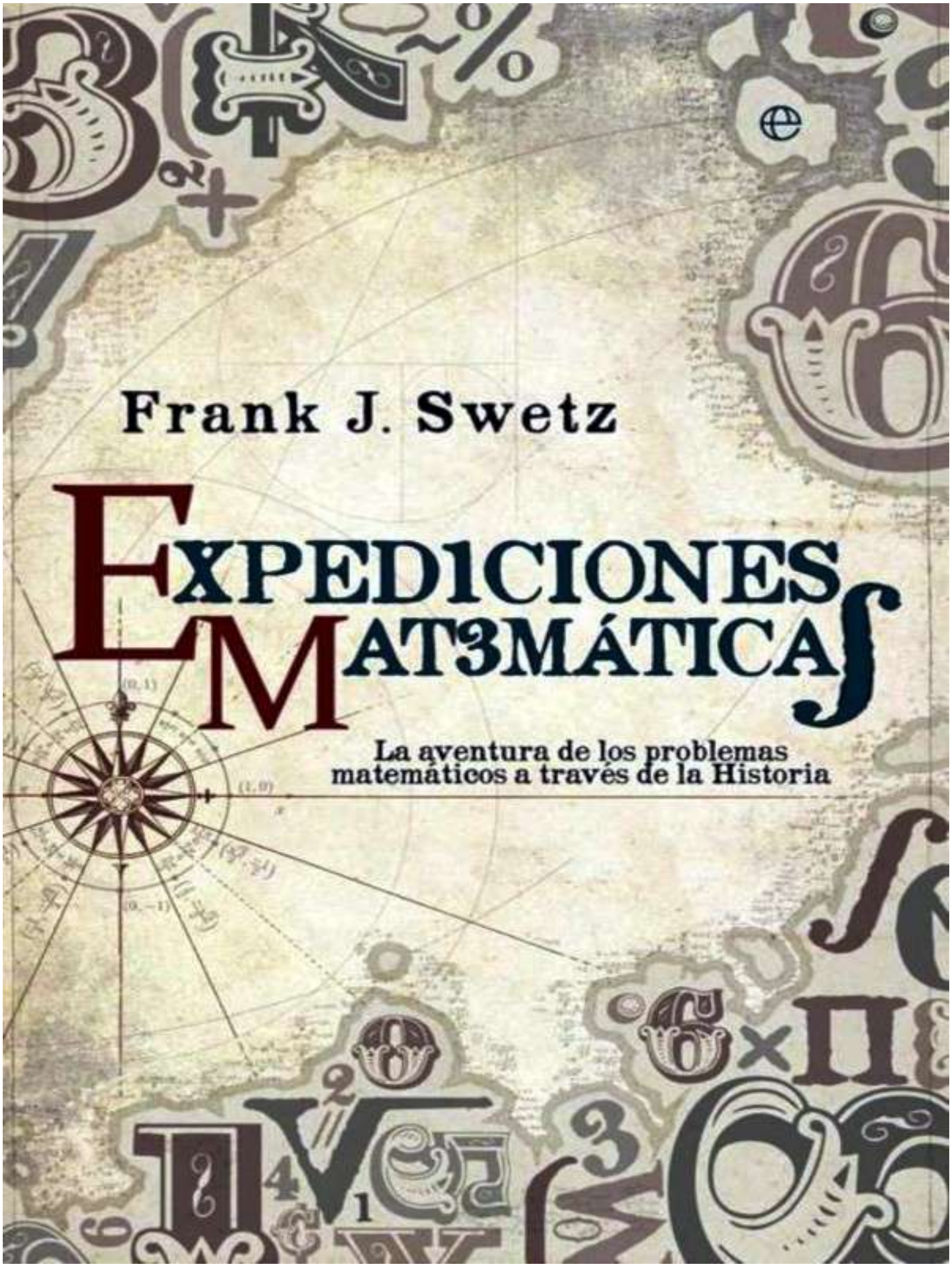

Frank J. Swetz
EXPEDICIONES MAT3MÁTICAS
La aventura de los problemas matemáticos a través de la Historia

Reseña

Es una colección de más de 500 problemas matemáticos cultural e históricamente diversos cuidadosamente elegidos para enriquecer la enseñanza de las matemáticas desde la escuela intermedia hasta el nivel universitario. ¿Qué mejor manera de enseñar a los estudiantes los aspectos multiculturales de las matemáticas que asignándoles problemas compuestos primero en tablas de arcilla por escribas babilónicos, incluidos en el papiro Rhind, o problemas védicos rayados en la corteza de los árboles? Desde Egipto hasta Grecia, China y la India, los problemas de Swetz, tanto prácticos como abstractos, abarcan siglos y culturas.

Swetz ha organizado los problemas por cultura y período histórico, mostrando, a través de las diversas construcciones y contextos de los problemas, la historia y el desarrollo de las matemáticas en todo el mundo. En el camino, nos cuenta lo que varias culturas sabían sobre matemáticas y cómo llegaron a aprenderlas, proporcionando a los instructores una manera maravillosa de incorporar matemáticas multiculturales en la escuela secundaria, la escuela secundaria y el aula universitaria.

Índice

Prefacio

Durante años he trabajado con profesores y estudiantes fomentando la inclusión de material histórico en la enseñanza de las matemáticas; un material que ayuda a humanizarlas, pues las asocia a sus raíces humanas y responde a preguntas como: ¿por qué aparecieron las matemáticas? ¿Cómo se utilizaban? ¿Por qué son importantes? Una información que los estudiantes necesitan para poder responder a las eternas dudas que los acosan: ¿esto para qué sirve? ¿Acaso lo vamos a utilizar alguna vez? En unos curricula ya de por sí atiborrados, la introducción de nuevos materiales resulta complicada; pero he descubierto que un modo eficiente, fructífero y atractivo de incorporar contenido histórico a las matemáticas es mediante el uso de problemas reales propuestos y resueltos por nuestros antepasados. Un sistema del que, en charlas y actividades profesionales relacionadas con este tema, los profesores que lo apoyan me han comentado sus impresiones.

En un libro de actividades pensado como herramienta de enseñanza en clase de matemáticas, *Learning activities from the history of mathematics* (Swetz, 1994), incluí una sección sobre problemas matemáticos. Problemas que fueron recibidos con entusiasmo por los lectores, quienes los utilizaron con éxito con sus estudiantes. Posteriormente, como editor de la revista electrónica *Loci*, publicada por la Mathematical Association of America, se me ocurrió compilar la sección «Problems from another time» («Problemas de otros tiempos»), que ofrecía una amplia selección de problemas históricos para ser utilizados en las aulas. Los profesores volvieron a apreciar mi esfuerzo, comprobando que su contenido motivaba mucho a los alumnos, tanto durante las clases como a la hora de hacer los deberes.

Animado por esta respuesta, y siendo de la firme opinión de que tales problemas son un valioso recurso didáctico, he dedicado este libro a la cuestión del uso de problemas históricos en la enseñanza de las matemáticas. Los materiales que en él se incluyen pretenden ser especialmente adecuados para las necesidades de los profesores y alumnos de matemáticas de secundaria; pero considerar estos problemas y sus implicaciones también resultará beneficioso para aquellos universitarios que estudien matemáticas generales o historia de las matemáticas. Los primeros dos capítulos permiten obtener una visión general sobre la relevancia de los problemas históricos tanto en el proceso de aprendizaje como en la comprensión de las matemáticas, además de presentar diversas estrategias para el uso de los mismos. A continuación, los capítulos del 3 al 16 proporcionan una selección de aproximadamente quinientos problemas. El capítulo 17 presenta las soluciones técnicas que con mayor probabilidad fueron utilizadas en la época en la que se concibieron los problemas, es decir, los métodos utilizados por quienes primero los resolvieron. Por último, en el capítulo 18 hablo sobre el uso de los problemas históricos y animo al lector a buscar otros.

