada para la investigación de la TDT de supercuerdas es muy potente, y los resultados han sido muy convincentes. Schwartz y Michael Green fueron dos de los principales pioneros en el tema. Han estado trabajando en ella durante más de una década, a pesar del escaso estímulo y respaldo que han recibido de sus colegas, a quienes les resultaba muy difícil aceptar un mundo de diez dimensiones. El trabajo que ambos publicaron finalmente logró que los físicos tomaran la idea con seriedad. Algunos científicos argumentan que los físicos han eludido investigar ("perdiendo" el tiempo) la idea porque el aspecto matemático es muy dificultoso. La supersimetría, los modelos topológicos de seis dimensiones, un universo de diez dimensiones, cuerdas infinitesimales, son algunos de los conceptos necesarios para describir y dar validez a esta teoría. Como resultado, la teoría ha convertido a algunos físicos en matemáticos, y viceversa. Estos son tan sólo los descubrimientos iniciales y las aplicaciones de un campo matemático emergente: el de la teoría de nudos.

cero o elevar cero a la potencia cero.

El edificio de oficinas Oracle, Redwood City, California.

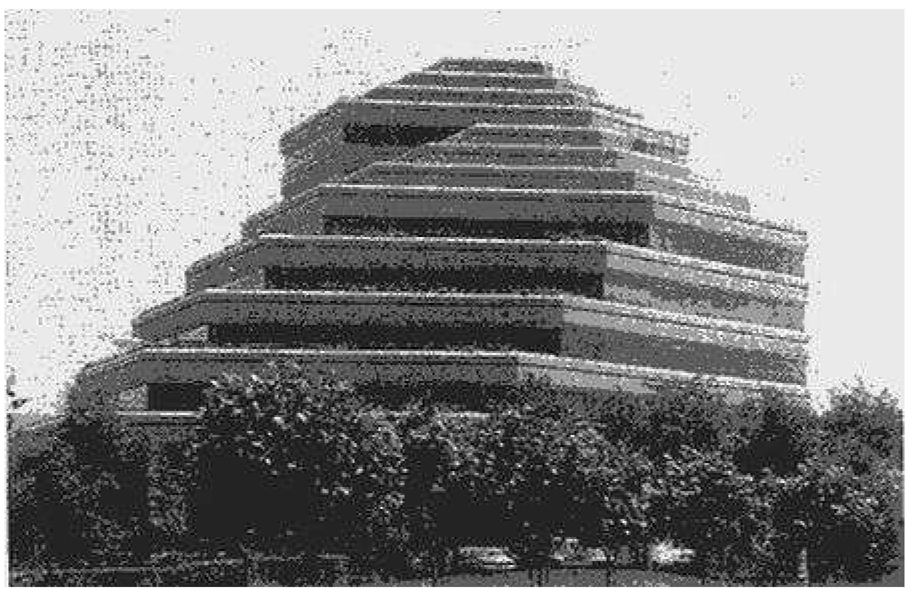
Capítulo 5
Matemática y arquitectura

Contenido:

- *§. Buckminster Fuller, las cúpulas geodésicas y la "buckyball"*
- *§. La arquitectura del siglo XXI: sólidos que llenan el espacio*
- *§. La matemática del arco curvo*
- *§. Arquitectura y paraboloides hiperbólicos*
- *§. La destrucción de la caja y Frank Lloyd Wright*

> *La mecánica es el paraíso de la ciencia matemática, porque con ella llegamos a los frutos de la matemática.*
> *Leonardo da Vinci*

Templo de Kukulkan, Chichen Itzá, Yucatán.



El tema de la pirámide es empleado en el diseño de este moderno edificio de oficinas de Foster City, California.

Durante miles de años la matemática ha sido un instrumento invalorable para el diseño y la construcción. Ha sido un recurso importante para el diseño arquitectónico, y también el medio por el cual el arquitecto podía eliminar las técnicas de ensayo y error en una construcción. Por extensa que parezca la lista que ofrecemos a continuación, sólo anotamos aquí algunos de los conceptos matemáticos que han sido usados en arquitectura a lo largo de los siglos:

pirámides	prismas	rectángulos áureos
ilusiones ópticas	cubos	poliedros
cúpulas geodésicas	triángulos	el teorema de Pitágoras
cuadrados, rectángulos	paralelogramos	círculos, semicírculos
esferas, semiesferas	polígonos	ángulos
simetría	curvas parabólicas	curvas catenarias
paraboloides hiperbólicos	proporción	arcos
centro de gravedad	espirales	hélices
elipses	teselados	perspectiva

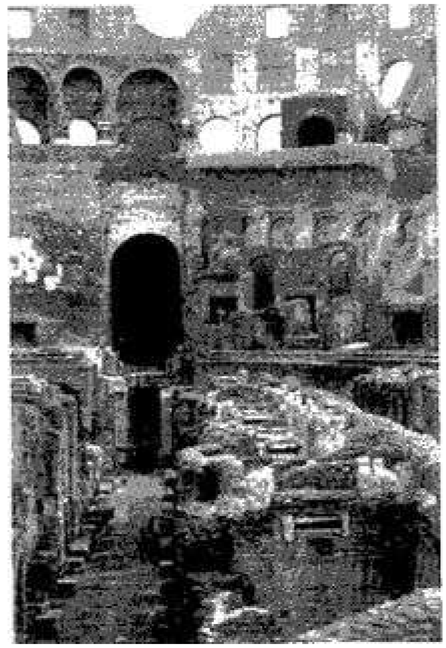
El diseño de una estructura está influido por su entorno, por la disponibilidad y el tipo de materiales, y por la imaginación y los recursos del arquitecto.

Santa Sofía, Estambul, Turquía.

Algunos ejemplos históricos son:

- La tarea de hacer cálculos para dimensión, forma, número y disposición de las piedras para la construcción de las pirámides de Egipto, México y el Yucatán, basada en el conocimiento de los triángulos rectángulos, cuadrados, el teorema de Pitágoras, volumen y estimación.
- La regularidad del diseño de Machu Picchu no habría sido posible sin planos geométricos.
- La construcción del Partenón se basó en el uso del rectángulo áureo, ilusiones ópticas, mediciones de precisión y en el conocimiento de las proporciones, para poder cortar módulos de columnas con especificaciones exactas (siempre logrando

que el diámetro midiera un tercio de la altura del módulo).



El Coliseo romano, Roma, Italia.

- La exactitud geométrica de la disposición y la localización del antiguo teatro de Epidauro fue especialmente calculada para optimizar la acústica y maximizar la visión de la audiencia.
- El uso innovador de círculos, semicírculos, semiesferas y arcos se convirtió en la principal idea matemática introducida y perfeccionada por los arquitectos romanos.
- Los arquitectos bizantinos incorporaron con elegancia los conceptos de cuadrado, círculo, cubo y semiesfera con arcos, como los utilizados en la iglesia de Santa Sofía en Constantinopla.
- Los arquitectos de las catedrales góticas usaron la matemática para determinar el centro de gravedad y así dar forma a un diseño geométrico adaptable, con techos abovedados que se encontraban en un punto que transmitía el enorme peso de la

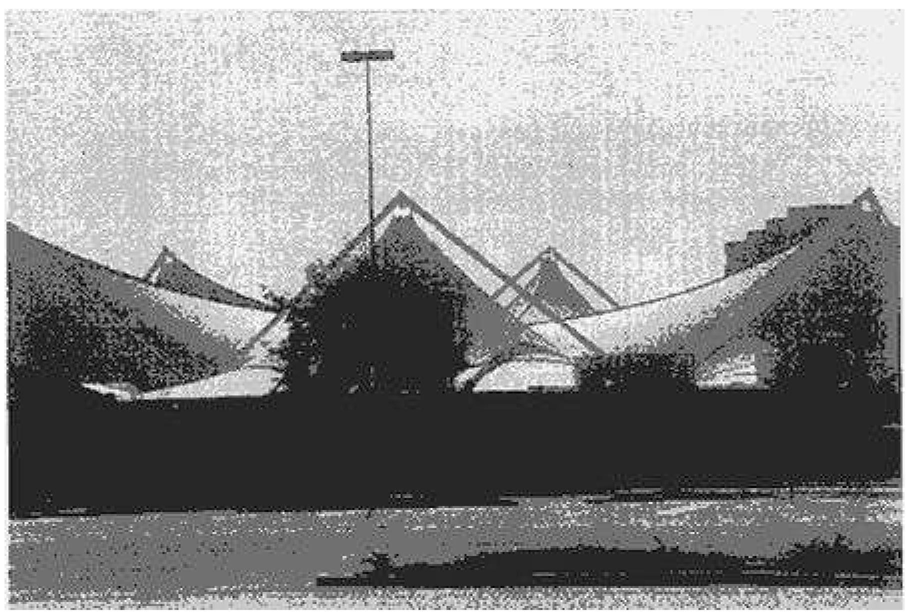
estructura de piedra al suelo en vez de producir cargas horizontales.

- Las estructuras de piedra del Renacimiento muestran un refinamiento de la simetría, basado en juegos de luz y sombra y en sólidos y vacíos.

Con el descubrimiento de nuevos materiales de construcción se adaptaron y usaron nuevas ideas matemáticas para maximizar el potencial de esos materiales. Utilizando el amplio espectro disponible —piedra, madera, ladrillo, cemento, hierro, acero, materiales sintéticos como el plástico, cemento reforzado, hormigón premoldeado— los arquitectos han podido diseñar virtualmente cualquier forma.

Cada una de las plantas de los tres niveles de esta casa están diseñadas a partir de la superposición de dos triángulos equiláteros. El motivo del triángulo se repite en todos los soportes interiores y aberturas.

En la época moderna hemos sido testigos de la construcción del paraboloide hiperbólico (St. Mary's Cathedral, San Francisco), de las estructuras geodésicas de Buckminster Fuller, de los diseños modulares de Paolo Soleri, de estructuras sólidas sintéticas que imitan las tiendas de los nómades, de los cables de curva catenaria que sostienen el Palacio de los Deportes Olímpicos de Tokio, e incluso de una casa octogonal con un cielorraso abovedado elíptico.



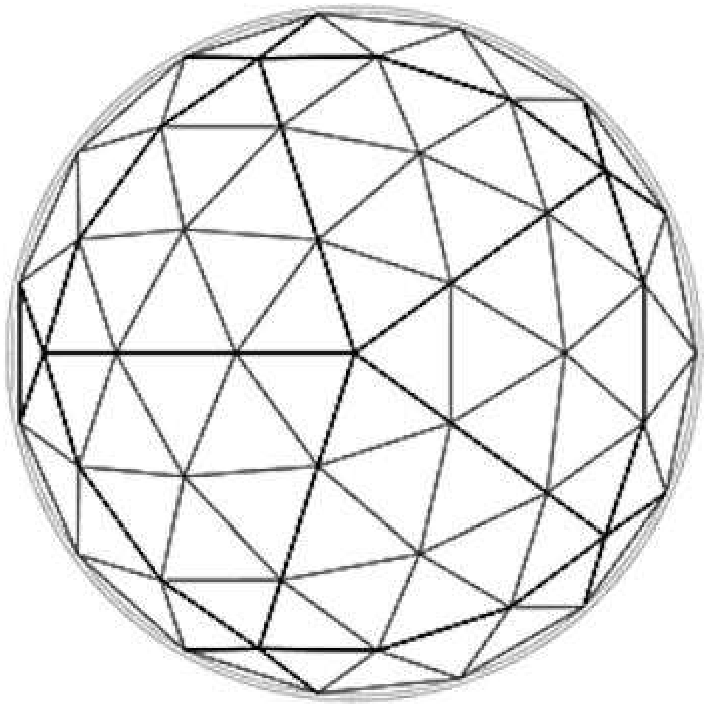
Estas estructuras semejantes a tiendas de nómades ilustran el empleo de nuevos métodos y materiales de construcción. Fashion Island, Foster City, California.

La arquitectura es un campo en evolución. Los arquitectos estudian, refinan, mejoran y vuelven a usar ideas del pasado, y también crean ideas nuevas. En el análisis final, un arquitecto tiene la libertad de imaginar cualquier diseño, siempre que existan los materiales y las ideas matemáticas necesarias para soportar la estructura.

§. Buckminster Fuller, las cúpulas geodésicas y la "buckyball"

Richard Buckminster Fuller fue inventor, diseñador, ingeniero y escritor. Fue un arquitecto con ideas, un hombre cuyas visiones con frecuencia se adelantaban a su época. Entre sus ideas e invenciones encontramos las siguientes creaciones, que fueron las que le dieron mayor renombre:

- el *auto Dymaxion,* con motor atrás y tracción delantera.
- *Casas Dymaxion y Wichita*, precursoras de las casas prefabricadas para producción masiva, cuya construcción minimizaba el uso de materiales y maximizaba el espacio. Estaban diseñadas como unidades de vivienda absolutamente transportables.
- en el campo de la cartografía creó el Mapa Energético Mundial de 1940, el *Mapa Estratégico Mundial* de 1943 para la revista *Life*, y el *Mapa Aéreo y Oceánico Dymaxion* de 1954.
- la cúpula geodésica (una cúpula con una estructura basada en triángulos).
- la tensegridad.



La cúpula geodésica fue el mayor éxito comercial de Fuller, y su nombre se volvió sinónimo de su invención. En su solicitud de patente, él mismo describía su invención de la siguiente manera: "*Mi invención se relaciona con una estructura destinada a encerrar un espacio. Un buen índice del desempeño de la estructura de cualquier edificio es el peso estructural requerido para proteger del clima un metro cuadrado de piso. En diseños convencionales de pared y techo, la cifra es con frecuencia de 2500 kg por metro cuadrado. He descubierto la manera de hacer el mismo trabajo con alrededor de 4 kg. por metro cuadrado, construyendo una estructura con una piel de material plástico*".[44] El logro más importante de Buckminster Fuller fue la conexión que vio entre los poliedros

[44] Su patente fue aceptada en junio de 1954 y recibió regalías por las cúpulas geodésicas construidas a lo largo de los 17 años en que fue efectiva. De *Buckminster Fuller*, Martin Pawley, Taplinger Publishing Co., New York, 1990.

tradicionales,[45] la esfera y la arquitectura. Esta conexión se materializó en la cúpula geodésica.

Reconstruyamos ahora un posible escenario de la evolución de sus cúpulas geodésicas. Empezando por el icosaedro, Fuller subdividió sus caras en triángulos equiláteros. Después circunscribió al sólido con una esfera y proyectó los vértices sobre la misma: los triángulos equiláteros no permanecen congruentes. Supongamos que truncara la superficie de este nuevo sólido. En ese caso, la forma de la estructura geodésica se aproxima más a la forma de la esfera, y por lo tanto también a las propiedades de la esfera. Una esfera tiene la mínima superficie posible para un determinado volumen. En consecuencia, la cúpula geodésica abarca más espacio con menos gasto de material que las formas arquitectónicas tradicionales. Además, aparece un nuevo tipo de estabilidad. Como en el caso de una burbuja de jabón, la tensión superficial empuja hacia adentro contra el empuje hacia afuera del aire encerrado y comprimido, consiguiendo el equilibrio entre la tensión y la compresión. El diseño de la arquitectura tradicional requiere la consideración del peso y del apoyo. La gravedad desempeña un rol prominente. En la estructura geodésica, el rol de la gravedad es casi irrelevante. No obstante, había una desventaja. Las cúpulas geodésicas no eran esferas perfectas, por lo que sus dimensiones tenían límites. Pero cuando Fuller combinó la idea de las cúpulas geodésicas con la tensegridad[46] (integridad tensional), el tamaño llegó a ser enorme.

---

[45] Los poliedros son sólidos geométricos cuyas caras son polígonos.
[46] De *Buckminster Fuller,* Martin Pawley, Taplinger Publishing Co., New York, 1990.

Estas estructuras no se sostienen por medio de columnas, vigas, arcos o contrafuertes, sino con fuerzas de tensión (la acción de la fuerza de la carga). La invención y patente que Fuller consiguió para las construcciones livianas basadas en la tensegridad eliminó prácticamente las limitaciones de tamaño.

Para ilustrar las posibilidades de estas megaestructuras, consideremos la cúpula hemisférica propuesta por Fuller, de un diámetro de 3 kilómetros, que serviría para abarcar una parte de la ciudad de New York. En 1963, él mismo describió su instalación de la siguiente manera:

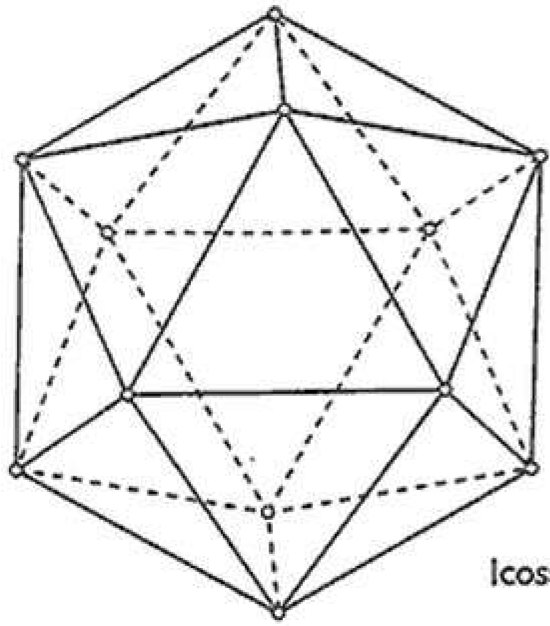
> *"Una flota de dieciséis grandes helicópteros Sikorsky podrían colocar todos los segmentos en posición hasta armar una cúpula de 1,6 km. de altura y 3 km de diámetro, en tres meses, con un costo de 200 millones de dólares... una superficie de cincuenta manzanas que incluye toda la parte alta de Manhattan, donde están los rascacielos. Una cúpula de este tipo impediría que la nieve y la lluvia cayeran sobre la superficie protegida, y controlaría los efectos de la luz solar y la calidad del aire..."*[47]

La cúpula geodésica de Fuller, sin embargo, sufrió numerosos reveses, tanto en el aspecto financiero como respecto a su aceptación.

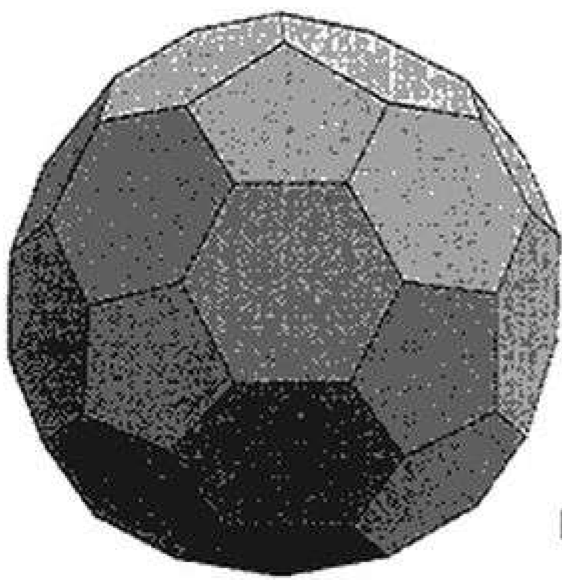
Aunque su donación de la "patente" de la Casa Dymaxion al Instituto Norteamericano de Arquitectura fue rechazada en 1928, su visión filosófica que tendía a proporcionar viviendas económicas fue

[47] Idem.

una fuerza de importancia.



Icosaedro



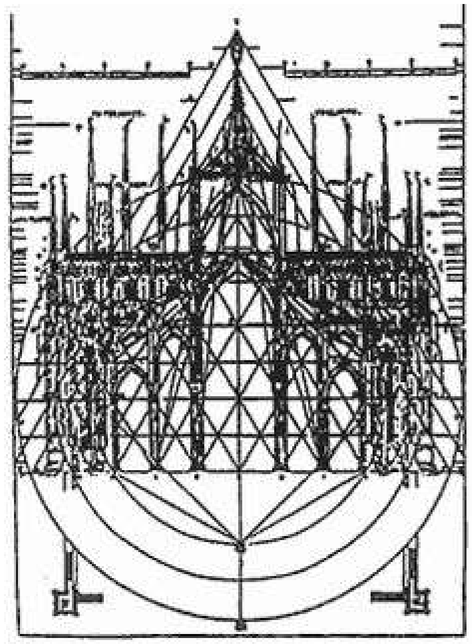
Icosaedro truncado

Durante los cincuenta años siguientes de su carrera, recibió títulos honorarios de arquitectura, becas, premios y aplausos. Igualmente importante fue el reconocimiento que se le otorgó por las 300.000 cúpulas geodésicas que se basaron en las patentes de Fuller, entre

1954 y hasta su muerte, en 1983. Las estructuras geodésicas de Fuller no se limitan al tamaño de las megaestructuras. También se han encontrado estructuras geodésicas a nivel molecular. La buckyball, también llamada *buckminsterfullereno,* es un poliedro químico sintetizado en la década de 1990. Está formado por 60 átomos de carbono localizados en los vértices de un icosaedro truncado.[48] En la actualidad la buckyball se sintetiza en forma sólida para usarla como lubricante, catalizador, punta de scanner microscópico, o en nuevas células de repuesto de baterías. Los científicos también están modificando la estructura arquitectónica de la buckyball (de manera análoga a cómo Fuller modificó el poliedro) para producir nuevas moléculas teóricas que serían más estables, más livianas y más fuertes.[49] El ahorro de materiales, ligereza, estabilidad y fuerza de la cúpula geodésica son las mismas características que interesan a los investigadores en estas nuevas formas moleculares.

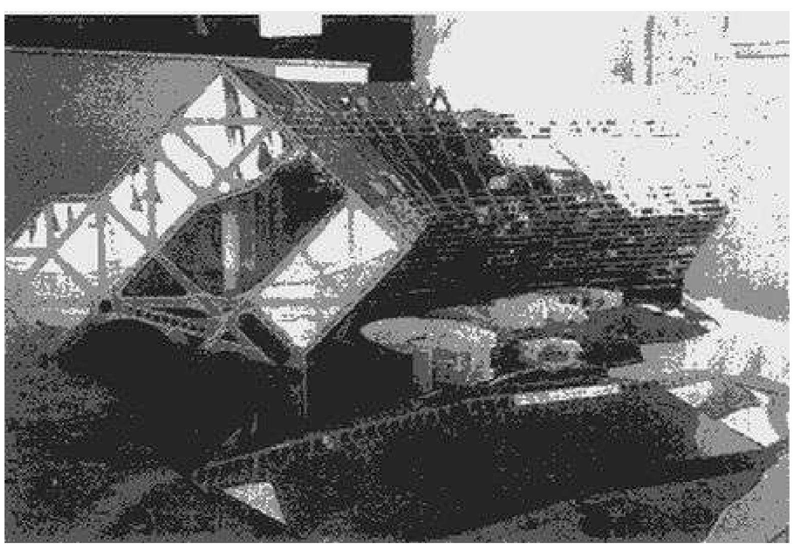
§. La arquitectura del siglo XXI: sólidos que llenan el espacio

[48] También se la llama *soccerene* (fútbolene) por su parecido a una pelota de fútbol.
[49] La molécula de 168 carbonos llamada *buckygym* (por asociación con *Junglegym,* un juego de construcción para niños formado por varillas y barras) fue creada por los investigadores del IBM Thomas J. Watson Research Center en Nueva York.



Planos góticos del maestro arquitecto de Duomo de Milán, Cesar Cesariano.

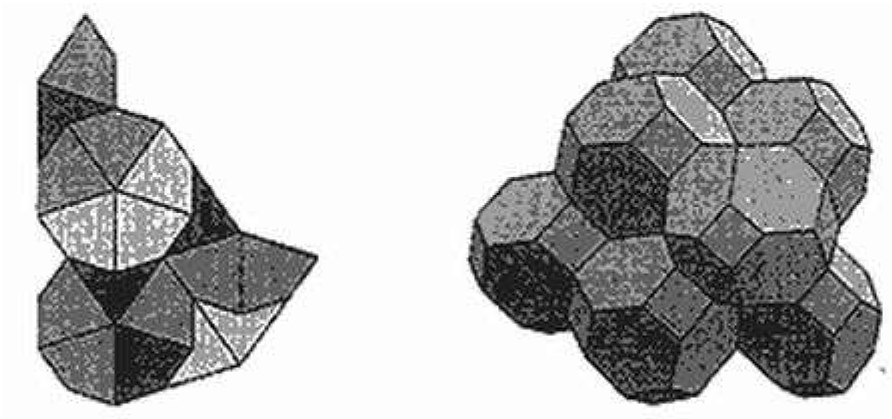
A lo largo de los siglos el triángulo, el cuadrado y el rectángulo han desempeñado roles de importancia en el diseño arquitectónico. La madera y la piedra se contaron entre los primeros materiales naturales que los constructores emplearon para hacer sus refugios. Como el triángulo y los ángulos rectos daban la mayor estabilidad que se conocía entonces, estas formas fueron utilizadas en estructuras como las pirámides de Egipto y de Yucatán. A medida que el conocimiento, la comprensión y los materiales fueron evolucionando, se desarrollaron nuevas formas y diseños. Por ejemplo, al cabo de siglos, el descubrimiento de la dinámica de las curvas y el arco permitieron que se emplearan la piedra y la madera para introducir esas características en estructuras tales como los acueductos romanos y las catedrales góticas. Con la introducción del acero, el hierro, el vidrio, el cemento y los ladrillos, se hicieron posibles nuevos y audaces diseños. Más tarde, los plásticos y los materiales sintéticos, junto con las estructuras tenso-integradas, permitieron a los arquitectos tomar en cuenta toda una nueva familia de formas. Nuestro conocimiento matemático, junto con los modelos por ordenador y una cada vez más profunda comprensión de las fuerzas físicas que actúan sobre una estructura, han contribuido grandemente a la evolución arquitectónica. Sin embargo, las formas de la arquitectura siguen siendo los objetos tridimensionales de la matemática. Muchos de ellos proceden de la geometría euclidiana, como en el caso de los paralelogramos, las pirámides, los conos, las esferas o los cilindros. Otras formas son más exóticas, y emplean sólidos curvos, tiendas y geodésicas. Todos estos objetos son usados por los arquitectos para llenar el espacio y para crear espacios habitables.



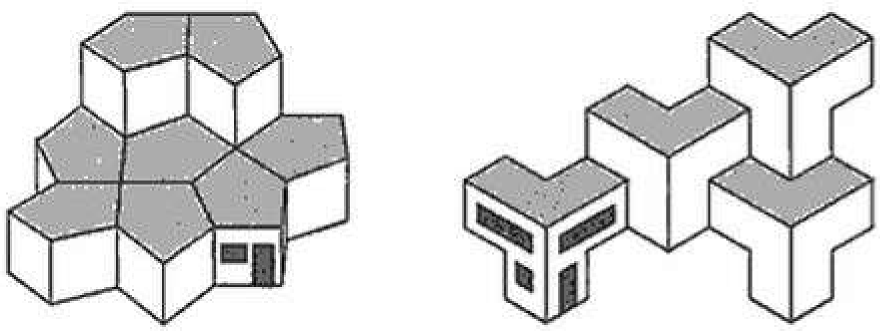
Este modelo del proyecto visionario de Paulo Soleri se exhibe en Arcosanti, Arizona.

¿Qué tipos de estructuras y de espacios habitables se diseñarán en el siglo XXI? ¿Qué objetos pueden llenar el espacio? Si las características del diseño involucran prefabricación, adaptabilidad y expandibilidad, las ideas de teselado del plano y del espacio desempeñan roles prominentes. Cualquier forma que pueda teselar un plano, como el triángulo, el cuadrado, el hexágono y otros polígonos, puede adaptarse para formar unidades espaciales de vivienda. Más tarde, a medida que se presente la necesidad, pueden agregarse unidades adicionales con paredes comunes. Las posibilidades de diseño pueden volverse muy interesantes, dejando patios o zonas descubiertas para la entrada de luz y para proporcionar acceso al exterior. Por otra parte, los arquitectos tal vez deseen tomar en cuenta sólidos que llenan el espacio, entre los cuales los más tradicionales son el cubo y el paralelepípedo rectangular. Algunos diseños modulares pueden incluir el dodecaedro rómbico o el octaedro truncado.

La cantidad de opciones de que ahora disponen los arquitectos complican el desafío de decidir cuáles son los sólidos que funcionan mejor juntos para llenar el espacio para optimizar los diseños, la estética y la creación de áreas habitables confortables. Los diseños y proyectos de arquitectos como Paulo Soleri, David Greene, Pier Luigi Nervi, Arata Isozaki, I. M. Pei y otros, se prestan al empleo de nuevos materiales y de audaces formas geométricas. Ahora, al igual que en el pasado, la factibilidad de una estructura está condicionada por las leyes de la matemática y la física, que actúan como instrumentos y como varas de medición.



Mosaicos de Penrose que llenan el plano y octaedro truncado que llena el espacio.



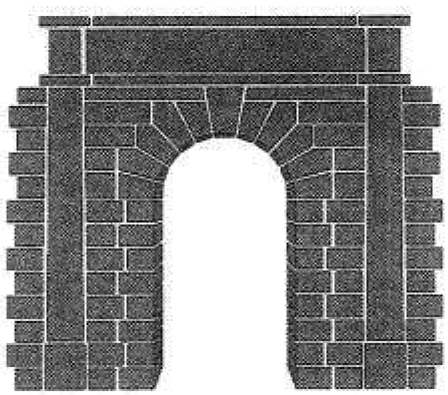
La ilustración de la izquierda muestra el modo en que estos pentágonos, al teselar un plano, pueden adaptarse y convertirse en prismas pentagonales que se transforman en unidades modulares que llenan el espacio. A la derecha se ve una estructura formada a partir de la modificación de un cubo.

§. La matemática del arco curvo

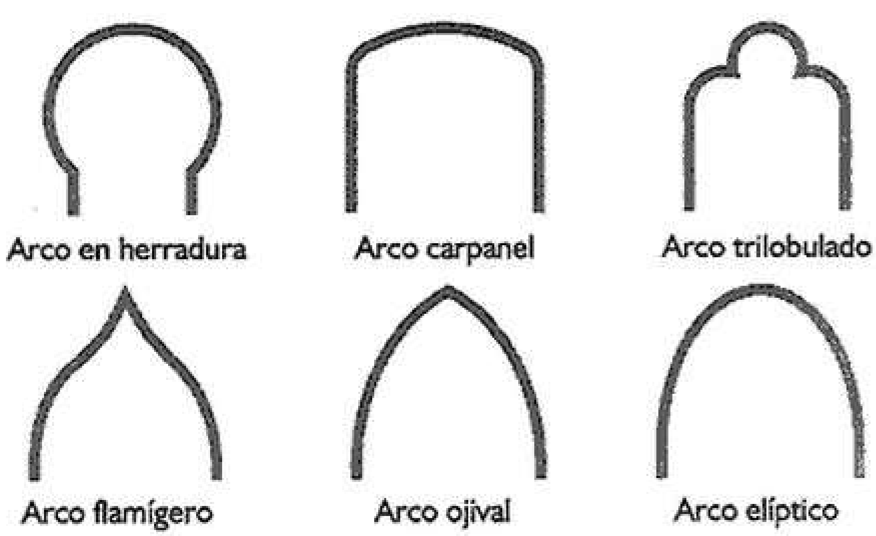
> *Detrás de las paredes, juegan los dioses; juegan con números, de los que está hecho el universo.*

Le Corbusier (1887-1965)

El arco es un elegante triunfo de la arquitectura. A lo largo de los siglos ha adoptado la forma de muchas curvas matemáticas (como el círculo, la elipse, la parábola, la catenaria) para convertirse en: arco semicircular, ojival, parabólico, elíptico, apuntado o equilátero, segmental, de pechina, peraltado, transverso, en herradura, trilobulado, gemelo, de triunfo, de descarga o arbotante, triangular, diafragma, carpanel, voladizo o falso.



Arco semicircular o de medio punto

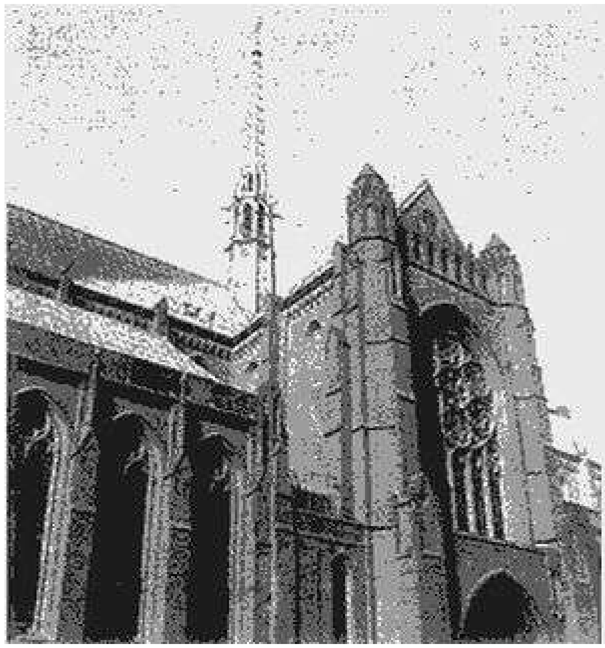


El acueducto romano de Segovia, España, construido con 148 arcos de 27 metros de altura.

En esencia, el arco es un método arquitectónico para abarcar el espacio. La naturaleza del arco permite que la tensión fluya de manera más pareja por toda la estructura, evitando de ese modo la concentración en el centro. Las dovelas (piedras en forma de cuña), también llamados piedras de arco, forman la curva del arco. En el centro está la clave. Todas las piedras forman un mecanismo de cerrojo bajo la acción de la gravedad. La fuerza de gravedad hace que los lados del arco tiendan a abrirse, provocando una fuerza de empuje que está contrarrestado por la fuerza de las paredes o de los contrafuertes.

Hasta la invención y el empleo del arco, las estructuras arquitectónicas se basaban en columnas y vigas, como se ve en la arquitectura griega, o en piedras escalonadas, como se ve en las pirámides de Egipto. Los arquitectos romanos fueron los primeros en usar extensivamente y desarrollar el arco semicircular. Si se le agrega al arco el descubrimiento, también crédito de ellos, del cemento y el ladrillo, se entiende que hayan producido una revolución arquitectónica. Con el uso del arco, de bóvedas y cúpulas, los romanos pudieron eliminar las vigas horizontales y las columnas interiores. El arco les permitía redistribuir el peso de la estructura, colocándolo sobre menos soportes, aunque más grandes. En consecuencia, se amplió el espacio interior. Antes del arco, una estructura debía ser necesariamente sostenida por columnas interiores y exteriores, y las distancias entre columnas debían calcularse cuidadosamente para que la viga no se derrumbara por exceso de peso.

Los arcos romanos se basaban en la forma circular. A lo largo de los siglos, los arquitectos empezaron a desviarse del círculo, primero hacia el arco elíptico (u oval), después hacia el arco en punta. Como resultado, las estructuras se hicieron más altas, permitiendo la entrada de más luz, y abarcando un espacio mayor. La forma del arco determinaba cuáles eran las partes de la estructura que soportaban el peso. En tanto el arco semicircular romano desviaba la carga hacia las paredes, el arco gótico, en punta, hacía que la carga fluyera hacia los contrafuertes del exterior del edificio, posibilitando de ese modo una mayor altura de los techos.



Catedral de la Gracia, San Francisco, California.

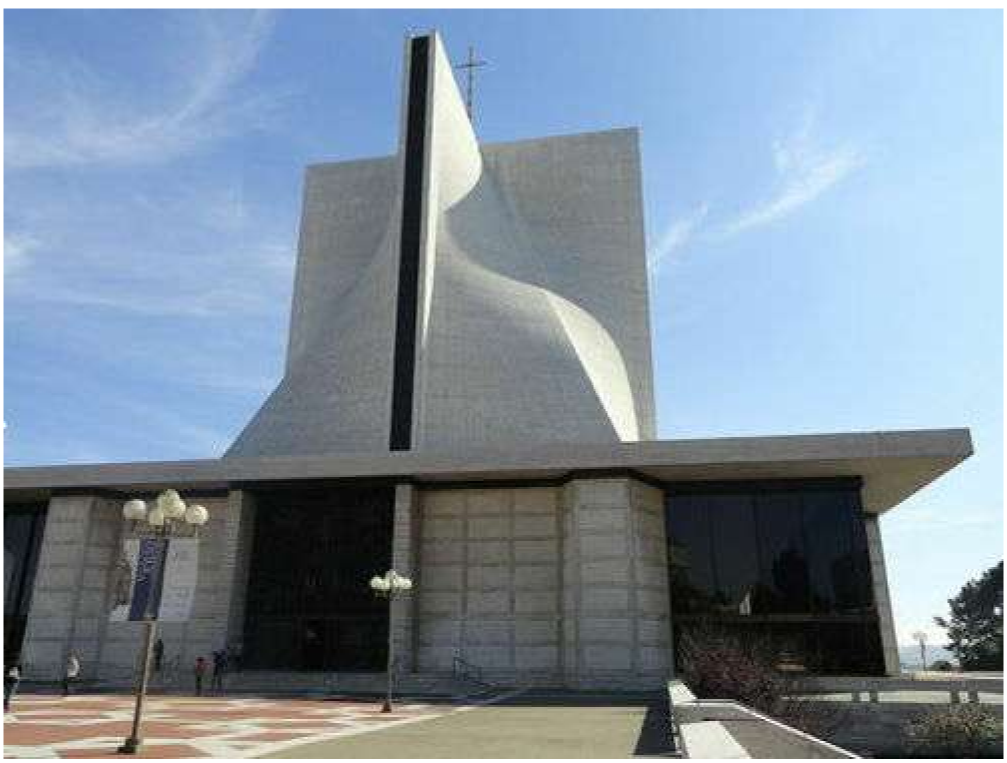
El arco no ha pasado de moda. Como ocurre con todas las ideas arquitectónicas, su concepto y su uso siguen en evolución. Con la invención y el uso de nuevos tipos de materiales de construcción, los arquitectos pueden combinar y usar una multitud de curvas y formas matemáticas en sus creaciones.