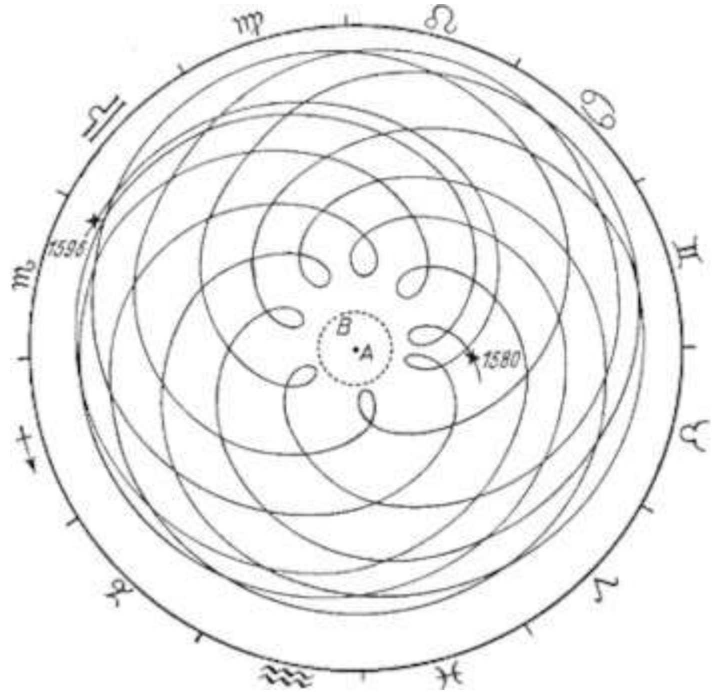
Los problemas se han seleccionado atendiendo tanto a su adecuado contenido matemático como a las diferentes historias sociales y culturales que nos cuentan sobre los usos de las matemáticas. Sus orígenes van desde las inscripciones cuneiformes en antiguas tablillas babilónicas del 2000 a. C. hasta el *Papiro matemático Rhind* egipcio (1650 a. C.), pasando por el manual matemático chino *Los nueve capítulos* (c. 100 d. C.); desde el primer libro impreso en Europa sobre aritmética, la *Aritmética de Treviso* (1478), hasta *The Ladies Diary* del siglo XVIII y el *Farmer's Almanac* del siglo xix del Salvaje Oeste. Cada serie de problemas viene precedida por un prefacio con algunos comentarios pertinentes y algunas

ilustraciones escogidas.
Analizar y estudiar estos problemas puede servir para presentar a la clase un nuevo concepto matemático o reforzar alguno ya estudiado. En sí mismo, cada problema también proporciona una breve anécdota sobre por qué se necesitan las matemáticas. Igualmente, el contexto de los problemas proporciona al lector detalles sobre cómo era la vida de las personas en la época en la cual fueron escritos. Su contenido conecta las matemáticas con la sociedad y, dado que no son elementos cerrados, este aspecto permite utilizarlos tanto para la enseñanza interdisciplinar como para generar diferentes debates en clase.
Como complemento a los distintos grupos de problemas hay breves digresiones tituladas «¿Qué están haciendo?». Su objetivo es enriquecer aún más la comprensión de los problemas matemáticos llegados de épocas lejanas, pues destacan algunos de los interesantes rasgos culturales e históricos que se encuentran en ellos y proporcionan pistas sobre el proceso seguido antaño para su resolución. Las soluciones a los problemas se encontrarán al final del libro, junto a un glosario de términos y una bibliografía que incluye tanto sugerencias de lectura, como las fuentes citadas en el texto.
Mi esperanza es que los profesores experimenten con las ideas y conceptos aquí presentados, que se embarquen en expediciones de aprendizaje y comprensión junto con sus estudiantes y que terminen creando sus propias colecciones de problemas históricos,

gracias a los cuales tanto ellos como sus alumnos pueden acabar apreciando aún más las matemáticas y sus orígenes humanos.

Los problemas matemáticos

Capítulo 1
Los problemas descriptivos. Huellas de la historia de las matemáticas



Dibujo de la órbita de Marte realizado por Johannes Kepler y publicado en su Astronomia nova (1609). Muestra el aparente movimiento retrógrado del planeta tal cual fue registrado entre 1580 y 1596 siguiendo la por entonces imperante teoría ptolemaica. En su época, este diagrama era llamado panis quadragesimalis, o «pan de Cuaresma». Utilizando los precisos datos que acumuló durante quince años de observaciones astronómicas, Kepler refutó esa teoría y demostró que el planeta recorría una órbita elíptica.

Una visión general

Desde un punto de vista histórico, resulta interesante, así como bastante revelador, que algunos de los primeros textos escritos consistan en «problemas descriptivos». Estos ejercicios para el aprendizaje de las matemáticas tienen miles de años de antigüedad y aparecieron por primera vez en la cuenca del Tigris-Éufrates, la antigua Mesopotamia. Los millares de tablillas de arcilla descubiertos por los arqueólogos en esta región permiten entrever la evolución de la escritura. Las tablillas más antiguas que se han encontrado presentan la huella de diferentes fichas de barro, contadores matemáticos concretos cuya marca impresa designaba un valor numérico. Poco a poco, este sistema se fue incorporando a una forma más flexible de escritura, la cuneiforme.

Parece que los primeros productos de este proceso fueron tabillas numéricas, registros que contenían datos de actividades sociales como las cantidades recogidas durante la cosecha o los impuestos pagados y «textos con problemas», es decir, conjuntos de problemas para los que se buscaba una solución, o bien un problema concreto con una respuesta y el proceso que conducía a su solución. La excavación en el recinto de un templo de la ciudad sumeria de Shuruppog sacó a la luz el más antiguo de los problemas descriptivos conocidos, redactado durante el IV milenio a. C.

> *Un granero de cebada. Un hombre recibe 7 sila [de grano]. ¿Cuántos eran sus hombres? [I. e. ¿Cuántos hombres pueden recibir una ración?]. (Robson 2007, 75).*

Un escriba que respondiera a esta pregunta tenía que conocer cuál era la capacidad de un granero: 2.400 *gur*, donde 1 *gur* = 480 *sila*; la tablilla proporciona la respuesta correcta en notación sexagesimal. Si bien el contenido de estos problemas puede parecernos hoy bastante mundano, su mera existencia demuestra la importancia de los problemas descriptivos.

Los problemas descriptivos —aquellos cuyo enunciado presenta los datos narrando una historia o describiendo una situación— son extensiones naturales de la enseñanza oral y en ellos, en vez de tener una única y transitoria confrontación verbal con un problema, uno mantiene una relación prolongada con el mismo. Con el tiempo, la forma escrita permitió que los problemas se estandarizaran y se estableciera un registro de conocimientos matemáticos importantes, así como de las situaciones en las que estos habían de aplicarse. En cierto sentido, se trataba de un instrumento de adoctrinamiento socio-matemático. Este registro especificaba qué matemáticas eran importantes y qué situaciones justificaban su uso. Por lo tanto, los problemas descriptivos nos proporcionan un testimonio histórico no solo de los usos sociales, sino también del cambiante paso de las matemáticas a lo largo del tiempo; concretamente, del modo en que las matemáticas eran utilizadas y cuáles eran sus aplicaciones sociales. Los problemas descriptivos son las «huellas» dejadas por la historia de las matemáticas y su enseñanza. Desde el punto de vista de las matemáticas, nos enseñan dónde hemos estado y la dirección hacia la cual nos dirigimos. Su camino delinea un viaje de participación y comprensión, además de demostrar el poder de las matemáticas.

Un buen rastreador puede decir muchas cosas a partir de unas huellas. Un cazador de ciervos que sigue a su presa puede determinar si el animal se está moviendo con rapidez, si ha saltado, comido bellotas en el suelo del bosque o se ha reunido con otros ciervos; puede, incluso, determinar en qué punto el cazador podría adelantarse a él. Del mismo modo, los problemas descriptivos dejan un rastro, el cual puede decirnos cómo se utilizaban las matemáticas, para qué tareas, así como revelar los intereses y prioridades de la sociedad que los produjo.

Al ser una extensión de una tradición de enseñanza oral, los problemas descriptivos la suplementaron y terminaron por reemplazarla al convertirse en un medio para el estudio individual y personal. Antes de que aparecieran los «libros», estos problemas constituían el descarnado núcleo de aquello que había de conservarse y promocionarse. La aparición de los problemas descriptivos siguió al nacimiento del urbanismo en la Mesopotamia meridional y a la creación de un Estado unificado muy centralizado. El Estado era gobernado por un déspota y controlado mediante una amplia organización burocrática. La mayoría de los problemas descriptivos que se han encontrado son textos escolares destinados a la formación de los escribas que entrarían al servicio del Estado. Al principio, la supremacía de Mesopotamia descansaba sobre la agricultura, que a su vez dependía de la irrigación y la conservación del agua. Según la teoría del antropólogo social Karl Wittfogel, este tipo de «sociedades hidráulicas» comparte unas características comunes, la principal de las cuales es una burocracia dominante cuya tarea es iniciar y mantener obras públicas como la construcción de diques, canales y almacenes de grano, así como dirigir el uso de la tierra y recaudar impuestos (Wittfogel 1957).

Figura 1.1. Esquema del desarrollo de problemas basados en las necesidades humanas

Cuestiones todas ellas evidentes en las tablillas con problemas que se han conservado. De las colecciones de problemas emerge un patrón de intereses sociales y una cadena de situaciones que exigen una consideración matemática (*véase* la fig. 1.1).

La resolución de problemas por parte de los escribas sigue un procedimiento estricto, que está pensado para obtener una cifra. Se hace hincapié en la computación numérica. Las situaciones descritas en los problemas se expresan con frecuencia por medio de la medición de objetos y de actividades de la vida diaria. A los escribas se les pide que calculen el área de terrenos, la longitud de canales, la cantidad de tierra extraída de una excavación o el número de ladrillos necesarios para construir una estructura:

> *Poseo dos campos de grano. Del primero obtengo 2/3 de fanega de grano por unidad de área; del segundo, 1/2 fanega por unidad de área. La cosecha del primer campo sobrepasa a la del segundo en 50 fanegas. El área total de los dos campos juntos es de 300 unidades cuadradas. ¿Cuál es el área de cada campo? (Van der Waerden 1983, 158).*

> *Un hombre transporta 540 ladrillos una distancia de 30 varas. [A cambio de esta tarea] le entregan 1 ban de grano. Ahora transporta 300 ladrillos y termina el trabajo. ¿Cuánto grano le entregan? [1 ban = 10 sila (litros)]. (Robson 2007, 115).*

A pesar de su aparentemente estrecha relación con los acontecimientos de la vida diaria, los escenarios matemáticos resultantes son a menudo poco realistas. La situación no es más que un telón de fondo para las matemáticas. El punto hasta el cual las matemáticas dominan la aplicación queda mejor ilustrado en los problemas geométricamente concebidos, como los siguientes:

> *Un terreno triangular [con forma de triángulo rectángulo] se divide entre seis hermanos mediante líneas equidistantes perpendiculares a la base del triángulo. La longitud de la*

base es de 390 unidades y el área del triángulo es de 40.950 unidades cuadradas. ¿Cuál es la diferencia de área entre terrenos adyacentes? (Neugebauer y Sachs 1945, 52).

Una caña está apoyada en un muro. Si la bajo 9 pies [desde el extremo superior], el extremo inferior se desplaza 27 pies. ¿Qué longitud tiene la caña? ¿Qué altura tiene el muro? (Van der Waerden 1983, 57).

También hay problemas cuya intención matemática no resulta obvia, por ejemplo, «la medición de piedras»:

Me encontré con una piedra pero no la pesé; después de quitarle 1/7 y luego 1/13 [de lo que quedaba], encontré que pesaba 1 manna. ¿Cuál era el peso original de la piedra? (Katz 2003, 27).

Además de en Mesopotamia, se han encontrado colecciones de problemas con temas y formatos similares en otras «sociedades hidráulicas» del mundo antiguo: Egipto y China. Una de las pocas colecciones de problemas descriptivos que se conservan del antiguo Egipto la encontramos en el *Papiro matemático Rhind*. Este conjunto de 85 problemas, compilados aproximadamente en el 1650 a. C., estaba destinado a la formación de escribas. Cada problema está asociado a un aspecto de la vida cotidiana egipcia:

Divide 100 panes entre 10 hombres: incluidos un barquero, un capataz y un portero, que reciben raciones dobles. ¿Cuál es la parte de cada uno? (Chace 1979, 84).

¿Cuántas cabezas de ganado hay en un rebaño cuando 2/3 de 1/3 de ellas es igual a 70, la cantidad que se debe al dueño como tributo? (Chace 1979, 102).

La teoría de que las grandes pirámides de Egipto fueron construidas con grupos de trabajadores esclavos ha de abandonarse. Los arqueólogos se han dado cuenta de que fueron construidas por obreros especializados, pagados por su trabajo con raciones de grano, pan y cerveza. Las colecciones de problemas egipcios así lo confirman.

La que quizá sea la más organizada, completa e influyente colección de problemas descriptivos del mundo antiguo la encontramos en el *Jiuzhang suanshu* (*Los nueve capítulos del arte matemático*) de China (c. 100 d. C.). Los 247 problemas que componen esta colección, junto con el modo de resolverlos y sus comentarios anejos, atendían a las necesidades del Imperio chino. Cada uno de sus nueve capítulos está dedicado a una aplicación matemática concreta:

1. Medición de terrenos.

2. Procesado de mijo y arroz.

3. Distribución mediante progresiones.

4. Lado corto: medición y agrimensura.

5. Consultas sobre la construcción: trabajos de ingeniería.

6. Impuestos imparciales: impuestos y asignación de tareas.

7. «Excesos y deficiencias»: ecuaciones lineales.

8. Modos de calcular mediante tabulación: sistemas de ecuaciones.

9. Triángulos rectángulos: agrimensura.

Esta colección se convirtió en un clásico de las matemáticas, sirvió como referencia en China durante más de mil años y fue un manual de matemáticas clásico también para Japón y Corea.

Hacia el oeste, en las costas del Mediterráneo, la civilización griega se había ido convirtiendo en una serie de ciudades-Estado independientes basadas en el comercio marítimo. El Imperio griego no era una sociedad hidráulica —una que dependiera de la irrigación— y sus características y prioridades intelectuales diferían de las de sus vecinos del este. Si bien las matemáticas eran necesarias debido a sus usos sociales y económicos, los griegos establecieron una dicotomía entre las matemáticas aplicadas: la logística (el cálculo), y las matemáticas teóricas: la aritmética (aspectos de los números y formas merecedoras de consideración filosófica). La logística, las matemáticas «menos valiosas», era practicada por esclavos, artesanos y mercaderes. No quedan restos de sus problemas matemáticos. En las sociedades hidráulicas, los problemas matemáticos se convirtieron en un fin en sí mismos y proporcionaban como resultado respuestas numéricas específicas, mientras que para los griegos los problemas eran el principio a partir del cual evolucionaban las teorías. La colección de problemas griegos más antigua que se conserva la encontramos en la *Antología griega*, la cual probablemente fuera reunida por el gramático Metrodoro (c. 500 d. C.). Los 46 problemas aritméticos que la componen aparecen como acertijos y dan la impresión de haber sido compilados a modo de desafío intelectual.

Las colecciones de problemas descriptivos desempeñarán un papel destacado en la enseñanza de las matemáticas comerciales y en la introducción de los numerales indo-arábigos y sus algoritmos computacionales en la Europa medieval y de comienzos del Renacimiento. El número de problemas introducidos en un discurso fue disminuyendo según se fueron volviendo más elaboradas las formas textuales; no obstante, los escenarios de los problemas se repetían y así fue como terminó por aparecer una estandarización de los problemas descriptivos. A partir de entonces estos completaron y reforzaron instrucciones más textuales. Aparecieron en libros de aritmética, pero su énfasis todavía variaba atendiendo a las condiciones sociales existentes y a la intención del autor. En la Inglaterra del siglo XVI, escritores de textos matemáticos como Robert Recorde (1510-1558) y Humphrey Baker (m. 1587) presentaron problemas que resultaban interesantes para artesanos y mercaderes. Recorde también incluyó problemas relacionados con la guerra y las cuestiones militares, al igual que hicieron otros autores de textos aritméticos de la época, como por ejemplo Christoff Rudolff, Niccolo Tartaglia y Thomas Digges.

Con la popularización de las matemáticas acaecida durante los siglos XVIII y XIX llegó el auge de las publicaciones periódicas —diarios, almanaques y noticieros— que incluían colecciones de problemas descriptivos para la edificación y educación matemática de sus lectores. Uno de esos influyentes periódicos fue *The Ladies Diary*, publicado en Inglaterra desde 1704 hasta 1841. En él ofrecían a los lectores desafíos en forma de problema, cuya solución era ofrecida en números posteriores. Cuando en 1804 se publicó en Estados Unidos la primera revista matemática, el *Mathematical Correspondent*, esta emuló al *Diary* en su exposición y uso de los problemas, incluso ofreció un premio en metálico a las mejores soluciones.

La forma y presentación de los problemas

Los primeros problemas escritos eran sencillas afirmaciones seguidas por una pregunta y en ellos se recogían las palabras del experto o instructor en matemáticas para reutilizarlas y convertirlas en algo permanente. Servían para poner a prueba la compresión básica y los métodos de cálculo: encuentra una suma, divide una cantidad, etc. Pero poco a poco se volvieron más exigentes, requiriendo el análisis de datos y la síntesis de métodos de solución. Su relevancia social y su atractivo psicológico se incrementaron mediante la referencia a las actividades cotidianas. Semejantes alusiones a la vida real tuvieron como resultado problemas con datos realistas que producían soluciones prácticas, o problemas con escenarios pseudorrealistas que generaban respuestas que no eran prácticas. Por lo general, este último tipo de problema se concebía para demostrar conceptos matemáticos más que con la intención de resultar útil. Los diversos subtipos de problemas realistas que aparecieron en Europa durante el siglo XVI planteaban interrogantes con una base científica cuya respuesta implicaba conocimientos tanto de matemáticas como de las nuevas ciencias.