§. Arquitectura y paraboloides hiperbólicos

Algunas estructuras arquitectónicas han sido diseñadas con formas poco conocidas. Un ejemplo notable es el paraboloide hiperbólico usado en el diseño de la catedral de St. Mary, en San Francisco. La catedral fue diseñada por Paul A. Ryan y John Lee, con Pier Luigi Nervi, de Roma, y Pietro Bellaschi, del M.I.T., como ingenieros consultores.

En la inauguración, cuando le preguntaron a Nervi qué hubiera pensado Miguel Angel de la catedral, éste respondió: “No hubiera pensado nada. Este diseño procede de teorías geométricas que en su época aún no habían sido probadas”.

La parte superior de la estructura es una cúpula paraboloide hiperbólica de 60,5 m^3, con paredes que se elevan 71 metros del suelo, y que están sustentadas por 4 enormes pilares de hormigón que penetran en la tierra hasta una profundidad de 28 metros. Cada pilar soporta un peso de 255 toneladas. Las paredes están hechas con 1680 encofrados premoldeados de hormigón de 128 medidas diferentes. La dimensión del cuadrado de los cimientos es de 77,7 metros de lado.



Catedral de St. Mary, San Francisco, California.

Un paraboloide hiperbólico combina un paraboloide (una parábola girada alrededor de su eje de simetría) y una hipérbola tridimensional.

La ecuación del paraboloide hiperbólico es:

$$y^2 / b^2 - x^2 / a^2 = z / c^2 \text{ con } a, b > 0;\ c \neq 0$$

§. La destrucción de la caja

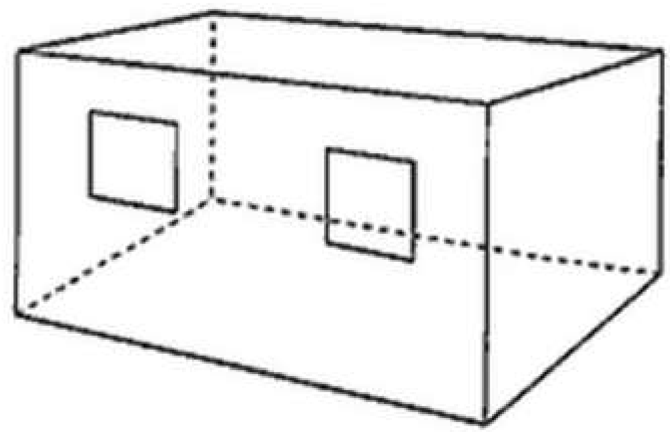
La arquitectura de Frank Lloyd Wright y la liberación del espacio

La obra de Frank Lloyd Wright tiene un estilo definido, aunque sus estructuras son tan diversas que el estilo no se manifiesta en las semejanzas entre sus edificios, sino más bien en la filosofía que sirve de estructura a sus proyectos.

El Centro Cívico de Marín County es uno de sus últimos diseños. Marin County, California.

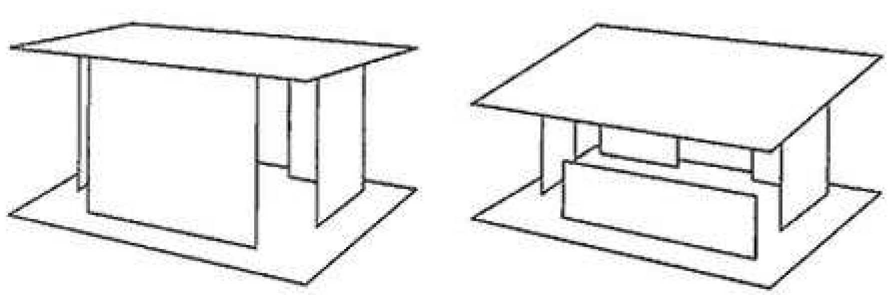
En palabras del propio Wright, *“la arquitectura es el arte científico de hacer que la estructura exprese ideas”.* Su arquitectura ha sido llamada *arquitectura orgánica* porque integra al paisaje, los materiales, los métodos, la intención y la imaginación de manera especial.

Los diseños de estructuras de Wright en las que el espacio exterior y el interior se unen ejercieron un profundo impacto sobre la arquitectura. Wright diseñó edificios en los que el afuera ingresaba al interior. El llamó a este fenómeno la *destrucción de la caja.* Las construcciones existentes, ya fueran privadas o comerciales, eran consideradas por Frank Lloyd Wright como un conglomerado de cajas o de cubos. En la geometría euclidiana, el espacio se define como el conjunto de todos los puntos. Aunque en la geometría euclidiana con frecuencia se emplea un cubo para representar el espacio, sabemos que el espacio no tiene límites ni fronteras. Wright deseaba que su obra diera sensación de espacio... de puntos que fluyeran del interior al exterior. Procuraba cambiar esa sensación de encierro y de aislamiento del mundo exterior que caracterizaba a la arquitectura de caja. Siguiendo esa línea de pensamiento descubrió una manera de eliminar en sus diseños la caja tradicional. Wright se dio cuenta de que no se había utilizado el potencial de ciertos materiales de construcción. Estos materiales —acero y vidrio—, junto con innovadores cambios de diseño, proporcionaron los medios de deshacerse de la caja, permitiendo la fusión del espacio exterior y el interior.



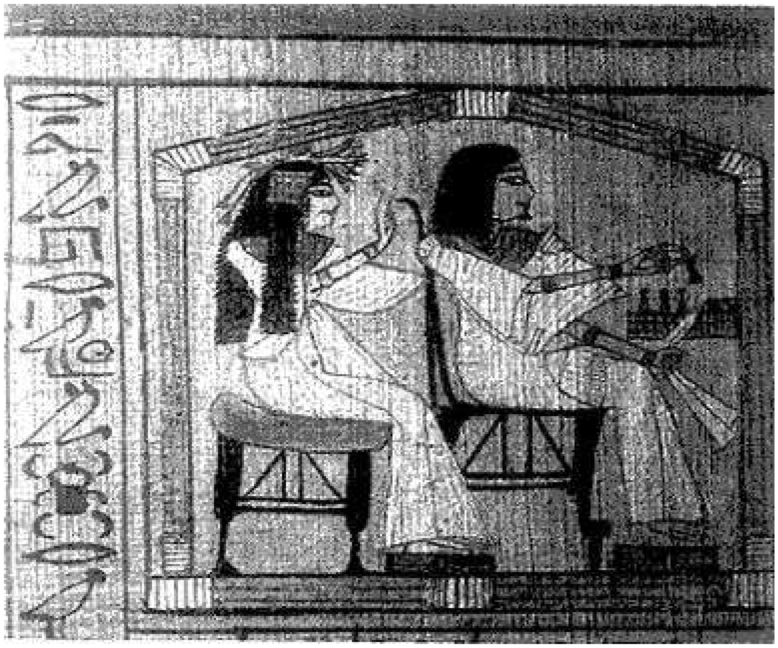
Arquitectura de caja

Los diseños de Wright eliminaron las esquinas de la caja desplazando los apoyos de los ángulos y colocándolos a lo largo de las paredes mediante vigas en voladizo. Así, los ojos de los habitantes no se veían limitados o arrastrados hacia los ángulos, y se permitía que el espacio fluyera. Al reemplazar las columnas y las vigas con voladizos, las paredes dejaron de ser confinantes, y empezaron a verse como independientes y desarticuladas. Cualquiera de estas paredes podía modificarse, acortándose, ampliándose o redividiéndose.



Wright no se limitó a liberar el plano horizontal, sino que también actuó sobre el vertical. Prescindió de las comisas y abrió el techo al cielo. Sus diseños eliminaron el apilamiento y la duplicación de las cajas. En cambio, usó columnas y las integró al techo, creando así una continuidad de las formas. Ahora el espacio, dentro y fuera de una estructura, podía moverse en todas direcciones. La libertad de permitir que el espacio entre y salga de una estructura es la esencia de la arquitectura orgánica. *"Así, la arquitectura orgánica es una clase de arquitectura en la que uno siente y ve que todo esto ocurre como una tercera dimensión... el espacio vivo por medio de la tercera dimensión"*[50]

[50] Frank Lloyd Wright, *An American Architecture,* Edgar Kaufman, editor. New York, Bramhall House, 1955.



La gente siempre ha practicado juegos y resuelto acertijos. Los libros que tratan el origen de los juegos dan numerosos ejemplos de juegos antiguos que todavía se practican en la actualidad. En la ilustración, Ani, un escriba real de la decimonovena dinastía, juega al senet observado por su esposa. El senet era uno de los juegos más populares de esa época, y se lo practicaba en todos los niveles sociales. Desafortunadamente, no existe documentación sobre la manera exacta en que se jugaba, pero se ha establecido una posible versión usando los descubrimientos arqueológicos.

Capítulo 6
El hechizo de la lógica, la recreación y los juegos
Los tres mosqueteros matemáticos

Contenido:

§. Los juegos a los que juegan los matemáticos

§. Algunas recreaciones matemáticas

§. Cuadrados mágicos y más recreaciones

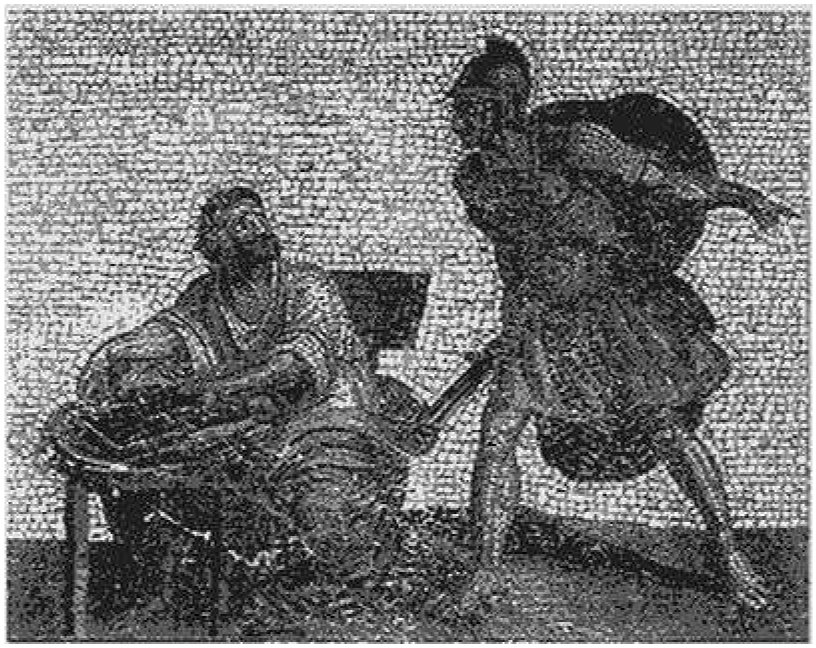
§. El problema de los puentes de Königsberg actualizado

§. La manía por el tablero de ajedrez

§. Algunas antigüedades

La lógica es el arte de equivocarse con confianza.
Morris Kline.

Definitivamente la lógica y la matemática van de la mano. Pero la mayoría de las personas no consideran matemáticos a los juegos. Sin embargo, los juegos y las recreaciones son parte integral de la matemática. El desarrollo de muchas ideas fue resultado de la obstinación por resolver algún acertijo. Ciertas personas parecen empujadas por una fuerza invisible que los lleva a resolver pasatiempos y problemas. Esas personas forman parte del grupo que disfruta de la matemática y se sienten fascinadas por ella. Sin darse cuenta, pueden pasar horas, e incluso días, explorando diferentes ramificaciones de algo que ostensiblemente empezó como un sencillo pasatiempo. La historia da testimonio de que a veces los acertijos, juegos y pasatiempos han conducido a notables descubrimientos, e incluso a la creación de nuevos campos de la matemática. En realidad, el famoso matemático griego Arquímedes murió por estar absorto en un problema matemático. Las páginas que siguen revelarán algunos de los juegos, acertijos y ejercicios de calistenia mental que son favoritos de los matemáticos.



Hacia 212 a.C., Siracusa cayó ante los romanos. Arquímedes estaba en su casa trabajando en un problema matemático. Cuando un soldado romano entró y le ordenó que dejara de trabajar, no le prestó atención. Enfurecido, el soldado lo mató con su espada.

§. Cuentos matemáticos de misterio

Los misterios matemáticos han existido durante siglos. Algunos de los trabajos de Lewis Carroll entran dentro de esta categoría. Desde hace algunos años, estos misterios han accedido al nivel popular con libros tales como los escritos por Martin Gardner o las colecciones de Sam Loyd y H. E. Dudeney.

Los problemas lógicos, como se verá a continuación, también pueden ser embellecidos con relatos.

* * * *

El maestro empezó a leer:

> *Era una de esas semanas en el circo, en las que todo parecía andar mal. Primero, uno de los caballos de las bailarinas acróbatas se mancó. Después, el payaso principal tuvo un ataque porque el hijo de la mujer gorda se metió con su maquillaje. Después Madre y su esposa tuvieron una discusión por el trapecista. El golpe final fue cuando Madre fue encontrado muerto en la carpa grande. Junto a su cuerpo estaba el bastón que el hombre usaba ocasionalmente. Sobre la mesa se veía un vaso de agua volcado, y cerca del cadáver se observaba una diminuta pila de aserrín.*

El maestro dejó de leer y preguntó: "Bien, ¿qué creéis que le ocurrió a Madre? ¿Cómo murió? Podéis hacerme cualquier pregunta para que yo responda 'sí' o 'no'. Así que poneos a pensar, y veamos adonde os lleva la lógica". De inmediato, empezaron a verse manos levantadas. Estas historias lógicas siempre parecían tener éxito, incluso entre los estudiantes más tímidos. Empezaron las preguntas y el drama de la muerte del circo inició su desarrollo.

Un estudiante preguntó: "¿Qué hacía Madre en el circo?"

"Recordad, sólo debéis formular preguntas cuya respuesta sea sí o no", les advirtió el maestro.

"¿Madre era el gerente?", preguntó Carol. "No". "¿Había algún signo de violencia?" "No", repitió el maestro.

"¿Había algo más cerca del vaso?" "Sí, había algo". "¿Es importante saber qué era?" "Sí".

"¿Era un sándwich?", espetó Bill. "No".

"¿Era una píldora?, preguntó Tom. "Sí'.

"¿Murió porque no había tomado su medicina?", insistió Tom. "No, no exactamente", dijo el maestro.

"¿Había un sacapuntas sobre la mesa?", preguntó Terri. "No". "Tenemos que descubrir cómo murió", dijo Terri a sus compañeros. Los estudiantes empezaron a discutir la situación entre ellos, antes de seguir adelante con las preguntas.

"Sabemos que estaba enfermo, ya que tenía que tomar remedios.

Y sabemos que no sufrió una muerte violenta", dijo Tom, analizando la escena de la muerte.

"Así es. Debe haber muerto a causa de su enfermedad", dijo Gary.

Y en ese punto, formuló otra pregunta al maestro. "¿Murió de un ataque cardíaco?" "Sí'.

"Bien, esta vez fue fácil resolverlo", dijo Gary, con tono jactancioso. Pero Bárbara lo interrumpió: "No hemos terminado, Gary. No hemos descubierto la causa de su ataque cardíaco".

"Seguro que sí, no tomó su remedio. ¿No es así, señor Masón?", preguntó Gary.

"Estás equivocado, Gary", respondió el señor Masón.

Los estudiantes volvieron a conferenciar.

"¿Hemos tomado en cuenta todos los hechos iniciales del caso?", preguntó Terri a sus colegas.

"No", dijo Bob, quien rara vez hablaba en clase. "No hemos tomado en cuenta lo de la pila de aserrín, cuál era su trabajo en el circo, lo del bastón, y lo de la esposa de Madre y el trapecista".

"Tienes razón, Bob, tenemos que prestar atención a todo eso", dijo Terri con excitación. "El bastón, el aserrín, el ataque cardíaco y los problemas maritales", masculló Tom, pensando en voz alta. "¡Ya lo tengo! El bastón y el aserrín van juntos. Por alguna razón, el bastón fue cortado con un serrucho, y de allí salió la pila de aserrín". "Sí", respondió el maestro. Tom continuó: "Tal vez Madre se alteró porque alguien arruinó su bastón". "NO".

"¿Tal vez él no sabía que le habían acortado el bastón?", preguntó Bob.

"Así es", replicó el señor Masón.

"Entonces, cuando se puso de pie sosteniendo el bastón, se alteró mucho... ¿pero por qué?", se preguntó Bob.

"¡Porque no era de su medida! ¡Él era demasiado alto para ese bastón!", gritó Carol.

La excitación de sentir que la solución estaba muy cerca cundió entre los estudiantes.

"Hasta ahora, muy bien", dijo el maestro, incitándolos a continuar.

"¿Pero por qué pensar que había crecido pudo alterarlo tanto?", preguntó Gary a sus compañeros.

"Esta vez verdaderamente lo tengo", exclamó Tom, agitando una mano en el aire y conteniendo a duras penas su entusiasmo. "¡Madre era una enano!"

La excitación de los alumnos era contagiosa. El maestro gritó: "¡SI! ¿Qué más?"

Esta vez fue Terri quien alzó la mano. El maestro le hizo un gesto de asentimiento, y ella empezó a resumir el relato.

"Madre era un enano. Su esposa y el trapecista le serrucharon un pedazo del bastón, en un momento en que él no lo estaba usando. Cuando fue a usarlo, resultaba demasiado corto para él. Madre pensó que estaba creciendo, y eso agravó su problema cardíaco. No llegó a tomar su remedio a tiempo. ¿Qué le parece esto, señor Masón?"

"¡Así es! ¡Han hecho un gran trabajo esta vez! Tal vez no lo consigáis con el que os daré la semana próxima", respondió el maestro mientras sonreía.

* * * *

He aquí dos problemitas lógicos para probar con los amigos.

1. Eric entró a un bar, le pidió al camarero un vaso de agua. El camarero lo miró por un momento, después extrajo un revólver y apuntó a Eric. Eric se sobresaltó un instante, luego dijo *"muchas gracias"* y se fue del bar sin haber bebido su vaso de agua. ¿Qué es lo que ocurrió?

2. Cuando Mary llegó a casa fue a la cocina. Soltó de repente un grito, al descubrir a su esposo muerto en el suelo. Junto a él se veía el agua de un recipiente que había estado sobre la mesa y que ahora estaba caído en el piso. La ventana que estaba sobre la mesa de la cocina estaba entreabierta. ¿Qué había ocurrido?

Soluciones

1. Mientras caminaba por la calle, Eric sufrió un terrible ataque de hipo. Entró al bar para tomar un vaso de agua y ver si así podía cortar su acceso. El camarero, al advertir el problema de Eric, pensó que podría cortarle el hipo con un susto. ¡Y lo logró!

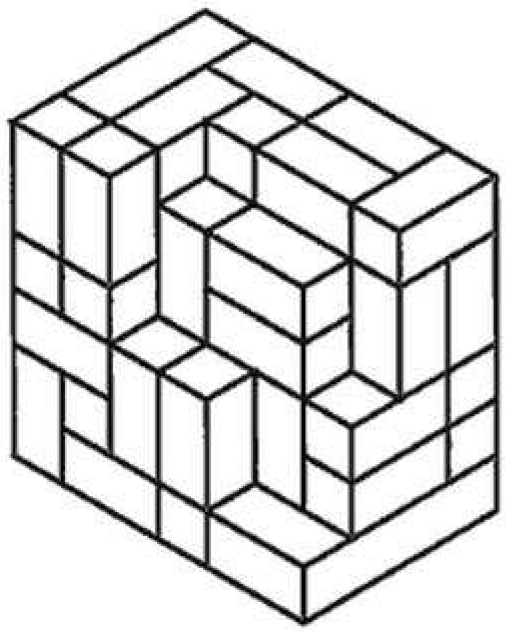
2. El esposo de Mary había muerto muchos años atrás. Ella guardaba sus cenizas en una urna, sobre la mesa de la cocina. Además, sobre la mesa había una pecera con un pececito dorado. Mary había dejado la ventana de la cocina abierta ese día. El gato de su vecina había entrado y, al tratar de cazar el pez, había hecho

caer la pecera y la urna. Las cenizas de su esposo estaban esparcidas en el piso.

§. La lógica en acción

Ilusión volumétrica rectangular

Nuestros ojos se desorbitan con este acertijo. Hay que determinar cuántos bloques de 2×1×1 forman esta estructura.

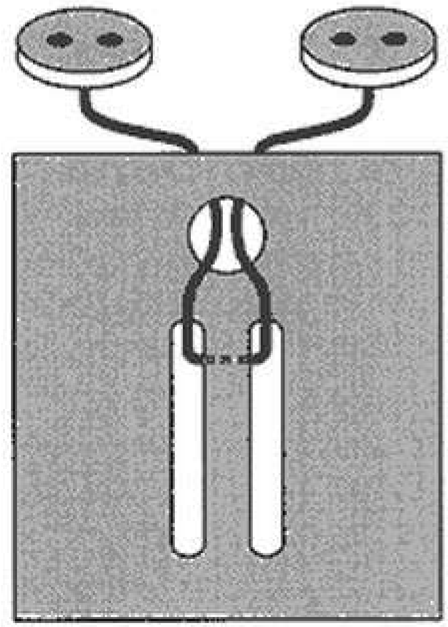


Solución

Hay sesenta y un bloques de 2×1×1 en la estructura.

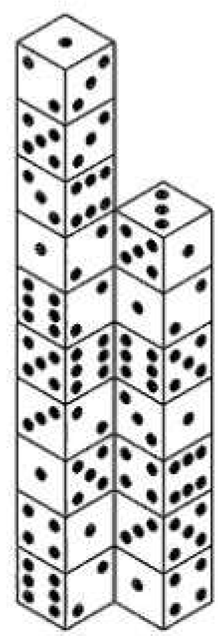
Lo imposible es posible

¿Cómo es posible quitar el cordón con dos botones de la trampa de papel sin quitar los botones del cordón, sin cortar el cordón y sin rasgar el papel?



Solución

La tirilla de papel que queda entre los dos cortes verticales se pasa a través del agujero circular. Entonces es fácil pasar los botones por el espacio que deja la tirilla, quitándolos del papel.



Apilando los dados

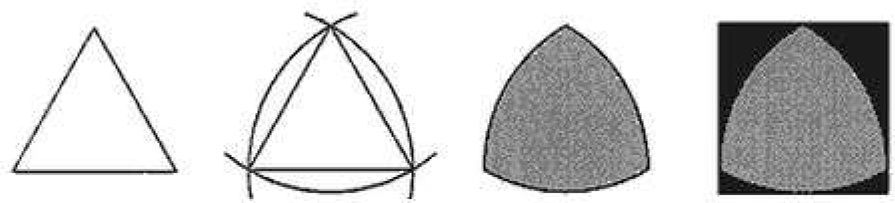
Supongamos que usted pueda caminar alrededor de esta pila de dados y ver todas las caras expuestas. Debe hallar la suma de los puntos que están en las caras ocultas de los dados.

Solución

El truco de este problema es recordar que las caras opuestas de un dado suman 7. La primera pila tiene diez dados, lo que sumaría 70 menos la cara visible del dado superior, que da 69. La segunda pila tiene 7 dados, lo que da 49, menos el tres del dado superior, lo que da un total de 46. La suma total, por lo tanto es de 69 + 46 = 105.

¿Todas las ruedas son redondas?

El triángulo de Reuleaux es un objeto fascinante. Para construirlo, empiece con un triángulo equilátero. Con centro en cada vértice trace arcos de círculo que unan los vértices opuestos, tomando como radio el lado del triángulo. Si hace un modelo en cartón, podrá comprobar que rueda perfectamente. En realidad, lo hace con tanta soltura como si fuera un círculo.



El centro del triángulo de Reuleaux es la intersección de las medianas del triángulo equilátero: puede atravesar ese centro con un lápiz y usarlo como eje. El triángulo de Reuleaux también puede ser inscripto en un cuadrado: cuando se lo coloca dentro de uno que lo circunscribe exactamente, rota mientras los tres vértices tocan los lados del cuadrado sin dejar intersticios. Esta propiedad es aprovechada en el motor Wankel, usado en los autos Mazda, en los que el cuadrado es la cámara de compresión y el triángulo de Reuleaux es el pistón.

Un acertijo puede ser un punto de giro

Simeon Poisson (1781-1840) tenía dificultades para encontrar una carrera que se adecuara a él. Su familia lo instaba a estudiar medicina o leyes, pero parecía carecer del talento y del deseo necesarios. Aparentemente, fue un acertijo el que lo encaminó. Según la historia, mientras hacía un viaje alguien le dio un acertijo similar al que aquí presentamos, y que resolvió con facilidad. Así advirtió que tenía aptitud e interés por las cosas matemáticas, y descubrió que deseaba dedicarse a su estudio. Fue famoso por sus trabajos en mecánica celeste, electricidad y magnetismo, y por su descubrimiento sobre aplicaciones de las integrales y de las series de Fourier. Además, estudió la teoría de la probabilidad y descubrió la distribución de Poisson.

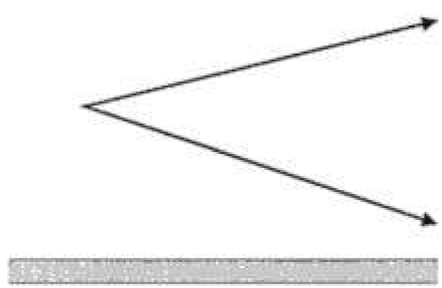
El lechero tenía dos tarros de leche de diez cuartos de galón cada uno. Dos clientes quieren en sus recipientes dos cuartos cada una. Una tiene un recipiente de cinco cuartos y la otra tiene un recipiente de cuatro cuartos. ¿Cómo hace el lechero para resolver el problema? Esta versión del problema fue creada por Sam Loyd.

Solución

10 *cuartos*	10 *cuartos*	5 *cuartos*	4 *cuartos*	
10	10	0	0	*Inicio*
5	10	5	0	
5	10	1	4	
9	10	1	0	
9	10	0	1	
4	10	5	1	
4	10	2	4	
8	10	2	0	
8	6	2	4	
10	6	2	2	*Fin*

¿Es posible?

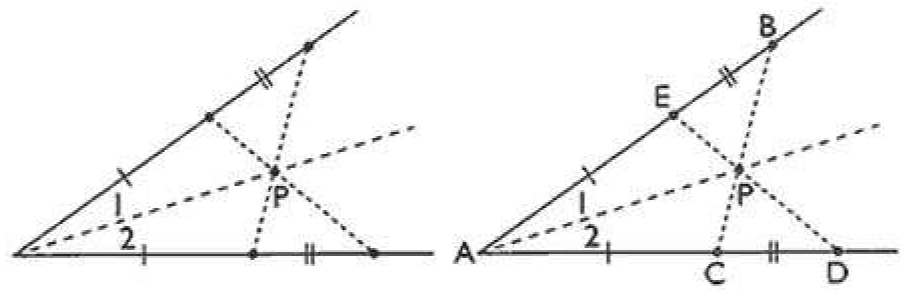
Usando tan sólo una regla en la que pueden estar indicadas las distancias, ¿es usted capaz de biseccionar el ángulo dado, y demostrar por qué está biseccionado?



Solución

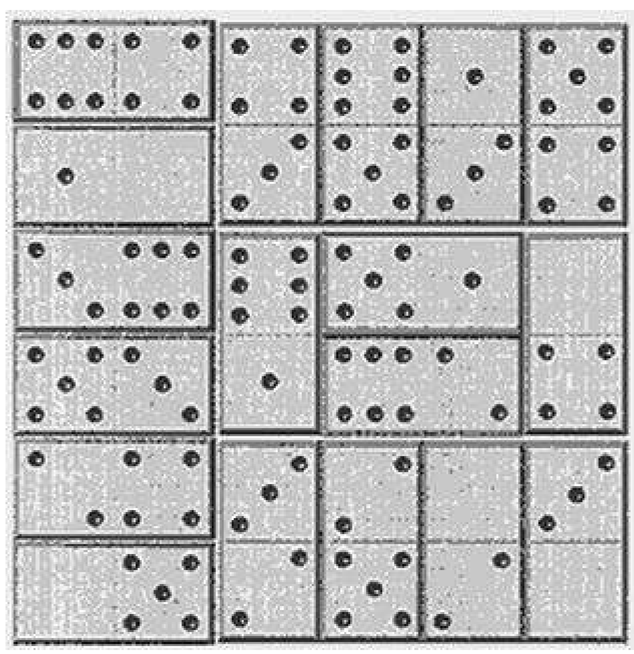
Marque 4 puntos en los lados del ángulo, como se indica en la ilustración, y únalos mediante dos segmentos. El punto de intersección de los segmentos y el vértice del ángulo determinan la línea que lo bisecciona.

Se prueba que $\angle 1 \equiv \angle 2$ demostrando primero que Δ ABC ≡ Δ ADE (dos lados iguales y un ángulo común) → ∠ B ≡ ∠ D→ Δ BEP ≡ Δ DCP (un lado y dos ángulos iguales) → BP ≡ DP → Δ BPA ≡ Δ DPA (tres lados iguales) → ∠1 ≡ ∠2.



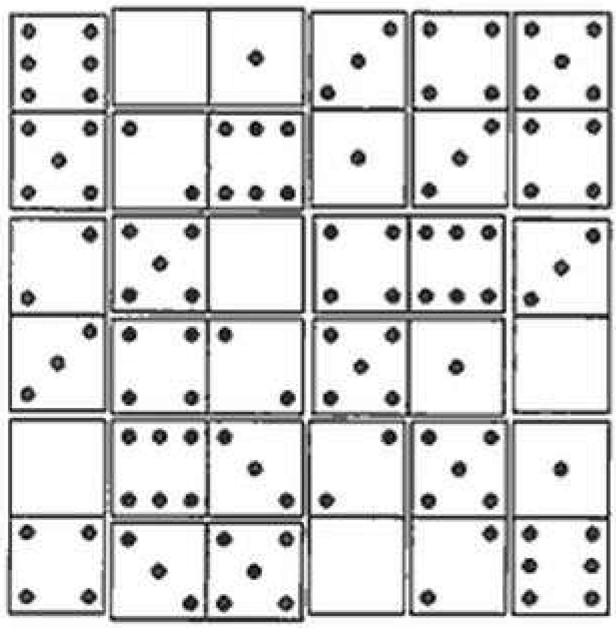
¿Puede hacer un cuadrado latino?

Si ningún número se repite en una fila o columna de un cuadrado de 18 fichas de dominó, se lo denomina cuadrado latino.



El cuadrado que aquí presentamos no es un cuadrado latino, ya que los números se repiten en algunas de las filas o columnas. Por ejemplo, en la fila superior hay dos 6 y dos 4, y en la columna de la derecha hay dos blancos y dos 4. Usted debe reacomodar estas fichas para formar un cuadrado latino.

Solución



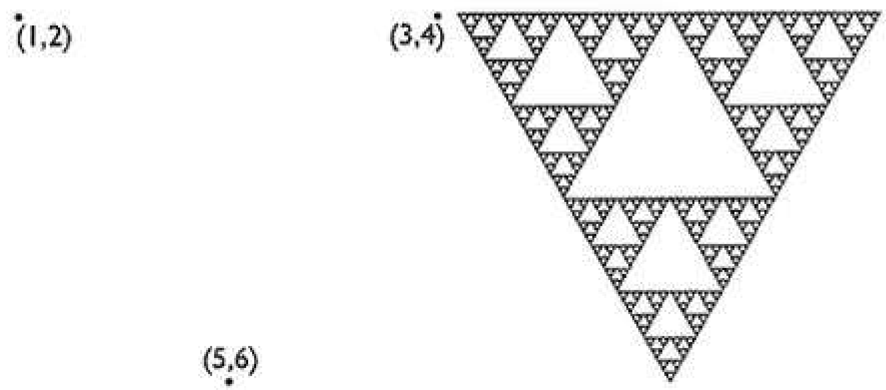
§. Los juegos a los que juegan los matemáticos

El juego del caos

1. Dibuje tres puntos en una hoja y márquelos (1,2); (3,4); (5,6)
2. Elija arbitrariamente un punto de partida. Arroje un dado.
3. Regla: cubra ½ de la distancia entre el punto de partida y el punto que tenga el número que ha salido en el dado que arrojó.
4. Repita indefinidamente el paso 3.

No es la primera vez que el azar termina por conformar algún tipo de orden. El conde Buffon, un naturalista francés del siglo XVIII, demostró que π está relacionado con la probabilidad. Por ejemplo, en 1904 R. Chartres determinó que la probabilidad de que dos números escritos al azar fueran primos, es de $6/\pi^2$. Michael

Bamsley fue el primero que imaginó usar al azar como base del modelado de formas naturales. Así, inventó el juego del caos. Hay muchas maneras de jugar a este juego.



Por ejemplo, se puede emplear una moneda o un dado para generar un suceso aleatorio. Además, las reglas son flexibles. La versión que presentamos arriba usa tres puntos fijos, uno al azar y un dado. El diseño resultante es asombroso. ¡Un proceso caótico produce orden!

Otra variante es elegir al azar la localización de un punto. Se establece una regla para cuando una moneda caiga cara (por ejemplo, avanzar dos unidades hacia la derecha) y otra para cuando caiga cruz. Empiece a tirar la moneda y vea qué ocurre.

Además de descubrir que el límite de un proceso aleatorio (siguiendo un conjunto de reglas) produce fractales, Bamsley también usó este método para producir formas: si se eligen las reglas adecuadas, toda forma puede representarse mediante el juego del caos.

El viejo juego matemático de la ritmomaquia

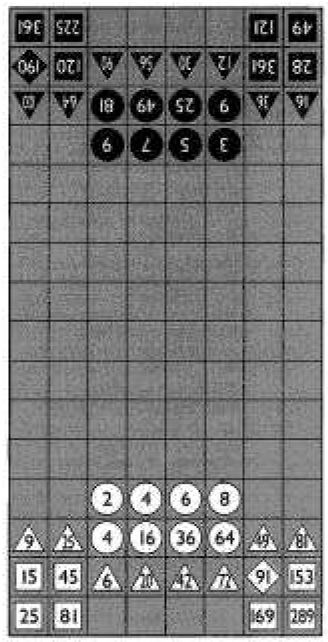
La ritmomaquia puede ser un juego muy matemático. Cuando se juega en niveles avanzados, resultan esenciales una buena comprensión de la teoría de los números, y una poderosa estrategia. El juego de la ritmomaquia se remonta al siglo XI d.C., y posiblemente tuvo su origen en Bizancio o en Alejandría. Durante la Edad Media, la ritmomaquia se convirtió en el juego elegido, y entre los intelectuales era considerado superior al ajedrez.

Disposición física del juego

El tablero es rectangular, y está compuesto de 8x16 casillas cuadradas. Se emplean piezas con forma de círculos, cuadrados, triángulos y seudopirámides. Un jugador tiene piezas blancas, llamadas pares, y el otro tiene piezas negras, llamadas impares. Cada jugador tiene ocho círculos, ocho triángulos, siete cuadrados y una pirámide. La pirámide blanca tiene seis caras, cuyos números suman 91, y está compuesta de dos triángulos (uno con el número 4 y otro con el número 1), dos círculos (con 36 y 25), y dos cuadrados (con 16 y 9). La pirámide negra tiene cinco caras cuyos números totalizan 190, y está compuesta por dos triángulos (con los números 36 y 25), dos cuadrados (con los números 64 y 49) y un círculo con el número 16. La forma de la pieza indica el número de casillas que una pieza puede desplazarse. Por ejemplo, el cuadrado puede desplazarse cuatro casillas consecutivas vacías en cualquier dirección, el triángulo se desplaza tres, el círculo se desplaza uno, y la pirámide puede moverse como círculo, triángulo o cuadrado según la cara que esté empleando. Al empezar el juego, las piezas se disponen de la manera que se ilustra en la página opuesta.