Una tercera clase de problemas descriptivos apareció a modo de desafío recreativo e intelectual. En las primeras colecciones de problemas, esas «adivinanzas» o «rompecabezas» se entremezclaban con los problemas matemáticos prácticos; su existencia servía para proclamar que las matemáticas también eran una pura actividad intelectual que transcendía al mundo de las actividades diarias. Quizá los más simples y duraderos de estos problemas recreativos son aquellos que adoptaban la fórmula «adivina el número», que encontramos por primera vez en el *Papiro matemático Rhind*, con sus tres mil años de antigüedad:

> *¿Cuál es la cantidad que sumada a su séptima parte da 19? (Chace 1979, 66).*

Y en los comienzos de Estados Unidos:

Hay dos números cuya suma es igual a la diferencia de sus cuadrados; y si la suma de los cuadrados de los dos números se sustrae del cuadrado de su suma, el resultado será 60. ¿Cuáles son los dos números? (Watson 1777).

En muchos de estos primitivos problemas recreativos se observa una fascinación por las progresiones geométricas que se extiende por varias culturas. El *Papiro matemático Rhind* introdujo por primera vez a los proverbiales «siete gatos»:

[Hay] 7 casas; en cada una de ellas hay 7 gatos; cada gato mata 7 ratas; cada rata se habría comido 7 espigas de espelta; cada espiga de espelta producirá 7 hekat. ¿Cuál es el total de todos ellos? ¿Cuántos hekat de grano se han salvado? (Chace 1979, 112).

Dos mil años después, una versión china independiente aparecida en el *Manual de matemáticas del maestro Sun* (c. 400 d. C.) sustituía el culturalmente preferido número siete de los egipcios por el número nueve, especial para los chinos:

Se ven 9 terraplenes; cada terraplén tiene 9 árboles; cada árbol tiene 9 ramas; cada rama contiene 9 nidos; cada nido está ocupado por 9 pájaros; cada pájaro tiene 9 crías; cada cría tiene 9 plumas y cada pluma tiene 9 colores. Encuentra la cantidad de cada cosa. (Lam y Ang 1992, 181).

Cuando en el año 781 el monje británico Alcuino de York se convirtió en el consejero educativo del emperador Carlomagno, compiló una colección de problemas descriptivos para la formación de los pajes de la corte. Sus *Propositiones ad acuendos juvenes* son una recopilación de 56 problemas de tipo adivinanza, el primero escrito en latín. También contenía preguntas sobre progresiones:

> *Una escalera de mano tiene 100 escalones. En el primer escalón hay posado 1 pájaro; en el segundo 2; en el tercero 3, y así hasta el centésimo. ¿Cuántos pájaros hay en total? (Hadley y Singmaster 1992, 121).*

Cuando Leonardo de Pisa publicó su influyente *Liber abaci* en 1202, incluyó varios de los problemas de Alcuino en su antología de ejercicios. Una vez establecidos, los problemas y los escenarios tipo proporcionaron plantillas mediante las cuales se compondrían los futuros problemas de otras generaciones.

Contenido matemático

Hace ya varios años realicé un experimento con una audiencia de treinta duchos profesores de secundaria, quienes participaban en un taller sobre historia de las matemáticas que estaba impartiendo. Como prueba preliminar de sus conocimientos les entregué cinco problemas descriptivos, modificados de tal modo que el origen cultural y temporal de cada uno de ellos quedara oculto. Al hacer los problemas y examinar los conceptos matemáticos utilizados en ellos, se les pidió que fecharan el origen del ejercicio atendiendo a varias categorías cronológicas (antiguo Egipto, Europa del Renacimiento, etc.). Si consideramos que el aprobado se conseguía con un acierto del 70%, 28 de los profesores fracasaron. Es muy sencillo, simplemente no conocían cuándo se originaron las matemáticas que llevaban años enseñando. Dado que la perduración en el tiempo de un concepto matemático atestigua su importancia, estos profesores poseían una limitada apreciación de la relevancia de los conceptos matemáticos incluidos en la prueba.

El contenido matemático de los problemas descriptivos compilados un milenio antes de la era cristiana revela que quienes realizaban los cálculos en esa época podían realizar todas las operaciones básicas conocidas hoy día con un alto grado de precisión. Podían calcular raíces cuadradas y cúbicas con varios decimales; conocían las fórmulas correctas para las áreas y volúmenes más habituales. Trabajaban con ecuaciones lineales y cuadráticas, comprendían el concepto de las progresiones aritméticas y geométricas, se aproximaron al valor de π hasta una cifra con la que era posible trabajar y manejaban la relación matemática que hoy conocemos popularmente como el teorema de Pitágoras. Este matemático vivió durante el siglo V a.C. y, sin embargo, problemas cuya solución demuestra que ya se conocía la relación que lleva su nombre los encontramos en muchas colecciones de problemas que lo anteceden en centenares de años, como por ejemplo estos del período Babilónico Antiguo (2000-1600 a. C.):

Una viga de longitud ½ [está apoyada contra un muro]. La parte superior se ha resbalado hacia abajo una distancia de 1/10. ¿Cuánto se ha desplazado el extremo inferior? (Van der Waerden 1983, 59).

[Tenemos] una puerta cuya altura es de ½ varas 2 codos, y la anchura es de 2 codos. ¿Cuál es la diagonal? (Robson 2007, 140).

La variedad y alcance de los 24 problemas con triángulos rectángulos que aparecen en el capítulo 9 del *Jiuzhang* indican que ya en una fecha temprana los agrimensores y matemáticos chinos conocían bien el teorema de Pitágoras. En concreto, dos de los problemas de esta colección, el del «bambú roto» y el de «la caña en el estanque», han aparecido de diferente guisa en varias culturas:

Un brote de bambú de 10 chi de altura está roto cerca de su extremo superior. El brote y la parte rota forman un triángulo. El extremo superior toca el suelo a una distancia de 3 chi del tallo. ¿Cuál es la longitud del tallo que queda de pie? (Swetz y Kao 1977, 44).

En el centro de un estanque cuadrado cuyo lado es de 10 chi crece una caña cuya punta se alza 1 chi por encima del nivel del agua. Si estiramos de la caña hacia la orilla, su extremo superior se iguala con la superficie del agua. ¿Cuál *es la profundidad del estanque y cuál la longitud de la planta? (Swetz y Kao 1977, 30).*

El problema del bambú aparece de nuevo en el clásico matemático sánscrito del siglo IX *Ganita-Sara-Sangraha*, de Mahavira, y mucho después en la *Aritmética* de Filippo Calandri, publicada en Florencia en 1491 (fig. 1.2).

(a) (b)

La figura 1.2. a) El problema del bambú en el capítulo 9 del Jiuzhang (China c.100); b) el problema del árbol roto, tal cual aparece en la Aritmética de Filippo Calandri, publicada en Florencia en 1491. Fue el *primer libro de aritmética con ilustraciones impreso en Europa*

En una versión hindú más pintoresca del problema del bambú publicada por Bhaskara (1114-c. 1182), la caña se ha convertido en un loto y gansos rojos ocupan el estanque (Colebrooke 1817, 66).

El estudio de los problemas del capítulo 8 del *Jiuzhang* revela que los matemáticos chinos de esta temprana época eran capaces de resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante eliminaciones gaussianas, un método atribuido a C. F. Gauss (1777-1855), y que trabajaban con facilidad tanto con números positivos como negativos, un logro que anteriormente se atribuía a los matemáticos hindúes del siglo VII.

Son varios los casos en los cuales la primera vez que una técnica matemática aparece es en un problema. Por ejemplo, la primera ocasión en que aparece el conocido «teorema de resto» chino es en un problema del *Manual de matemáticas del maestro Sun* (400 d. C.):

> *Tenemos un número desconocido de cosas. Si las contamos de tres en tres tenemos un resto de dos; si las contamos de cinco en cinco tenemos un resto de tres; y si las contamos de siete en siete tenemos un resto de dos. Encuentra el número de cosas. (Lam y Ang 1992, 104).*

A partir del siglo XIII, los problemas descriptivos chinos demuestran técnicas para calcular raíces numéricas para ecuaciones de grado superior. Se trata de una capacidad que no fue común en Europa hasta la aparición del método de Ruffini-Horner en 1819. Un problema típico de este tipo es el siguiente:

> *Hay un árbol a 135 bu de la puerta sur [de una ciudad amurallada]. El árbol puede verse si uno camina 15 bu desde la puerta norte y luego 280 bu en dirección este. Encuentra el diámetro de la ciudad amurallada. (Li Zhi 1248).*

Utilizando notación moderna y considerando que el radio de la ciudad está representado por x, las condiciones del problema dan como resultado la siguiente ecuación:

$$4x^4 + 600x^3 + 22.500x^2 - 11.681.280x - 788.486.400 = 0,$$

habiéndose calculado correctamente que x es 120 *bu* (Libbrecht 1973, 134).

A menudo, los problemas planteados como sencillas afirmaciones y destinados a fomentar el pensamiento matemático han servido de punto de partida para estudios matemáticos. Consideremos el «problema de la persecución», en el cual una criatura (ya sea persona o animal) persigue a otra. La primera vez que aparece este problema es de nuevo en el *Jiuzhang* chino, en el capítulo 6, problema 14:

Una liebre corre 100 bu por delante de un perro. El perro, que la persigue a 250 bu, se queda a 30 bu de alcanzarla. Dime en cuántos bu alcanzará el perro a la liebre. (Shen, Crossley y Lun 1999, 330).