Objetivo del juego

El objetivo del juego es capturar las piezas del adversario y hacer ciertas combinaciones de números que constituyen una victoria.



Cómo capturar las piezas del adversario

Las piezas se capturan por medio de movidas potenciales o de movidas reales. Los métodos de captura son:

1. *Captura por asedio.* Se realiza rodeando a la pieza del adversario por los cuatro costados. Entonces esa pieza se quita del tablero.

2. *Captura por encuentro.* Si se mueve una pieza el número correspondiente de casillas y esa pieza cae sobre una pieza del adversario, se quita la pieza enemiga sin mover en realidad la propia pieza. Por ejemplo, si el triángulo blanco #25 avanza 3 espacios y cae sobre el círculo negro #81, se quita el círculo negro #81 sin mover verdaderamente el triángulo blanco #25.

3. *Captura por ataque.* Si el valor numérico de una pieza se multiplica por el número de casillas que debe desplazarse para caer junto a una pieza enemiga cuyo número es igual a dicho producto, el jugador captura la pieza del adversario sin hacer el movimiento. Por ejemplo, un círculo blanco #4 captura el cuadrado negro #28 si hay siete espacios entre ambas piezas.

4. *Emboscada.* Si dos piezas de un jugador pueden moverse hasta quedar a ambos lados de una pieza enemiga, y si la suma de esas dos piezas es igual al número de la pieza enemiga, entonces el jugador captura la pieza enemiga. Por ejemplo, si el triángulo negro #12 puede ser rodeado por los círculos blancos #4 y #8, el triángulo negro #12 es quitado del tablero sin que las otras dos piezas se muevan verdaderamente.

Es difícil capturar una pirámide, ya que hay que usar los números 91 y 190, a menos que la captura se realice por asedio o si el cuadrado base (el #36 o el #64) es capturado cuando es la base. Si una de las caras de la pirámide está amenazada por medio de algunos de los métodos de captura, se puede cobrar un rescate bajo la forma de una pieza enemiga que tenga un valor igual al de la cara amenazada, o cuyo valor sea al menos aceptable.

Los jugadores deciden antes de iniciar el juego cuál será la *victoria* o *final del juego.* He aquí algunas maneras posibles de terminar el juego. Algunas son simples, en tanto otras son bastante complejas.

Maneras posibles de terminar el juego, es decir, de obtener una victoria.

1. *De corpore.* Los jugadores acuerdan el número de piezas a capturar, número que declarará ganador al jugador que lo obtenga primero.

2. *De bonis.* Los jugadores acuerdan un número tope. Si la suma de los valores numéricos de las piezas capturadas por un jugador iguala o excede el número acordado, ese jugador es el ganador.

3. *De lite.* En este caso ganar depende del total del valor numérico de las piezas y del número total de dígitos de las piezas. Por ejemplo, si se ha acordado un valor de 160 con sólo 6 dígitos, el jugador que haya capturado las piezas 120, 9 y 30 ganará, mientras que el jugador que tenga 56, 64, 28 y 15 no ganará (porque esas piezas totalizan 8 dígitos).

4. *De honore.* En este caso ganar depende del número de piezas y de su valor numérico. Por ejemplo, puede acordarse que 5 piezas que sumen exactamente 160 serán ganadoras. Resulta evidente que los jugadores deben estar familiarizados con los valores numéricos de sus piezas y con sus diversas sumas.

5. *De honore liteque.* Esta manera de ganar requiere que se satisfagan tres condiciones: un valor numérico específico, un número específico de piezas, y un número específico de dígitos de las piezas.

Las victorias que siguen están destinadas a jugadores expertos, e implican progresiones aritméticas, geométricas y armónicas. Se pueden usar las piezas de ambos jugadores, pero al menos una debe ser del adversario.

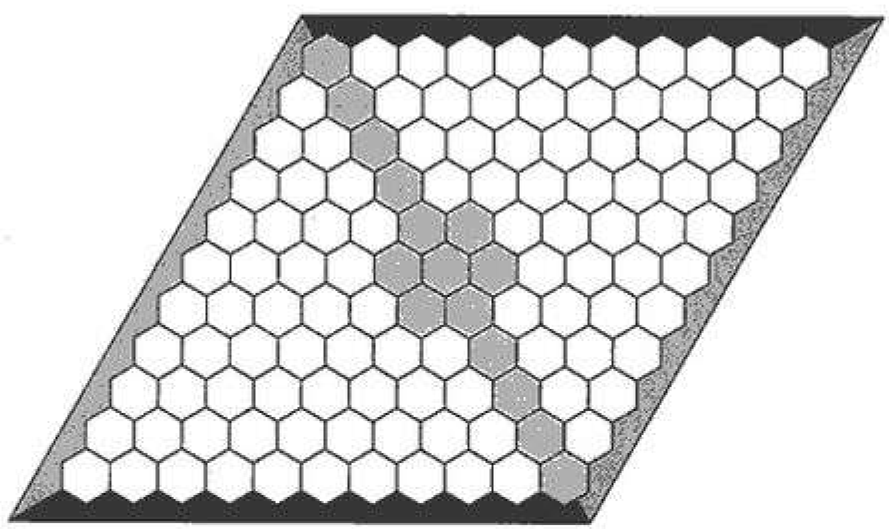
6. *Victoria magna.* Hay que disponer tres piezas capturadas en

progresión aritmética, geométrica o armónica. Por ejemplo, progresión aritmética: 2, 5, 8; progresión geométrica: 36, 49, 64; progresión armónica: 6, 8, 12.

7. *Victoria mayor.* Requiere desplegar cuatro piezas que puedan combinarse para formar dos de tres progresiones posibles. Por ejemplo, las piezas de valor 2, 3, 4 y 8 dan la progresión aritmética 2, 3, 4 y la progresión geométrica 2, 4, 8. Adviértase además que 2, 4 y 8 son piezas blancas, en tanto 3 es una pieza negra.

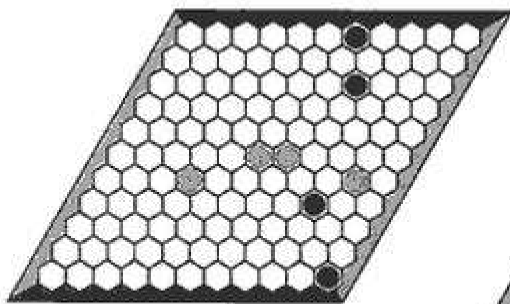
El juego del Hex

El juego del Hex fue inventado en 1942 por Piet Hein.



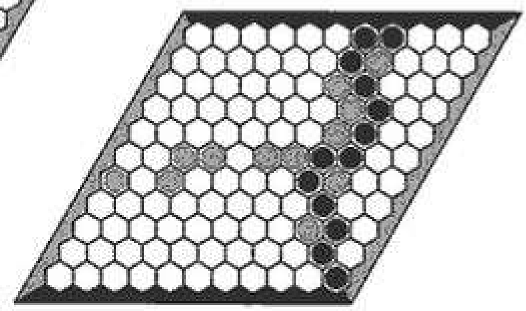
El tablero está formado por hexágonos: once en cada dirección. El primer jugador no puede jugar su pieza en ninguno de los hexágonos grises de la ilustración. Después del primer movimiento, sí se puede mover sobre ellos. Los jugadores juegan por turno.

Objetivo: Cada jugador coloca alternativamente una pieza, tratando de abrirse camino hacia el lado opuesto. El primer jugador que lo logra es el ganador.



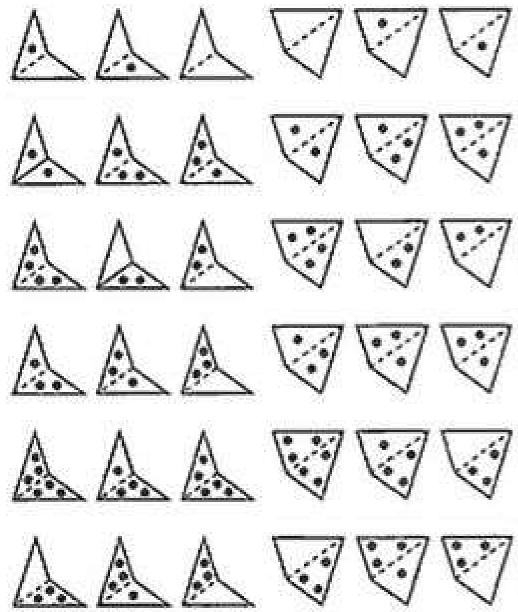
El tablero muestra algunos movimientos iniciales.

En esta partida, el jugador que tiene las piezas negras es el ganador, ya que ha podido abrirse camino hasta el lado opuesto.

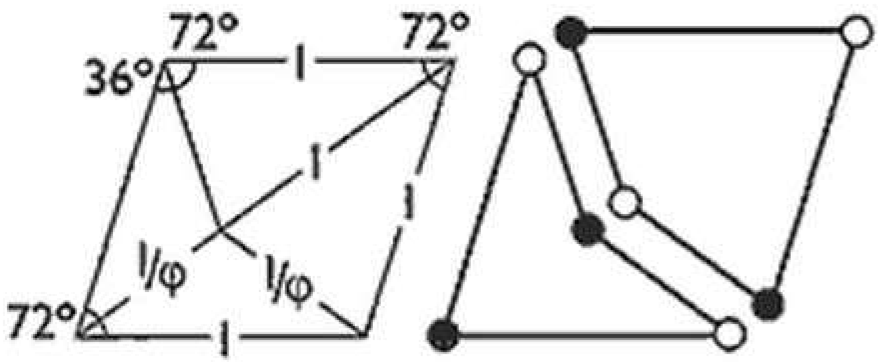


Mosaicos de Penrose convertidos en dominós

Los mosaicos flecha y cometa fueron descubiertos por el físico-matemático inglés Roger Penrose en 1974. Estos mosaicos pueden cubrir un plano de manera muy especial ya que producen un número infinito de teselados no periódicos (no hay ningún diseño básico que se repita de manera regular, desplazándose hacia arriba o hacia abajo en el plano). Jugar al dominó con esos mosaicos es un desafío, que además produce algunos diseños muy interesantes.



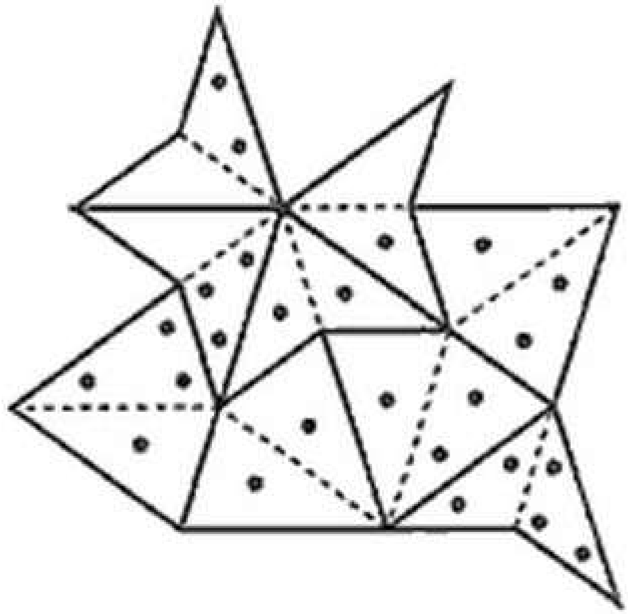
Construya los mosaicos de la siguiente manera:



Nota: φ es la proporción áurea, que es igual a $(1+\sqrt{5})/2 = 1.618...$

Cada mosaico se divide con una línea en dos triángulos, que pueden tener uno, dos, tres o ningún punto. Como en los dominós, sólo los lados con igual cantidad de puntos pueden tocarse.

Ahora intente jugar. Es posible que desee aumentar el número de puntos y ver cómo se desarrolla el juego.

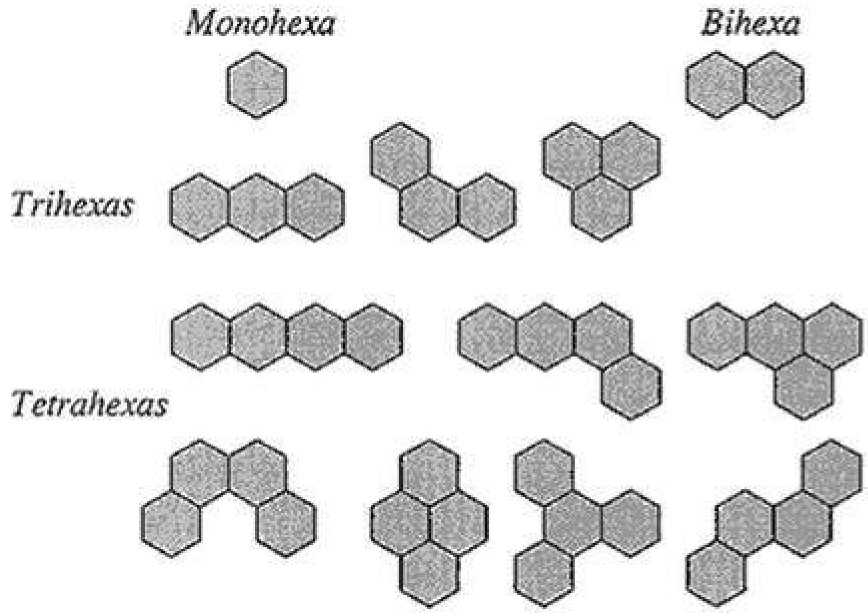


§. Algunas recreaciones matemáticas

Jugando con polihexas

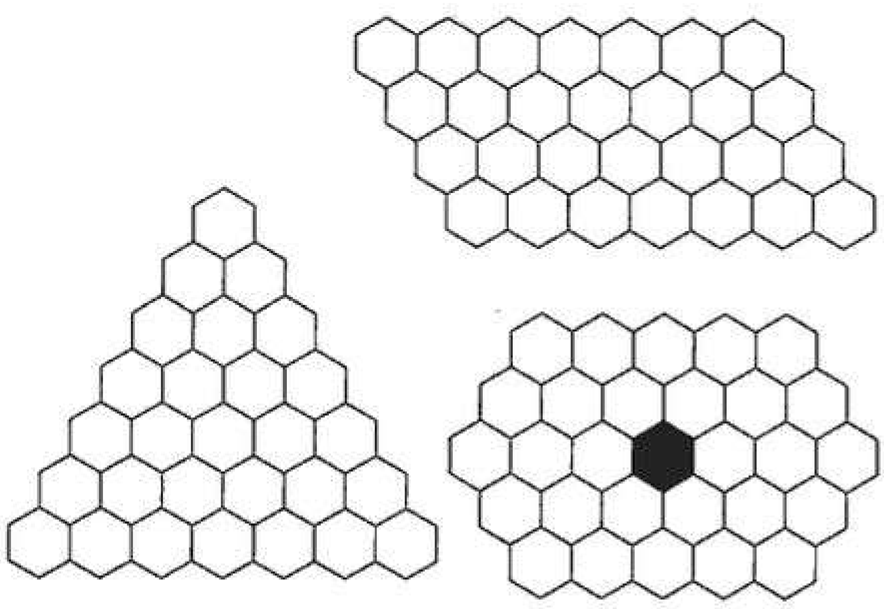
Los poliominós se forman reuniendo cuadrados congruentes.

Los polihexas son otro grupo de divertidos objetos matemáticos, que se forman uniendo hexágonos congruentes.



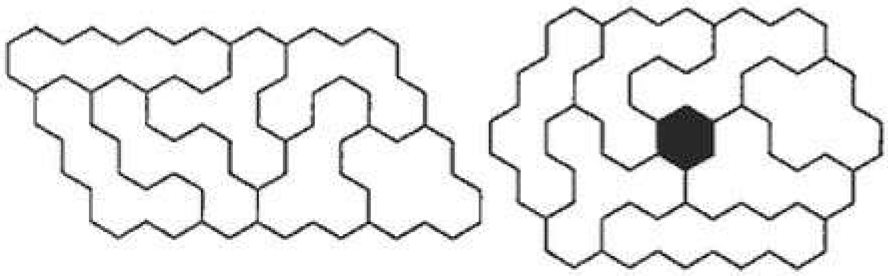
He aquí las configuraciones de hasta 4 piezas (tetrahexas)

¿Cuál de las tres formas siguientes puede teselarse usando uno de cada uno los siete tetrahexas que aparecen en la ilustración anterior? ¡Que se divierta!



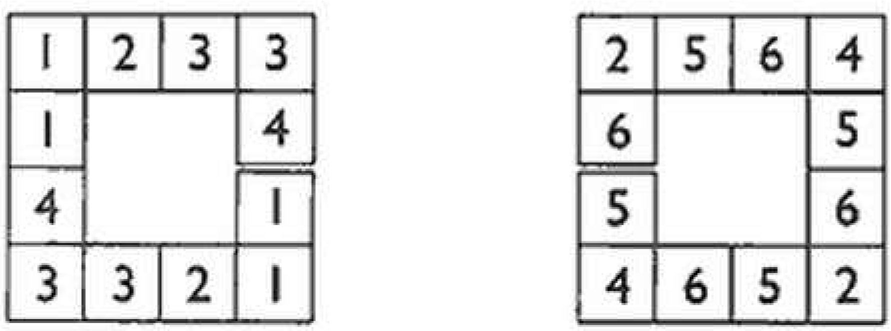
Solución

El triángulo es la única figura que no puede construirse con los polihexas.



Cómo hacer un hexa-tetraflexágono

Los flexágonos son un maravilloso entretenimiento matemático que puede divertir a personas de todas las edades. Además, quienes deseen algo más que un mero entretenimiento pueden profundizar en la matemática de los flexágonos. He aquí cómo construir un hexa-tetraflexágono, que tiene seis caras y cuatro lados.

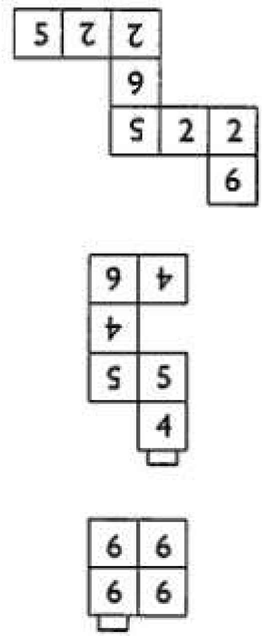


Vista de frente y Vista de atrás

Paso 1. Empezando por el frente, plegar los 3 adyacentes entre sí. Hacer lo mismo con los I adyacentes. La figura resultante se verá como en la ilustración.

Paso 2. Plegar entre sí los 2 adyacentes. En un lado aparecerá esta disposición de números.

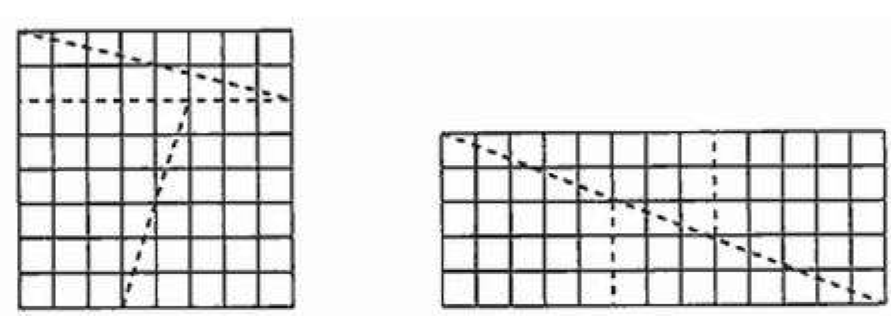
Paso 3. Doblar por la línea que separa al 4 invertido del 5 invertido, llevando la parte inferior hacia atrás. Colocar el 4 que se encontraba en la parte inferior sobre el 4 superior.



La forma resultante es un cuadrado con el número 6 (invertidos) de un lado y el 5 del otro lado. Una el borde externo de los 6 y los 5 con un pedazo de cinta. Dé vuelta y pliegue el lado de 5 por el centro. ¿Puede encontrar todas las caras con 6?

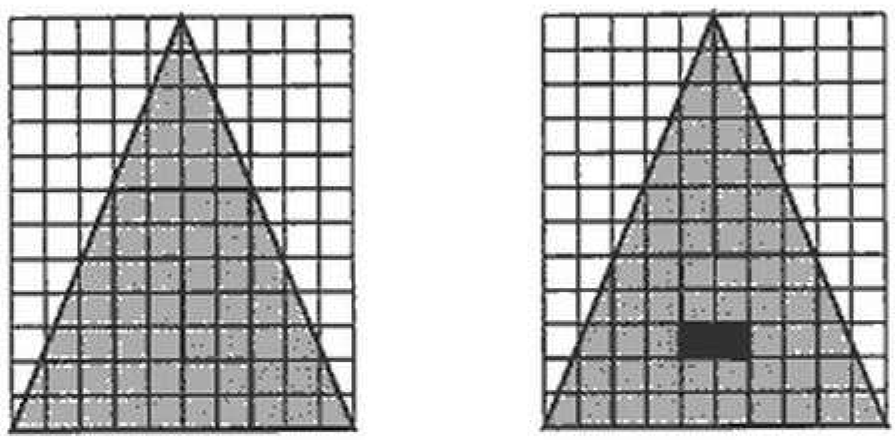
Disecciones geométricas y el acertijo de los triángulos de Curry

Los problemas de disección geométrica suelen ser fascinantes. Algunos, como este conocido acertijo de Sam Loyd, crean una situación paradójica.



Izquierda: Superficie = 8×8 = 64 cuadrados. Derecha: Superficie = 13×5 = 65 cuadrados

Paul Curry revisó esta paradoja de tal modo que cortar y reacomodar las partes diera como resultado una figura similar con un agujero en el interior. Así funciona en el caso del siguiente triángulo.



La superficie del triángulo original es de 60 cuadrados. La del triángulo rearmado es de 58 cuadrados. Sin embargo, sumando las superficies de cada una de las piezas obtenemos un total de 59 cuadrados. Por lo tanto, el agujero es de una unidad cuadrada.

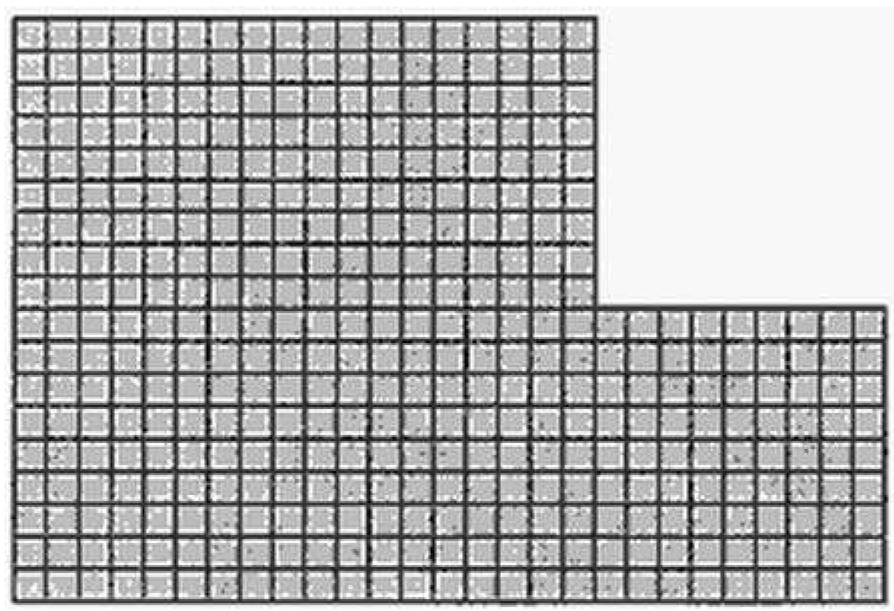
Supongamos que un lado del triángulo esté sombreado y el otro no. Córtelo. Delo vuelta y reacomode las partes sombreadas como se ve en la ilustración. Supuestamente es un triángulo de la misma medida, pero tiene un agujero en el centro. ¿Cuál es la explicación?

Solución

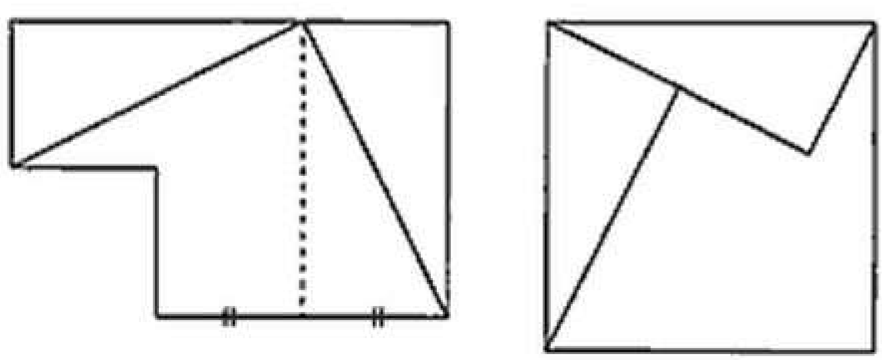
Cuando se calculan las otras partes faltantes empleando triángulos similares, los resultados crean secciones que se superponen en algunos lugares y dejan brechas en otros.

La transformación del cuadrado

Determine la manera de cortar esta forma en tres piezas con dos cortes rectos, de modo que las tres piezas puedan reacomodarse para formar un cuadrado.

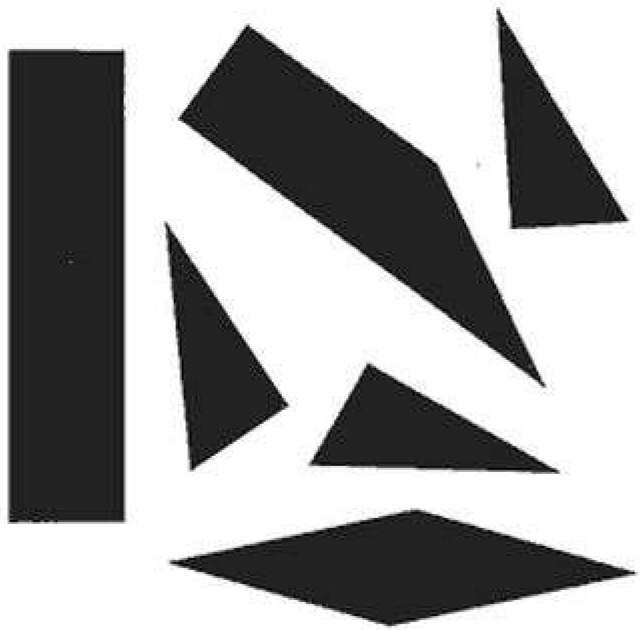


Solución



El acertijo de la letra de imprenta mayúscula

Corte estas piezas, o reacomódelas mentalmente. Algunas de ellas deberán ser rotadas, invertidas o trasladadas. Todas juntas, forman una letra mayúscula del alfabeto. ¡Buena suerte!



Solución

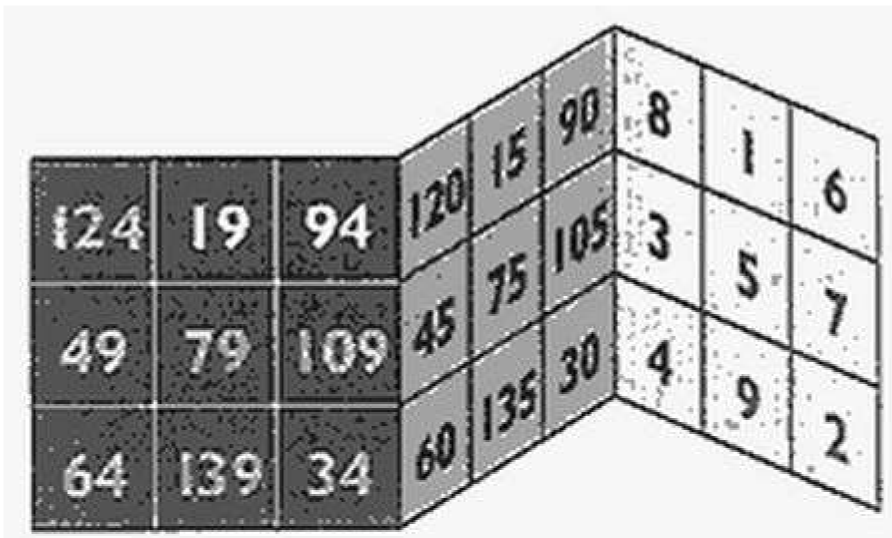
§. Los cuadrados mágicos y otras recreaciones

Jugando con los cuadrados mágicos

No haré problemas ya que rápidamente todos aceptarán que el cuadrado de 16 es el más mágicamente mágico de todos los cuadrados mágicos creados por los magos.

Benjamín Franklin

Imagine la formación de números en un cuadrado con propiedades especiales. Para muchas personas del pasado estos cuadrados de números poseían cualidades o poderes mágicos. El registro más antiguo que habla de un cuadrado mágico apareció en China alrededor del 2200 a.C., cuando un cuadrado mágico numérico de 3×3, llamado *lo-shu,* fue visto por el emperador Yu en la caparazón de una tortuga divina en las riberas del río Amarillo. En el siglo IX d.C., en Egipto, se echaban manchas de tinta sobre una bandeja de plata que tenía grabado un cuadrado mágico, y las formas se leían del mismo modo en que las adivinas leen las hojas de té. En el siglo VIII d.C., algunos alquimistas creían que estos cuadrados tenían la clave de la transmutación de los metales en oro. Los cuadrados mágicos islámicos con frecuencia tenían significados especiales cuando estaban dispuestos para usar las letras que representaban números. Los árabes usaron diferentes disposiciones del cuadrado mágico de 3×3 para representar los signos del fuego, el agua, la tierra y el aire. Por añadidura, cada planeta tenía un cuadrado mágico asociado a él, y por ello eran empleados en los trabajos astrológicos. Estos cuadrados “místicos” se utilizaban de diversas maneras: se los colocaba sobre el vientre de una mujer en trabajo de parto, se los bordaba en las ropas de los soldados, se los colocaba en la fachada de un edificio como protección, y se los usaba como amuletos que traían suerte o como agentes curativos.



El cuadrado mágico anterior es una transformación para incluir el año en que se escribió este libro (1994) en él. Se empezó a partir de un cuadrado mágico de 3×3, cuyos números se multiplicaron por 15. Finalmente, se le sumó 4 a cada número.

A lo largo de los siglos, se han descubierto y desarrollado muchas propiedades y métodos de construcción.

He aquí algunas propiedades:

1. Cada fila, columna y cada diagonal de esquina a esquina suman el mismo número. Cada cuadrado mágico tiene una constante mágica que puede obtenerse de las siguientes maneras:

a. El orden de un cuadrado mágico está dado por el número de filas o de columnas que posee. Un cuadrado mágico compuesto de números naturales 1, 2, 3, ... n^2 tiene una constante mágica de (½)(n(n^2+1)) en la que n es el orden del cuadrado. En general, si i es el término inicial y b la cantidad que crece cada término, la constante mágica es igual a

$$i \times n + b(n/2)(n^2 - 1)$$

b. Tome cualquier cuadrado mágico y, empezando desde la esquina superior izquierda, coloque los números en secuencia en cada fila. La suma de los números de una de las diagonales será la constante mágica.

2. Dos números cualesquiera (de una fila, columna o diagonal) que sean equidistantes del centro son complementarios (2 números cuya suma es igual a la suma del número más grande y el número más pequeño del cuadrado).

3. Hay muchas maneras de transformar un cuadrado mágico existente en un nuevo cuadrado mágico.

a. Cualquier número puede ser sumado a, o multiplicado por todos los números de un cuadrado mágico; de ese modo se creará un nuevo cuadrado mágico.

b. Si se intercambian dos filas o dos columnas equidistantes del centro, el cuadrado resultante seguirá siendo mágico.

c. Intercambiando cuadrantes (es decir, cuartos de cuadrado) en un cuadrado mágico de orden par.

d. Intercambiando cuadrantes parciales en un cuadrado mágico de orden impar.

Hay muchos métodos que se pueden emplear para construir cuadrados mágicos. Algunos de ellos son:

1. Para cuadrados de orden impar: *a.* el método de la escalera (de De la Loubére); *b.* el método de la pirámide; *c.* el método del trayecto del caballo para el caso de orden impar mayor de 3×3; *d.* el método del 1705 de Philip de la Hire.
2. Para cuadrados de orden par: *a.* el método de reemplazo de la diagonal para uno de 4×4; *b.* el método de la diagonal para 8×8.
3. Para un cuadrado mágico de cualquier orden: Los métodos que existen son muy complejos y tortuosos. Uno de ellos usa los bordes y fue desarrollado por B. Frénicle.

Considerando la prolongada historia de los cuadrados mágicos, no resulta sorprendente que se haya escrito más sobre ellos que sobre cualquier otra recreación matemática. Algunas personas han pasado horas, días y hasta meses desarrollando métodos para crear cuadrados mágicos, descubriendo sus propiedades, desarrollando nuevas ideas, y jugando con su magia. Entre la vasta lista encontramos: el supercuadrado mágico de 16×16 de Benjamín Franklin; el mago[51] del cuadrado mágico, que puede crear cualquier

[51] Cualquiera puede ser mago del cuadrado mágico. Tan sólo hay que memorizar el cuadrado mágico básico de 3×3. Pídale a alguien que coloque un número en cualquier lugar de un cuadrado de 3×3. Por ejemplo, aquí se colocó el número 78 en el lugar en que está situado el 2 del cuadrado mágico básico. De inmediato uno crea un nuevo cuadrado mágico llenando los blancos, recordando que una de las propiedades de los cuadrados mágicos es que puede hacerse uno nuevo agregando una constante a cada número de un cuadrado mágico inicial. En este caso, agregamos 76 a cada número del cuadrado mágico básico de 3×3.

cuadrado mágico de 3×3 con cualquier número inicial de manera casi instantánea; las líneas mágicas (segmentos que conectan los números consecutivos de un cuadrado mágico), deslumbrantes diseños que también se usan para clasificar los cuadrados en simétricos y asimétricos; círculos mágicos, cubos, hexágonos, estrellas, esferas y cuadrados mágicos de dominó, cuadrados mágicos de números primos, cuadrados mágicos pan-diagonales. Y la lista crece a medida que más personas quedan atrapadas por la seducción del tema.

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	210	239	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

8	1	6
3	5	7
4	9	2

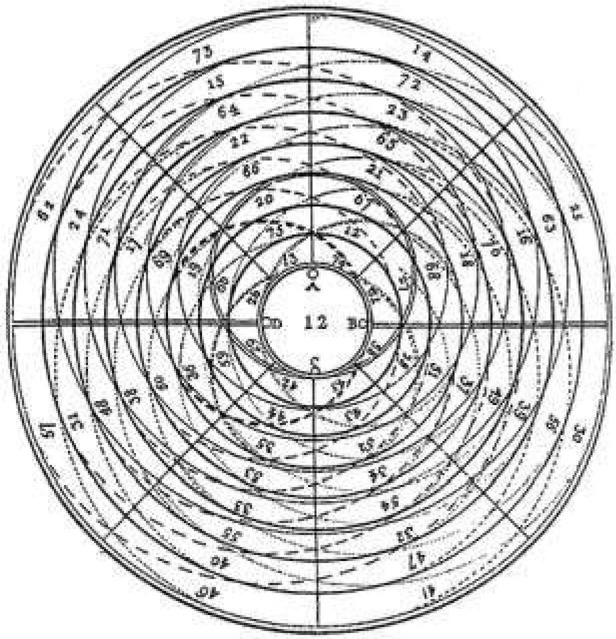
84	77	82
79	81	83
80	85	78

Este es el supercuadrado mágico de Benjamín Franklin, de 16×16. Tiene todas las propiedades del cuadrado mágico corriente, salvo que la suma en diagonal no totaliza la constante mágica, 2056. Pero tal como lo ilustra el diagrama, la constante mágica aparece de muchas maneras diferentes, como por ejemplo en las diagonales interrumpidas en 8, en las filas paralelas quebradas de 8 casillas, en cualquier cuadrado de 4×4, y tal vez usted pueda descubrir más. En la publicación de 1952 del Instituto Franklin, Albert Chandler afirma que este cuadrado mágico no es original de Franklin, sino uno que fue compuesto incorrectamente por un impresor.

El rol de los cuadrados mágicos ha cambiado de manera significativa con el transcurso de los siglos. En la actualidad se los considera una recreación matemática fascinante.