Cuya versión europea, debida a Alcuino, es la siguiente:

Un perro que persigue a un conejo, el cual le lleva una ventaja de 150 pies, salta 9 pies cada vez que el conejo salta 7 pies. ¿Cuántos saltos necesita el perro para atrapar al conejo? (Hadley y Singmaster 1992, 115).

A comienzos de la Edad Media, la modificación europea de Abraham ben Ezra (c. 1140) había reemplazado a los animales por viajeros, un ejemplo que quizá fuera más relevante para las circunstancias de la época. La situación se personificó mediante la incorporación de nombres propios:

Reuben sale de su ciudad en la mañana del primer día de la luna nueva para encontrarse con su hermano Simon en la ciudad de Simon. Ese mismo día, Simon sale de su ciudad para ver a Reuben en su ciudad. La distancia entre ambos lugares es de 100 millas. Preguntamos: ¿cuándo se encontrarán? (Sanford 1927, 72).

Más tarde aún, la situación se generalizó todavía más mediante la inclusión de correos. Los «problemas de correos» que toman diferentes rutas fueron populares entre los escritores alemanes e italianos del siglo XVI. En 1732, el matemático francés Pierre Bouguer propuso ante la Academia Francesa un problema en el que aparecían un barco mercante y un barco pirata. El mercante se aleja del pirata siguiendo un rumbo perpendicular al de este, que lo persigue. Bouguer buscaba la *courbe de poursuits* o «curva de persecución». Esta situación inició un tema de investigación matemática que sigue existiendo en nuestros días: el análisis de intercepción y persecución.

Otro problema sencillo que ha dado lugar a algunas variantes interesantes es el «problema del cruce del río». El primero en presentarlo fue Alcuino de York en sus *Propositiones* con esta fórmula:

> *Tres amigos, cada uno con una hermana, tenían que cruzar un río. Cada uno de ellos deseaba a la hermana del otro. En el río encontraron una pequeña barca en la cual solo podían cruzar dos de ellos a la vez. ¿Cómo pueden cruzar el río sin que ninguna de las mujeres sea deshonrada por los hombres? (Hadley y Singmaster 1992, 111).*

Otros tres problemas de la colección de Alcuino presentan la misma situación con temas diferentes: lobo, cabra y repollo; personas con sobrepeso; y erizos. Quizá fueran las implicaciones licenciosas del problema las responsables de que el interés por el mismo nunca decayera. Luca Pacioli, un profesor de matemáticas del

Renacimiento, afirmó que cuatro o cinco parejas necesitarían una barca de tres personas. El matemático Niccolo Tartaglia afirmó en 1556 que cuatro parejas podían cruzar en una barca de dos plazas, desafiando a Pacioli. Finalmente, Claude-Gaspard Bachet de Méziriac refutó a Tartaglia en su propia colección de problemas recreativos: *Problèmes plaisants et delectable,* de 1624. El interés en este problema fue resucitado en el siglo XIX por el matemático francés François Édouard Anatole Lucas. En 1879, uno de los estudiantes de Lucas, Cadet de Fontenay, introdujo una isla en la ecuación, lo cual permitía a cuatro parejas completar el tránsito en 24 cruces (Pressman y Singmaster 1989). Desde entonces, Rouse Ball ha llegado a la conclusión de que para n parejas se necesitan $6n$ - 7 cruces (Ball 1987). Las variantes culturales de este problema concreto también son interesantes y las trataremos más adelante.

El lugar adonde conducen las huellas: relevancia social y cultural

En su estudio de comienzos del siglo XX sobre las colecciones de problemas descriptivos, el historiador de las matemáticas D. E. Smith quedó impresionado por la cantidad de información social y cultural transmitida por ellos (Smith 1918). Mediante su contenido y énfasis, los problemas descriptivos son vehículos de adoctrinamiento social, ya sea de forma implícita o explícita. El rastreador de las matemáticas puede discernir cuáles fueron las actividades del sujeto durante un viaje. De los problemas descriptivos se puede extraer mucha información fáctica e histórica.

En la antigua Mesopotamia, la transición entre el IV milenio y el período Babilónico Antiguo estuvo marcada por una disminución del despótico control burocrático: las ciudades-Estado manifestaron su independencia; la agricultura colectiva fue reemplazada por terrenos más pequeños; los artesanos reales fueron reemplazados por fabricantes privados; los mercaderes regios se convirtieron en comerciantes independientes; y a los individuos se les permitió utilizar sellos de identificación, una práctica hasta entonces reservada a la realeza. El énfasis dejó de radicar en el Estado y su aparato para pasar a los individuos. En los documentos de los escribas es evidente una nueva confianza en sí mismos. Los problemas matemáticos escritos se vuelven más creativos y algebraicos en su concepción, además de pasar a ser desafíos mentales más que meros ejercicios.

En cambio, en las colecciones de problemas chinos durante siglos se mantiene una sorprendente similitud y rigidez formal con respecto a los planteamientos y soluciones de los problemas. En la tradición confuciana, los clásicos escritos por maestros han de ser reverenciados, copiados y todo lo más comentados con respeto. Este patrón de comportamiento fue seguido también en la enseñanza de las matemáticas, en la cual todos los textos imitaron un canon de formas o recetas de problemas. Las colecciones de problemas del siglo XIX todavía imitaban las situaciones representadas en el *Jiuzhang* del siglo I. Esta dogmática adherencia a formas de problemas y estándares existentes ahogó la creatividad y limitó los avances matemáticos en el Imperio chino. Dado que la pregunta matemática «¿qué pasaría si...?» no aparece, tampoco lo hicieron las matemáticas teóricas (Swetz 1996).

Si bien en un principio los japoneses emularon a sus vecinos chinos y adoptaron sus clásicos matemáticos y sus colecciones de problemas para la formación de sus estudiantes y burócratas, con la llegada del período Edo (1603-1868) comenzaron a desarrollar sus propias formas de problemas. Durante este período, Japón se sumergió en el aislacionismo, cortando la comunicación con la temida intrusión occidental. Fue una época de introspección cultural y renovada reverencia por las costumbres tradicionales. En 1627, el matemático Yoshida Koyu publicó *Jinkoki* [*Tratado sobre la eterna verdad matemática*], en el cual definió un nuevo estándar matemático al incluir al final de su trabajo una lista de problemas sin resolver. Estos fueron bien recibidos por los lectores, que a su vez ofrecieron sus soluciones y plantearon nuevos desafíos en forma de problemas. El proceso no tardó en convertirse en una oleada popular de resolución de problemas, basados principalmente en la solución de complejos e imaginativos supuestos geométricos que implicaban propiedades circulares y trataban de hallar la longitud de cuerdas, arcos y similares. La gente del común, como granjeros y demás, se implicó abiertamente en la solución de problemas y, como gesto de agradecimiento, quizá incluso como bravuconada por haberlos resuelto, escribía sus problemas y sus soluciones en placas de madera que colgaban luego en el templo o santuario sintoísta local. Uno de estos problemas de tablilla, o *sangaku*, llevaba el siguiente desafío: «¡A ver si puedes demostrar esto!».

Históricamente, un movimiento semejante de planteamiento y solución de problemas parece haber sido algo único de los japoneses. Uno de los problemas de Koyu decía:

> *Hay un tronco de madera preciosa de 18 pies de largo cuyas bases tienen 5 pies y 2½ pies de circunferencia. ¿En cuántas longitudes debería ser cortado el tronco para trisecar su volumen? (Cooke 1997, 248).*

Y un *sangaku* en notación moderna diría como sigue:

> *Los centros de un conjunto de n círculos iguales de radio r son los vértices de un n-gono. Si S_i es la suma de las áreas interiores del n-gono y S_0 la suma de las áreas exteriores, demuestra que $S_i - S_0 = 2r$. (Fukagawa y Rigby 2002, 27).*

El auge del capitalismo mercantil europeo a finales de la Edad Media vino acompañado por un renovado interés en la computación numérica y la resolución de problemas. Entre los siglos XII y XV se produjo una oleada de manuscritos, y después libros, que promovieron tanto el uso de los numerales indo-arábigos y sus correspondientes algoritmos como la resolución de problemas comerciales. Problemas que ahora venían acompañados por explicaciones más teóricas, pero que aun así seguían proporcionando la mayoría de la enseñanza práctica. Cuando en 1478 apareció en Italia el primer libro impreso de aritmética, la *Aritmética de Treviso*, sus 123 páginas de texto incluían 62 problemas que cubrían diferentes cuestiones mercantiles: cálculo de intereses, determinación de las pérdidas y las ganancias, seguros, trueques, matemáticas de las sociedades mercantiles, cálculo de taras y sobrepeso, pago de impuestos y aduanas, tiempos y coste del transporte, alegaciones y problemas diversos, así como otras muchas cuestiones de interés (Swetz 1987).