El círculo mágico de Benjamín Franklin

Benjamín Franklin era un apasionado de los cuadrados mágicos. En realidad, cuando era empleado del Consejo de Pennsylvania, solía aliviar el tedio de su trabajo haciendo círculos mágicos. En su círculo mágico, los números situados sobre el radio del círculo más grande suman todos el mismo número, y también ocurre lo mismo con los números que caen entre los círculos entrelazados.



Leonhard Euler y el trayecto del caballo

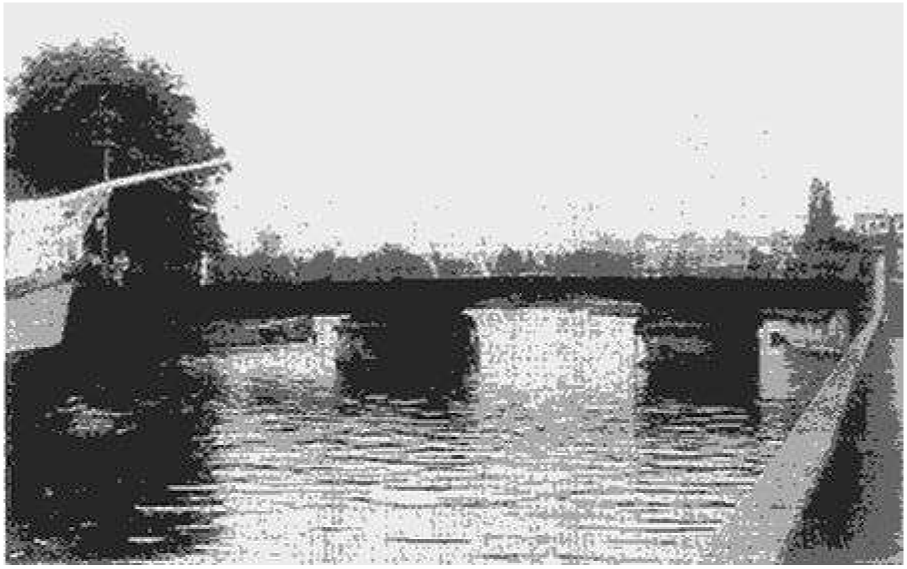
Este maravilloso cuadrado mágico fue creado por Leonhard Euler en el siglo XVIII. Como en casi todos los cuadrados mágicos, sus filas, columnas y diagonales suman el mismo número, en este caso 260.

Por añadidura, hay cuatro cuadrados dentro de él, cuyas filas y columnas suman cada una 130. Pero aún más fascinante es la manera en que una pieza de ajedrez, el caballo, empezando por el 1, puede recorrer en orden todos los números del cuadrado, desde 1 a 64, simplemente siguiendo los movimientos permitidos a esa pieza.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

El problema de los puentes de Königsberg actualizado

La ciudad de Königsberg fue fundada por los Caballeros Teutones en 1308, y sirvió de avanzada oriental del poder alemán durante más de 400 años. Después de la Segunda Guerra Mundial se la llamó Kaliningrado, y se convirtió en la base naval más importante de la U.R.S.S.. Actualmente Königsberg está situada entre Polonia y Lituania.



Uno de los tres puentes originales de Königsberg.

¿Cómo se ven en la actualidad los siete puentes de Königsberg? ¿La gente todavía intenta descubrir el trayecto imposible? Primero, recordemos el problema de los puentes de Königsberg...

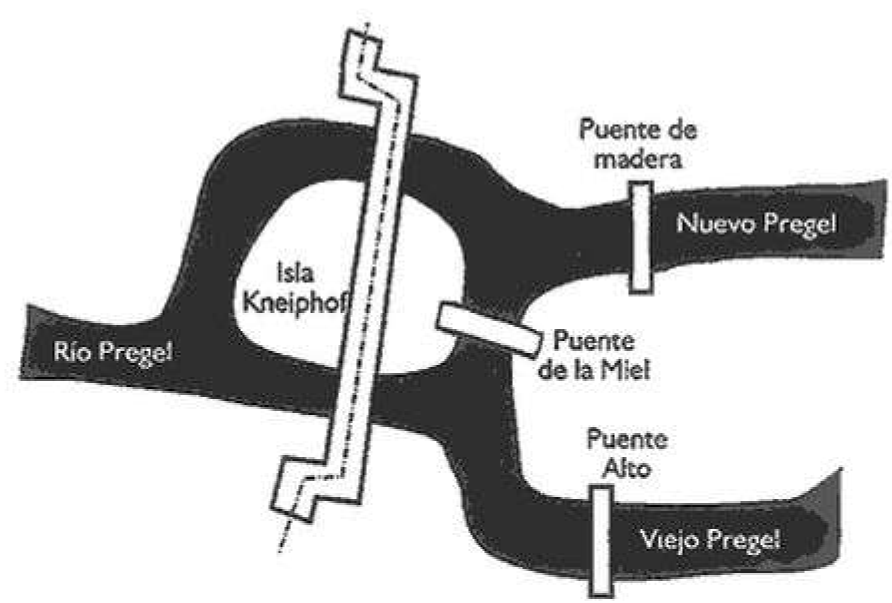
> *A lo largo de los siglos, el problema de los puentes de Königsberg ha proporcionado mucho entretenimiento y ha sido fuente de interés matemático. El problema se remonta al siglo XVIII. El escenario era la ciudad de Königsberg, situada junto al río Pregel. Las dos islas que estaban sobre el río eran parte de la ciudad, y estaban conectadas a ella por medio de siete puentes. Una deliciosa tradición se había establecido entre los pobladores: la de hacer una caminata dominical pollas riberas y las islas de la ciudad, mientras intentaban descubrir un camino que atravesase los siete puentes sin cruzar dos veces ninguno. Aunque en esa época esta actividad era considerada un entretenimiento divertido, un matemático suizo descubrió y*

desarrolló otro aspecto del pasatiempo. Leonhard Euler (1707-1783) conoció el problema cuando se encontraba en San Petersburgo, al servicio de Catalina la Grande de Rusia.

En 1735, Euler presentó un trabajo a la Academia Rusa que en realidad era mucho más amplio, y tenía una importancia mayor para la matemática que la simple resolución del problema de los puentes. Con ese trabajo puso en marcha ideas que desembocaron en la creación del campo de la topología. A diferencia de la geometría euclidiana, que se ocupa del tamaño, de la forma y de objetos rígidos, la topología es una clase de geometría que estudia las propiedades de los objetos que no cambian aunque se distorsionen el tamaño y la forma. Por ejemplo, si un triángulo se distorsiona hasta convertirse en un cuadrado o en un círculo, la topología estudia cuáles son las propiedades de ese objeto que permanecen inalteradas. Con los puentes de Königsberg, Euler transformó y simplificó un entorno físico en un diseño matemático (llamado *grajo* o *red)* que abarcaba y simplificaba el problema. A cada parte de la ciudad que llegaban los puentes le asignó un punto o vértice, e ilustró cada puente con un arco o línea. Concluyó que el problema de cruzar los siete puentes sin recorrer ninguno dos veces era comparable a hacer un trazo continuo sobre la red con un lápiz sin levantar nunca la punta. Euler identificó cada vértice como punto par o impar, según la cantidad de líneas que concurriesen a él. Advirtió que un punto par se creaba atravesando el vértice o empezando y terminando el trayecto en ese punto. Uno impar, por otra parte, se creaba si era punto inicial o terminal del trayecto. Así, cualquier grafo trazable sin recorrer dos veces una línea, sólo podía tener cero o dos vértices impares: 0 si todos los puntos eran pares o 2 si uno era punto inicial y el otro punto terminal. Por añadidura, Euler infirió que si el gráfico tenía un número par de vértices impares, digamos 10, para trazarlo completo habría que levantar el lápiz la mitad de ese número, es decir, 5 veces. En su disertación señala que el problema era de naturaleza geométrica, pero que la geometría euclidiana no parecía aplicable, ya que no se ocupaba de "magnitudes" ni podía resolverse por medio de "cálculos cuantitativos". En cambio, el problema pertenecía a la "geometría de posición", como Wilhelm von Leibniz designó inicialmente a la topología. Así, la solución de Euler del problema de los puentes de Königsberg actuó como catalizadora e introductoria al campo de la topología.

Los puentes de Königsberg en el siglo XVIII

Tal como se ve en la ilustración, cada uno de los siete puentes tenía un nombre específico, probablemente relacionado con lo que había de ese lado del puente. En la actualidad sólo tres de los siete puentes originales sobreviven: el de Miel, el Alto y el de Madera. Se ha construido un nuevo puente que conecta las dos orillas, como se ve en la ilustración inferior, que pasa por encima de la isla de Kneiphof.



Los puentes de Königsberg en la actualidad

Los guías turísticos suelen relatar la historia del problema. Algunos incluso alegan que no ha sido resuelto. Si se dibuja una red actualizada de los puentes de Königsberg, el nuevo problema pierde atractivo. Si el nuevo puente tocara la isla, la red sería más interesante. Desafortunadamente, los siete puentes de Königsberg son tan sólo historia, pero el legado que dejó este problema no se destruye con tanta facilidad como los puentes. La brillante solución de Euler sigue siendo una parte importante del desarrollo de la topología.

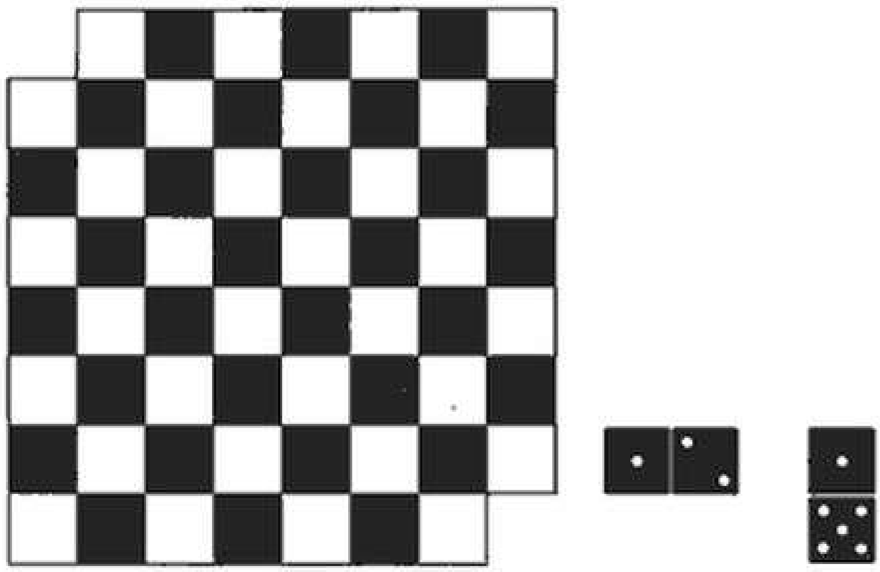
Agradezco especialmente la información actualizada y las fotografías a Art Cooley, y a Ron Crittenden por señalármelo.

§. Tableromanía

Miles de años atrás, los egipcios se entretenían con juegos de tableros con escaques. Sin embargo, el moderno juego de damas se remonta a principios del siglo XII en Europa. Utilizaba el mismo tablero que el ajedrez, piezas como las del backgammon, y seguía la línea del juego llamado *alquerque* en cuanto a movimientos y número de piezas. El tablero en sí mismo plantea una cantidad de problemas que han sido desarrollados en el transcurso de los años.

Cubrir el tablero con fichas de dominó

Si se retiran dos casillas situadas en vértices opuestos de un tablero de ajedrez, ¿es posible cubrir el resto con fichas de dominó? Supongamos que la ficha de dominó tiene el tamaño de dos casillas adyacentes del tablero. Los dominós deben colocarse acostados, está prohibido apilarlos, y no es necesario que dominós vecinos tengan la misma cantidad de puntos en las caras.

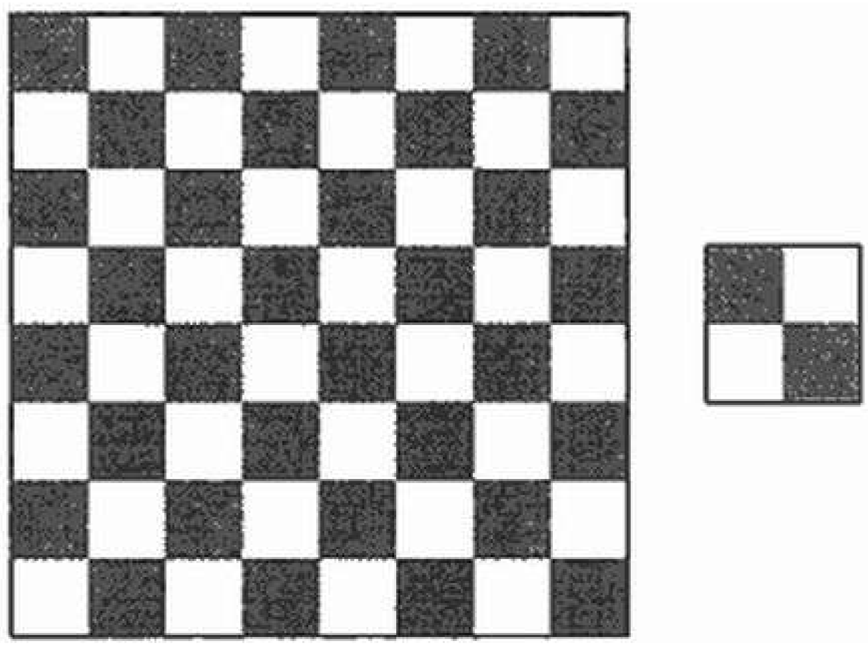


Solución

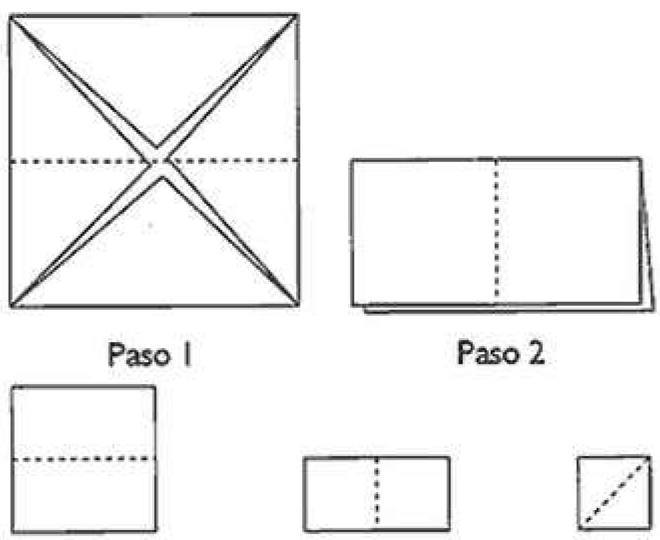
No es posible cubrir el tablero con fichas de dominó. Cada ficha debe ocupar un cuadrado negro y uno blanco. Como las casillas sacadas en ambas esquinas son del mismo color, no queda un número compatible de cuadrados blancos y cuadrados negros en el tablero.

Dividir el tablero con un solo corte

Empleando su capacidad de visualización y sus técnicas de plegado, halle la manera de hacer un solo corte recto que permita dividir el tablero en cuadrados de 2×2, como el que aquí se muestra.

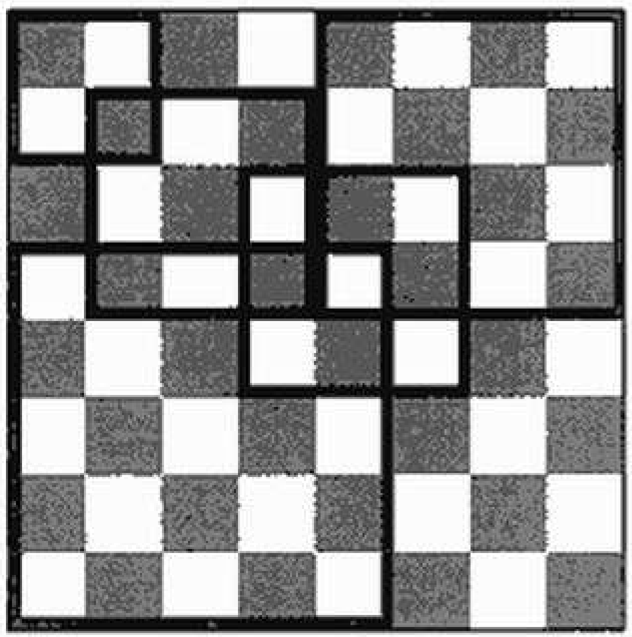


Solución



Los cuadrados de un tablero de ajedrez

Las 8 filas y las 8 columnas de cuadrados blancos y negros que componen un tablero de ajedrez pueden agruparse en cuadrados de diferentes tamaños. Estos cuadrados tienen dimensiones que oscilan entre 8×8 y 1×1. ¿Cuántos cuadrados de diferentes medidas pueden encontrarse en un tablero de ajedrez?



Solución

Hay:

1 cuadrado de tamaño 8×8,

4 cuadrados de tamaño 7×7,

9 cuadrados de tamaño 6×6,

16 cuadrados de tamaño 5×5,

25 cuadrados de tamaño 4×4,

36 cuadrados de tamaño 3×3,

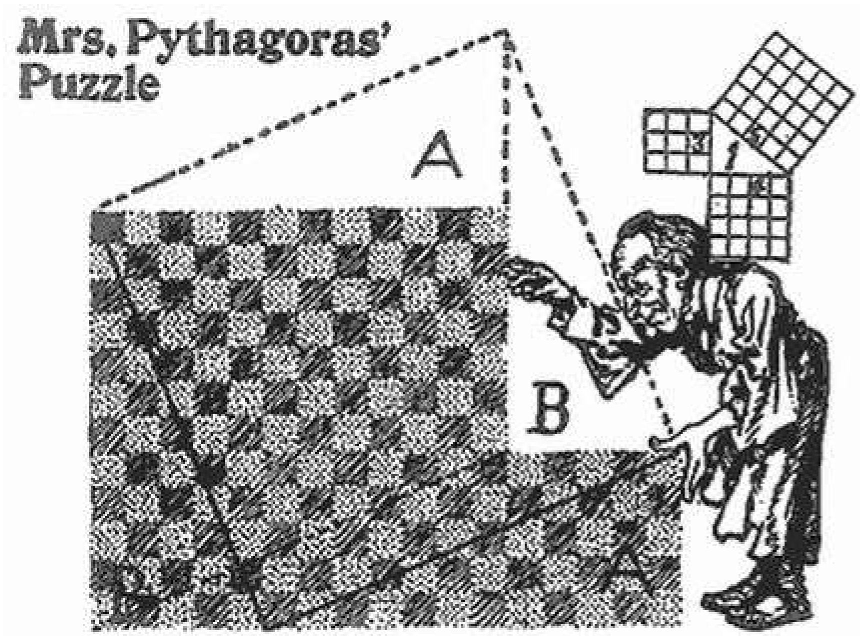
64 cuadrados de tamaño 1×1,

haciendo un total de 204 cuadrados.