Las situaciones descritas en estos problemas revelan mucho sobre la vida diaria de esa época, como por ejemplo que para arar se utilizaban bueyes, que los principales centros comerciales europeos eran Venecia, Lyon, Londres y Amberes, o que los bienes con los que más a menudo se comerciaba eran telas, lana, bronce y arroz. En Siena, el alquiler de una casa costaba 30 liras al año, mientras que en la Florencia de 1640, el precio era de 300 liras. En la Italia del siglo XIV, la carne de vacuno —de la que 1 *grosso* se vendía por 3 libras— estaba destinada a los ricos, al igual que la pimienta, el jengibre y el azúcar. En la Italia del siglo xvi, el pan costaba medio penique las 20 onzas (0,62 kg). Resulta evidente la existencia de una estructura de clases sociales. La calidad relativa de algunos de estos productos puede juzgarse a partir de la información proporcionada por los problemas: el lino español tenía un precio de venta que variaba entre los 94 y los 120 ducados por unidad de peso, mientras que el lino italiano alcanzaba los 355 ducados por la misma cantidad.

El predominio de los problemas de cambio monetario, así como cuestiones varias relativas a los metales, demuestra el confuso estado en el cual se encontraban la acuñación y los estándares monetarios. Un hecho confirmado también por la existencia del trueque, que señala la inestabilidad existente en el suministro de moneda. El cálculo de taras y del sobrepeso para corregirlas era una cuestión anticuada, pero importante, para los mercaderes de la Europa renacentista. Uno es la mengua que se produce en la mercancía como resultado de los azares del transporte y el otro el complemento de peso destinado a enjugar esa pérdida en los contenedores —barriles, cajas y similares— utilizados para guardar las mercancías. Los largos tiempos de viaje y el pago de numerosos aranceles aduaneros atestiguan también los problemas del traslado de bienes. Tenemos, incluso, información sobre la vida en un hotel que nos proporciona un problema alemán de 1561 donde se describe una *gausthause* con 8 habitaciones, cada una con 12 camas, en cada una de las cuales duermen 3 huéspedes. Al lector se le pide que calcule la factura que habrán de pagar.

En muchos libros se encuentran frecuentes referencias a la industria de la lana, una fuente primordial de ingresos en Europa:

> *Un hombre compra varias balas de lana en Londres, cada una de las cuales pesa 200 libras (medida inglesa) y le cuesta 24 florines. Envía la lana a Florencia y paga el transporte, los aranceles y otros gastos, que alcanzan la*

cantidad de 10 florines. Desea vender la lana en Florencia a un precio que le permita conseguir un 20% de beneficio sobre su inversión. ¿Cuánto tiene que cobrar por un hundredweight de 100 libras londinenses, que equivalen a 133 libras florentinas? (Ghaligai 1521, fol. 31v).

Las cambiantes necesidades sociales, políticas y económicas hicieron que el contenido de los problemas descriptivos se modificara de forma acorde. El auge de la cría de animales en Europa vino acompañado por la aparición de problemas de «pastos»:

Dos hombres alquilan un pasto por 100 livres, sobrentendiéndose que dos vacas se considerarán equivalentes a tres ovejas. El primero introduce en el campo 60 vacas y 85 ovejas; el segundo, 80 vacas y 100 ovejas. ¿Cuánto debe pagar cada uno de ellos? (Trenchant 1566, 178).

La primitiva Iglesia cristiana prohibía cobrar intereses en las transacciones comerciales, una política que se vio confirmada en el Concilio de Vienne en 1311. No obstante, el comercio exigía el préstamo de dinero. Con la aprobación de la Iglesia, los prestamistas y banqueros judíos llenaron este vacío, haciendo préstamos y cobrando intereses. El interés compuesto, una desagradable situación bajo la que encontrarse, se asoció a menudo con los prestamistas judíos:

Un judío le presta 20 florines a un hombre durante cuatro años y recoge los intereses de su capital cada medio año. Pregunto: ¿a cuánto ascenderá la cantidad de 20 florines en cuatro años si un florín produce 2 peniques a la semana? Halla el interés del interés. (Riese 1522, fol. Gv).

Después de que el Concilio de Letrán de 1515 permitiera a los cristianos cargar interés, la atención por el mismo se incrementó en los problemas.

En el siglo XVI las necesidades de la guerra europea comenzaron a encontrar su sitio en los problemas descriptivos matemáticos. Por ejemplo, para detener las cargas de caballería contra la infantería, en el siglo XV los suizos inventaron el uso de formaciones de piqueros y alabarderos en falanges cuadradas. En formación cerrada y con las armas apuntadas hacia el exterior, esta formación defensiva se conocía como el «erizo». Las matemáticas de la formación de tropas en cuadrados se convirtieron en materia de los problemas:

Hay un capitán que posee un gran ejército y gustoso lo dispondría en una formación cuadrada, tan grande como esta pueda ser. Sin embargo, en su primera prueba de una formación cuadrada le sobran 284 soldados. No obstante, al probar de nuevo añadiendo uno más en el frente se encontró a falta de 25 hombres. ¿Cuántos soldados calculas que tiene? (Recorde 1557, fol. G).

Si bien la introducción de la artillería en la guerra volvió obsoleta esta formación, este tipo de problemas continuó en los libros de aritmética hasta el siglo XIX.

Un interesante rastro que seguir es el de un problema descriptivo concreto por medio de sus variantes a lo largo de un período de tiempo. Uno que ha perdurado en casi todas las culturas es el «problema de las cisternas». Originado probablemente en el mundo mediterráneo de Grecia o Roma, en un principio el problema tenía que ver con el agua que fluía de una fuente. La versión que aparece en la *Antología griega* dice lo siguiente:

> *Soy un león de latón; mis caños son mis dos ojos, mi boca y la planta de mi pata derecha. Mi ojo derecho llena una jarra en dos días, mi ojo izquierdo en tres y mi pata en cuatro. Mi boca es capaz de llenarla en seis horas. Dime cuánto tardarán en llenarla las cuatro juntas. (Page et al. 1916, 31).*

En la Europa agrícola del siglo XVI, la molienda se convirtió en tema de problemas descriptivos:

> *Un hombre desea moler 500 rubii de grano. Se dirige a un molino que tiene cinco ruedas. La primera de ellas muele 7 rubii de grano en una hora, la segunda 5, la tercera 4, la cuarta 3 y la quinta 1. ¿En cuánto tiempo estará molido el*

grano y cuánto molerá cada piedra del molino? (Clavius 1583, 191).

Posteriormente, esta misma situación matemática aparece representada en referencia al comercio: la velas de un barco (Borghi 1484), amigos bebiendo vino (Buteo 1559), animales devorando una oveja (Calandri 1491) y, la que quizá sea su forma más habitual, la relacionada con el trabajo agrícola:

Si dos hombres o tres chicos pueden arar un acre en 1/6 de día, ¿cuánto tiempo requerirán tres hombres y dos chicos para ararlo? (Brooks 1873, 191).

Una versión victoriana que encontramos en el *Treatise on arithmetic* de J. H. Smith (1880) nos muestra las condiciones de trabajo de un minero:

Si 5 bombas, cada una con un movimiento de manivela de 3 pies, vacían una mina trabajando 15 horas al día durante 5 días; ¿cuántas bombas con un movimiento de manivela de 2½ pies, trabajando 10 horas al día durante 12 días, serán necesarias para vaciar la misma mina, teniendo en cuenta que el accionado de las manivelas del primer grupo de bombas se realiza 4 veces más rápido que el del segundo? (p. 120).

Otro problema que ha dejado un largo y tortuoso rastro es el del cruce de un río de Alcuino, ya mencionado. Dejando atrás la moral de la Iglesia católica referente a la inocencia de las jóvenes vírgenes, el problema pasó a ocuparse de las distinciones de clase social. Una versión de 1624 tiene a tres amos y sus sirvientes cruzando; pero cada uno de los amos odia a los sirvientes de los demás y les causará daño en cuanto tenga la oportunidad. Por tanto, amos y criados deben quedar separados. En 1881, el *Cassell's book of indoor amusements* [*El libro de Cassell de pasatiempos de interior*] presenta la situación con unos violentos ayudas de cámara que robarán a cualquier amo al que superen en número. Diez años después, en el cénit del imperialismo británico y de la puesta en práctica la teoría de la pesada tarea encomendada al hombre blanco, el problema pasa a estar protagonizado por unos misioneros y unos caníbales, los primeros de los cuales deben evitar ser comidos por sus compañeros de viaje.

La mayor parte de los problemas considerados en la temprana aritmética norteamericana reflejan el nacimiento de la nación como una potencia comercial. Tales problemas proporcionan gran cantidad de información sobre las condiciones mercantiles de la época:

> *Embarqué hacia las Indias Occidentales: 223 quintales de pescado, a 155,6 peniques por quintal; 37.000 pies de tableros a 8 1/3 $ por cada 1.000; 12.000 tejas planas a 1/2 guinea por cada 1.000; 19.000 argollas a 1 1/2 $ por cada 1.000; y 53 medias joes [moneda portuguesa]. A cambio, recibí 3.000 galones de ron a 1 chelín 3 peniques*

por galón; 2.700 galones de melaza, a 5 1/2 $ peniques por galón; 1.500 libras de café a 8 1/2 peniques por libra; y 19 hundrewight de azúcar a 12 chelines 3 peniques por hundreweight. Mis gastos por el viaje fueron £37 y 12 chelines. ¿Gané o perdí, y cuánto, con el viaje? (Pike 1788, 133).

Un problema posterior, aparecido en un número de 1814 de *The Analyst*, muestra el coste humano del sistema de plantaciones de las Indias Occidentales:

Si de un cargamento de 600 esclavos 200 mueren durante el pasaje de seis semanas desde África hasta las Indias Occidentales, ¿cuál hubo de ser la duración del pasaje si perece la mitad del cargamento? Se supone que el grado de mortalidad será el mismo durante todo el pasaje, es decir, que el número de muertes en un momento dado será proporcional al de vivos en ese mismo momento dado. (Douglas 1814, 21).

Cuando en 1776 las 13 colonias americanas de Inglaterra se independizaron para convertirse en los Estados Unidos de Norteamérica, cada colonia era una entidad cívica y política en sí misma. Una independencia que se reflejaba en el sistema monetario que utilizaban, distinto en cada una de ellas. Como nación comercial, los problemas de cambio monetario, tanto extranjero como doméstico, se convirtieron en una de las principales preocupaciones de la joven república. La cuestión resulta evidente en los problemas descriptivos de la época.

Un rastro diferente nos lo proporcionan los problemas con un objetivo político o social. Los problemas pueden revelar divisiones sociales: los grupos preferidos pueden ser mencionados o descritos con buenos ojos, del mismo modo en que se puede reconocer cuáles son los grupos indeseables. Una de las más curiosas de ese tipo de designaciones es el «problema de Josefo», que recibe su nombre del historiador judío del siglo i Flavio Josefo, a quien el ejército romano atrapa en una cueva junto con 40 colegas. Al ver inminente su muerte, el grupo decide suicidarse. Josefo se coloca a sí mismo y a sus compañeros en un círculo a partir de un punto del cual un hombre de cada tres será asesinado hasta que todos terminen muertos. Josefo elige su posición de tal modo que sea él el último hombre que quede en pie y de ese modo sobrevive. Una versión popular de este problema nos ha llegado desde el siglo x y está protagonizada por turcos y cristianos:

> *Un barco que se está hundiendo debe deshacerse de varios de sus pasajeros para poder sobrevivir. A bordo hay 15 cristianos y 15 turcos. El capitán, un cristiano, dispone a los pasajeros en un círculo en el que una de cada nueve personas será arrojada por la borda. ¿Cómo debe distribuirlos para que sean los cristianos quienes sobrevivan? (Smith 1958, 541).*

Una variante japonesa del siglo XVIII presenta a una madrastra disponiendo a sus hijos, tanto propios como de su esposo, en un círculo de entre los que se elegirán los que han de ser desheredados. Desea que sean sus propios hijos quienes se beneficien del proceso, pero se equivoca en sus cálculos y todos ellos resultan desheredados. ¡Un problema con moraleja!

Otro problema que se presta a situaciones de discriminación es el de «las cien aves de corral». Originado en China en torno al siglo v, en un principio el problema implicaba a gallinas, patos y gorriones, de ahí su título. Su solución resulta ser una ecuación lineal indeterminada para la cual se necesita un valor práctico. Una versión islámica del siglo XII coloca a cristianos y judíos en desventaja:

> *Un baño turco tiene 30 visitantes al día. La entrada para los judíos cuesta 3 dírhams, para los cristianos 2 dírhams y para los musulmanes 1/2 dírham. Los baños ganan 30 dírhams. ¿Cuántos cristianos, judíos y musulmanes los utilizaron? (Rebstock 2007, 11).*

Un problema italiano celebra la expulsión de los franceses de los territorios italianos en 1554 diciendo:

> *El rey de Francia entró en combate y fue derrotado de tal modo que 1/4 de sus soldados resultaron muertos, 2/3 heridos, 1.000 fueron hechos prisioneros y quedaron 6.000*

sobre el campo de batalla. Quiero saber cuántos soldados tenía antes de ser derrotado. (Swetz 1994).

En colecciones modernas de problemas descriptivos podemos encontrarnos con una propaganda todavía más descarada. A comienzos del siglo XX, Estados Unidos intentaba inculcar los principios democráticos en Filipinas y borrar las tradiciones coloniales españolas. Se crearon materiales especiales para ayudar a presentar estos nuevos ideales a la población sometida. Los problemas aritméticos se centraban en los males de la situación existente entre propietarios y arrendatarios de terrenos:

Pedro es arrendatario de la granja del señor Santos. Tiene alquiladas 4 hectáreas de arrozales. Después de que se haya pagado la cosecha, por el uso de la tierra el señor Santos debe recibir la mitad del arroz que quede y Pedro se quedará con la otra mitad. Si en cada hectárea crecen 45 cavanes y por la cosecha se paga 1/6, ¿cuántos cavanes recibirán los agricultores?, ¿cuánto quedará?, ¿cuál será la parte del señor Santos?, ¿cuál será la parte de Pedro? (Bonsall 1905, 113).

La serie de estos problemas llega a mencionar que Pedro está en deuda con el señor Santos tanto por las semillas de arroz como por los productos que ha comprado en su tienda. Tras una serie de cálculos, el estudiante-lector se encuentra con que Pedro está todavía más endeudado que antes.

La explotación de los terratenientes es también un tema frecuente en los libros de texto de la China comunista:

> *En la antigua sociedad, una familia que se moría de hambre tuvo que pedir prestados 5 dou [200 libras] de maíz al terrateniente. La familia le pagó 3 años después. El codicioso terrateniente exigía el 50% de interés compuesto anual. ¿Cuánto maíz exigió el terrateniente al final del tercer año? (The New York Times 1969).*

En los libros de texto nazis utilizados en la Alemania de 1941 se consideraba el coste en reichsmarks (rm) de los «indeseables»:

> *Diariamente, el Estado gasta 6 rm en un tullido; 4 1/2 rm en un enfermo mental; 5 1/2 rm en una persona sordomuda; 53/5 rm en una persona retrasada mental; 3 1/2 rm en un alcohólico; 44/5 rm en un pupilo en una casa; 21/10 rm en un pupilo en un colegio especial; y 9/20 rm en un pupilo en un colegio normal.*

Seguían entonces una serie de problemas que enfatizaban el coste que los «inferiores» suponían para el Estado, como el siguiente:

> *Calcula el gasto del Estado en un pupilo en un colegio especial y en un pupilo en un colegio normal a lo largo de ocho años y expón el sobrecoste generado por el pupilo del colegio especial. (Pine 1997, 27).*

Las implicaciones pedagógicas

Los problemas descriptivos se escriben para enseñar matemáticas. Durante miles de años fueron el principal medio utilizado en este tipo de instrucción. Compilarlos requería invertir tiempo y esfuerzo. El proceso de concebir problemas implicaba seleccionar los principios matemáticos que iban a ser comunicados y presentarlos en situaciones que proporcionaran una motivación —social, intelectual o ambas— capaz de animar al lector a querer resolverlos. De hecho, muchas de las primeras colecciones de problemas venían con un prefacio con comentarios motivadores. Por ejemplo, el autor del *Papiro matemático Rhind* promete al lector que el texto proporciona «sabiduría sobre todo lo que existe» y «conocimiento de poderosos secretos» (Chace 1979, 27). En la introducción a su clásico de la aritmética, *Manual de matemáticas del maestro Sun* (c. 400), Sun Zi asegura a sus lectores que «las matemáticas gobiernan a lo ancho y a lo largo de los cielos y la tierra; y afectan a todas las criaturas» (Lam y Ang 1992, 151). Semejantes admoniciones sobre el poder y la utilidad de las matemáticas continuaron con Robert Recorde y sus esfuerzos en el siglo XVI por popularizar las matemáticas en Inglaterra, convirtiéndose en un rasgo habitual de los libros de matemáticas norteamericanos.