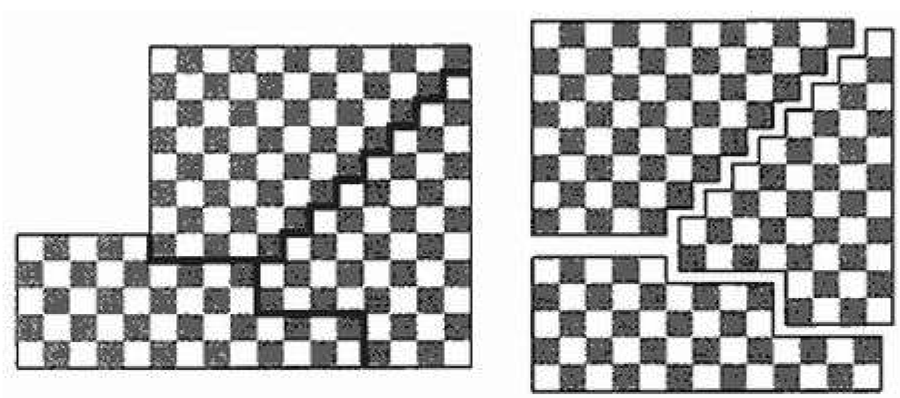
Dos acertijos de tablero de ajedrez de Sam Loyd

El especialista Sam Loyd llamó a este acertijo *El acertijo de la señora*

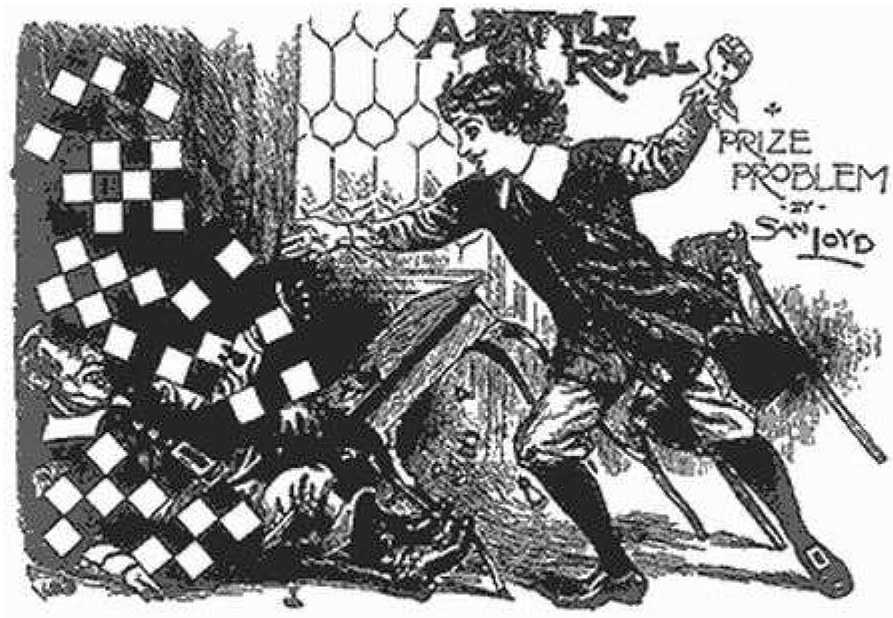
Pitágoras. Usted debe idear un método para cortar el material a cuadros en tres piezas que unidas produzcan un cuadrado de 13×13 que conserve el diseño y la dirección del material.



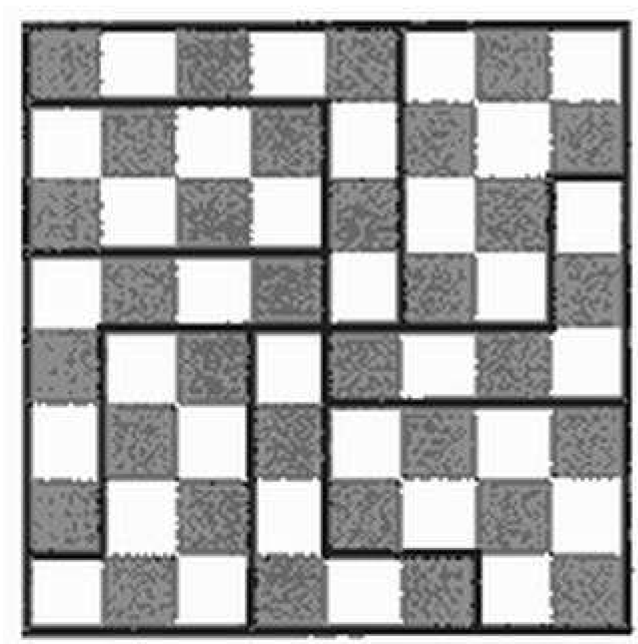
Solución



Este acertijo de Sam Loyd fue llamado *Una batalla real.* Reacomode las 8 piezas de manera que formen un tablero de 8×8.



Solución

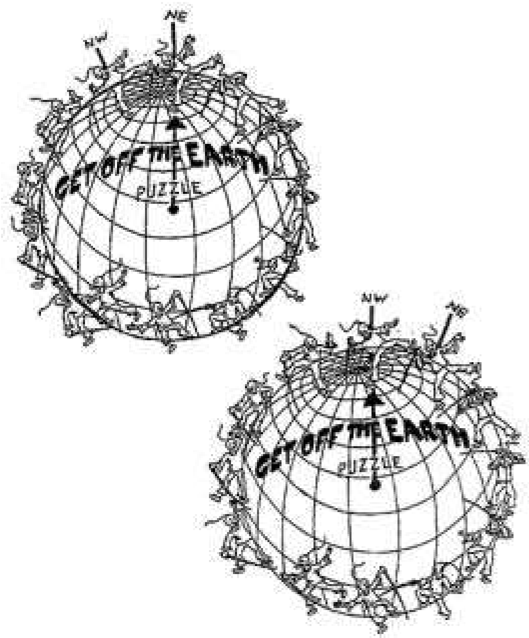


§. Algunas antigüedades

Fuera de la Tierra, de Sam Loyd

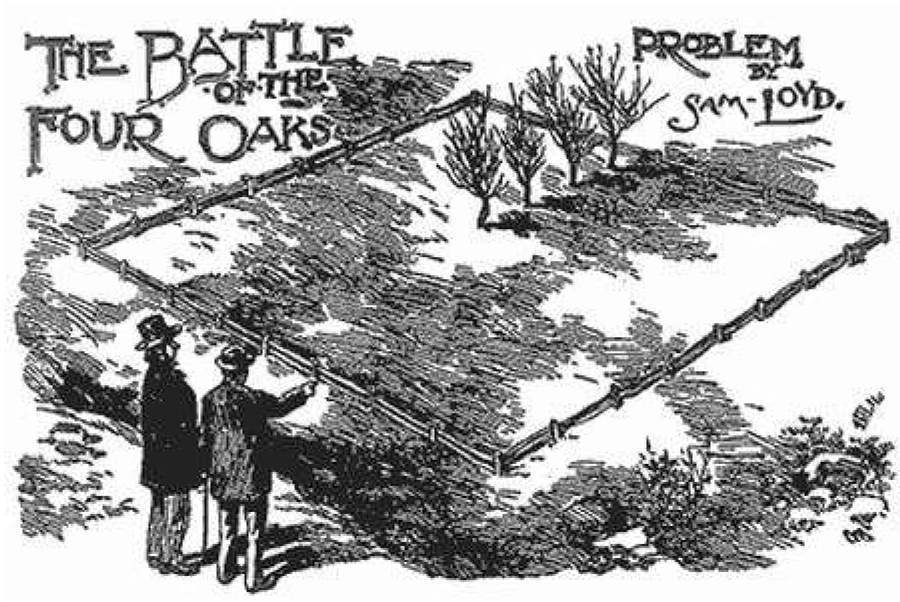
Este acertijo de Sam Loyd es uno de los más populares que jamás existieron. Loyd lo patentó en 1896 y vendió más de 10 millones de ejemplares.

El acertijo estaba hecho con un disco circular móvil que hacía rotar la tierra. ¿Puede usted descubrir qué le ocurre al guerrero número 13, que desaparece cuando la esfera es rotada de NE a NW?

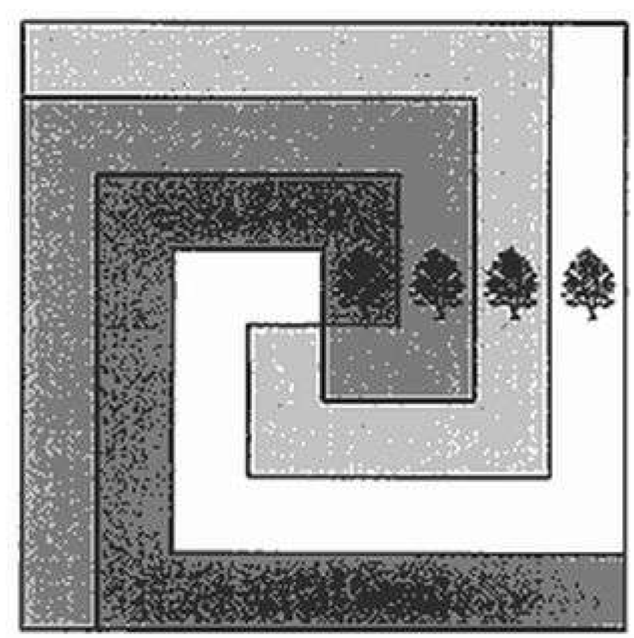


La batalla de los cuatro robles, de Sam Loyd

Hay cuatro robles en línea en un campo cuadrado. Divida el campo en cuatro partes de modo que cada parte tenga el mismo tamaño y la misma forma y que contenga un roble.

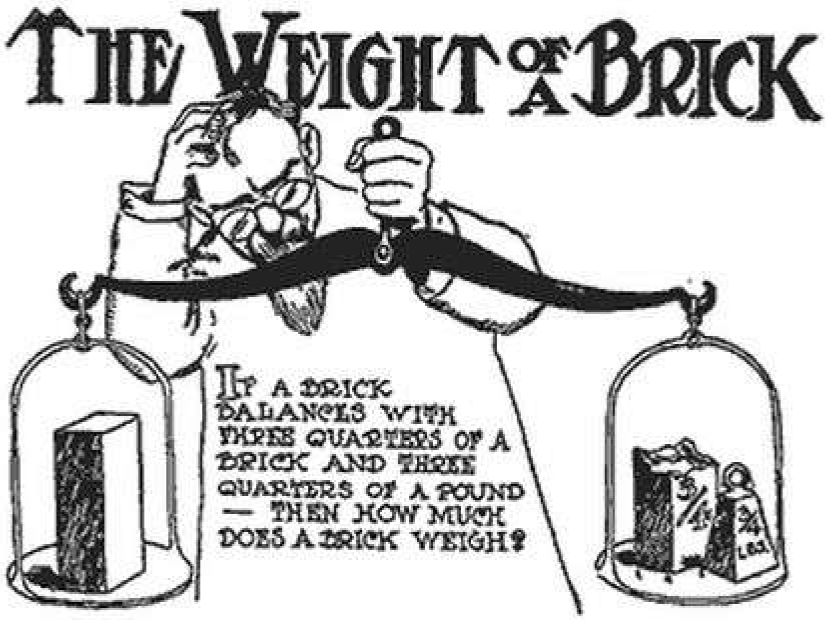


Solución



El peso de un ladrillo, de Sam Loyd

Si un ladrillo se equilibra con tres cuartos de un ladrillo y tres cuartos de libra, ¿cuánto pesa el ladrillo?



Solución

Una manera de encarar el problema es agregar tres ladrillos más al platillo de la izquierda. Para balancear los pesos, multiplique por cuatro las cosas que hay en el platillo derecho. Esto es: cuatro ladrillos en la izquierda pesan igual que tres ladrillos y tres libras. De allí se obtiene la ecuación $4L = 3L+3$. Otra manera es derivar la ecuación de la ilustración: $B = (3/4)B + (3/4)$, y despejar B.

¿Qué queda en las cajas de caramelos?

Por algún motivo las etiquetas de estas cajas de caramelos se mezclaron de manera que ahora ninguna etiqueta indica correctamente el contenido.

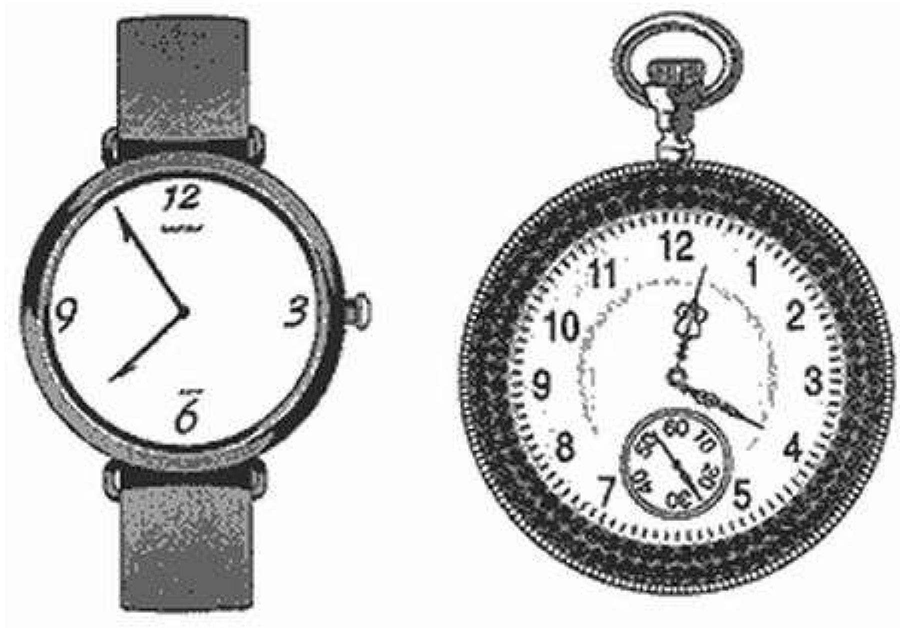
¿Cuál es el número mínimo de caramelos que usted debe sacar de la caja o cajas para determinar qué etiqueta corresponde a cada caja?

Solución

Sólo debe probar un caramelo de la caja con la etiqueta 2 *de chocolate y 1 de crema.* Si es de chocolate, sabe que no puede tener 2 de chocolate y 1 de crema porque las etiquetas están mal colocadas. Por lo tanto, debe tener 3 de chocolate. Como todas las etiquetas están equivocadas, esto significa que la caja que dice *3 de chocolate* tiene 3 de crema. Si, en cambio, el caramelo que sacó es de crema, sabe que la caja debe contener 3 de crema, y la caja con la etiqueta *3 de chocolate* tiene 2 de chocolate y 1 de crema.

El acertijo de los dos relojes, de Lewis Carroll

¿Cuál es mejor, un reloj que da la hora correcta una vez por año o un reloj que da la hora correcta dos veces por día?



Solución

¿Cuál es mejor, un reloj que da la hora exacta una sola vez al día, o uno que la da dos veces? "El último," responde usted, "definitivamente". Bien, ahora preste atención.

Tengo dos relojes: uno no funciona y el otro atrasa un minuto diario. ¿Cuál preferiría? "El que atrasa," responde usted, "sin dudas". Ahora observe: El que atrasa un minuto diario tiene que perder doce horas, o setecientos veinte minutos, antes de dar nuevamente la hora exacta. En consecuencia, sólo da la hora exacta una vez cada dos años, mientras que el otro lo hace siempre que sea la hora en la que están detenidas las agujas, lo que sucede dos veces al día.

Lewis Carroll

El acertijo de Tartaglia

Niccolo Tartaglia, matemático italiano del siglo XVI, es famoso por su descubrimiento de la solución de la ecuación cúbica general (1535). También escribió los tres volúmenes del *Trattato generale di numeri et misure* (*Tratado general de números y medidas*), 1556-1560. Por añadidura, fue el primero en traducir los *Elementos* de Euclides a una lengua occidental moderna (1543). He aquí un famoso acertijo matemático ideado por él:

Tres parejas de recién casados llegan a la orilla de un río que deben cruzar en un pequeño bote, pero el bote sólo puede embarcar a dos personas por vez. Cada uno de los tres esposos es celoso y muy protector de su bella novia. Para resolver la situación, deciden que ninguna mujer quedará sola con un hombre si su esposo no está presente.

¿Cómo hacen las parejas para cruzar a la otra orilla del río? ¿Cuál es el número mínimo de viajes?

Solución

Se requieren 11 cruces. Representando a los hombres por una *H* y a las mujeres por una *M,* los cruces son:

1. *H1* cruza a *M1 y* vuelve solo	2 cruces
2. *M3* cruza a *M2* y regresa sola	2 cruces.
3. *H2* cruza a *H1* y regresa con M2	2 cruces.
4. *H3* cruza a *H2* y regresa solo	2 cruces.
5. *H3* cruza a *M3*, y *H2* regresa solo para cruzar a *M2*	3 cruces.

Nota bibliográfica

Los lectores interesados en los temas tratados en esta obra pueden consultar los siguientes libros publicados en esta colección:

- La Magia de la Matemática, por Theoni Pappas. Similar en espíritu al presente, este libro contiene secciones dedicadas a los números, a la matemática de las cosas cotidianas, y a la matemática en el arte y en la naturaleza.
- El idioma de los Espías, por Martin Gardner. Una completa descripción de los métodos usados para enviar mensajes cifrados.
- Las Esferas Doradas y Otras Recreaciones Matemáticas, por Joseph S. Madachy. Contiene capítulos dedicados a los cuadrados mágicos y a los Hexágonos.
- Círculos Viciosos y Paradojas, por P. Hughes y G. Brecht. Paradojas lógicas y visuales, incluyendo un análisis de la paradoja de Russell.
- Los Acertijos de Sam Loyd y Nuevos Acertijos de Sam Loyd, editados por Martin Gardner. La fuente de donde se extrajeron varios de los problemas del último capítulo de este libro.
- El Acertijo del Mandarín y Los Gatos del Hechicero, por Henry E. Dudeney. Junto con Sam Loyd, uno de los creadores clásicos de acertijos.

El Editor