Esta motivación se incluye además en la secuencia del problema, que pasa de ser una simple aseveración donde se presenta un desafío: «Encuéntrame un número...», a contar con diálogos que hacen hincapié en la relevancia social y económica, para terminar contando historias con situaciones que utilizan el «interés humano» para acercar todavía más al lector al drama:

> *El burgomaestre y el concejo de la ciudad de Oppenheym contrataron para la ciudad a un erudito maestro de primeras letras, diciéndole que si les servía fielmente durante un año le darían 100 guilder, un caballo y varios ropajes. El maestro de escuela solo había enseñado durante tres meses cuando se vio obligado a abandonar el concejo y, por sus servicios de tres meses, le dieron el caballo y las ropas y le dijeron: «Toma el caballo y las ropas y sigue tu camino». El maestro de letras los recibió gustoso y continuó feliz su camino. La pregunta es: ¿cuál es el valor del caballo y de las ropas, dado que sirvieron como salario de tres meses? (Köbel 1514, fol. 78r).*

Los problemas hindúes estaban escritos en verso y describían situaciones fantásticas que apelaban a la imaginación y al sentido de la estética del lector, ayudándole a memorizar los problemas.

En muchas colecciones de problemas es evidente un orden pedagógico, pues avanzan desde los más sencillos hasta los más complejos; desde simples soluciones de procedimiento hasta las que requerían varias técnicas de cálculo; desde los problemas concretos hasta los abstractos. De este modo el lector consigue suficiente confianza como para afrontar los niveles superiores. Un antiguo ejemplo visual de este principio lo vemos en la tabilla cuneiforme del Museo Británico BM 15285, del período Babilónico Antiguo, que presenta una serie de configuraciones geométricas. Según los estudiantes de escriba progresaban por la serie se encontraban con situaciones geométricas más complejas de resolver (fig. 1.3). El *Jiuzhang* chino presenta una clara intención pedagógica tanto en sus capítulos como en la secuencia de sus problemas.

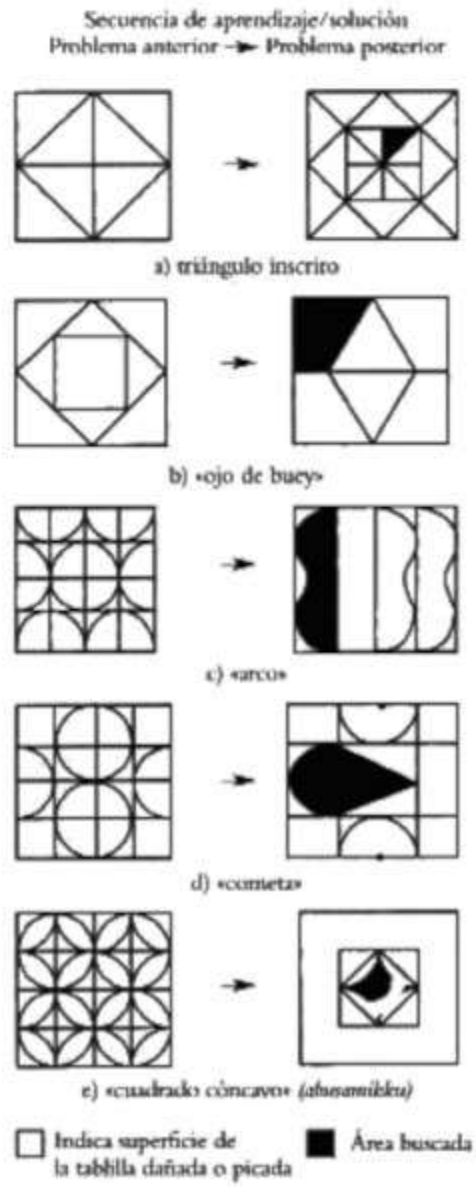


Figura 1.3. Algunos de los ejercicios de la tablilla cuneiforme del Museo Británico 15285. Se cree que originalmente la tablilla contenía unos 40 de ellos, que exigían a los estudiantes de arriba, hallar las áreas de las áreas seleccionadas dentro de los cuadrados

Hasta el siglo XIX, los problemas descriptivos se elegían cuidadosamente atendiendo a su impacto y se utilizaban como suplemento a la instrucción. Eran una parte principal de la enseñanza. Sin embargo, según fue cambiando el diseño de los libros de texto de matemáticas, que cada vez fueron dedicando mayor espacio a los aspectos más teóricos, fue disminuyendo la confianza en el poder educativo de los problemas descriptivos, por lo que estos dejaron de ejemplarizar la importancia y el poder de las matemáticas. Fue así como a menudo quedaron reducidos a la categoría de «entretenimiento» o utilizados como castigo. ¡Una situación que hay que corregir!

Conclusión

Las huellas matemáticas que hemos seguido desde finales de la Edad del Bronce hasta la actualidad nos han permitido trazar un largo rastro. Al principio este era bastante estrecho, pero no tardó en ensancharse, en estar bien transitado y en comenzar a bifurcarse en diferentes direcciones. Cada camino lateral —problemas descriptivos que dejan ver condiciones económicas, que nos hablan del comercio, que reflejan acontecimientos contemporáneos, avances científicos, movimientos sociales y guerras— merece ser explorado. Los problemas descriptivos no solo siguen siendo una valiosa herramienta para la enseñanza de las matemáticas, sino que estudiar la historia que hay tras ellos puede ayudar a comprender el desarrollo de las ideas matemáticas, sus prioridades y sus relaciones con el mundo real.

Capítulo 2

Problemas, problemas. Un recurso para la enseñanza

El griego Arquímedes (287-212 a. C.) está considerado uno de los mejores matemáticos prácticos de todos los tiempos. Ávido solucionador de problemas, fue contratado por el rey Herón de Siracusa. Durante el asedio a esta ciudad por parte de los romanos, diseñó una máquina de guerra que los mantuvo a raya durante tres años. Cuenta la leyenda que, cuando finalmente los romanos rompieron las defensas de la ciudad en el 212 a. C., Arquímedes, profundamente inmerso en la resolución de un problema, desoyó las órdenes de un soldado romano y fue asesinado por este.

Este grabado del artista del siglo XIX, Gustave Courtois muestra a Arquímedes concentrado en su último problema.

Dado que la cosa va de problemas, comencemos con uno:

> *Un terreno circular de 100 unidades de diámetro ha de ser dividido entre 3 personas, de tal modo que reciban 2.900, 2.500 y 2.500 unidades cuadradas respectivamente. Encuentra la longitud de las cuerdas correspondientes y las alturas de los segmentos. (Cooke 1997, 2480).*

La situación parece clara y razonable: la división de un terreno en tres partes. Un diagrama sería deseable; pero, aun así, el problema requiere pensar un poco. Es un buen problema para analizar. Si se lo diéramos a una clase de secundaria, seguramente generaría tres preguntas: «¿Cuál es la respuesta?», «¿cómo se hace?» y «¿de dónde viene el problema?». En muchas ocasiones es la respuesta a la tercera pregunta la que genera más debate y una nueva cuestión: «¿Cómo lo hacían?». Este problema sobre un terreno circular fue propuesto por el matemático japonés Yoshida Koyu en 1627 y es un ejemplo típico de las cuestiones que interesaban a los matemáticos asiáticos en esa época: las áreas de segmentos circulares. El problema es de otro tiempo y de otro lugar. Su lejanía respecto a un aula contemporánea, tanto temporal como cultural, le añade mística e intriga y proporciona otra fértil dimensión de aprendizaje: los matemáticos japoneses del siglo XVII estaban haciendo algunas matemáticas interesantes.

Los profesores de matemáticas siempre están buscando «buenos» problemas para sus clases. En la historia de las matemáticas abundan. Desde las épocas más remotas, ya estén escritos sobre arcilla, sobre rollos de papiro o sobre tiras de bambú, los problemas descriptivos han servido como fuente primaria para comunicar los usos y técnicas de las matemáticas. Y, como tales, siguen siendo una fuente fácilmente accesible para enriquecer las clases.

Razones para el uso de problemas históricos

El sentimiento generalizado entre la comunidad de educadores de matemáticas es que incluir historia de las matemáticas en la enseñanza de la materia sirve para enriquecer mucho la experiencia. La Historia proporciona a menudo respuestas a los porqués y los cómos que tan a menudo se dejan fuera de la enseñanza regular en las aulas. Responde a la eterna pregunta de los estudiantes: «¿Para qué estamos estudiando esto?». La Historia también ilustra la continuidad de las matemáticas, porque hace miles de años la gente estaba intentado resolver problemas similares a los que resolvemos en la actualidad. ¡Estaban haciendo matemáticas! Una revelación que a menudo resulta sorprendente para los estudiantes, pero que también resulta tranquilizadora, en el sentido de que se dan cuenta de que forman parte de un proceso que aún hoy continúa.

Pero ¿cómo se puede introducir de forma sencilla la Historia en la enseñanza de las matemáticas? Los problemas históricos proporcionan un modo de satisfacer esta necesidad. Son numerosos y están disponibles. En ellos no solo encontramos tratadas la mayoría de las cuestiones matemáticas, sino que sus propias características los hacen atractivos para utilizarlos en clase:

- Si bien los profesores se resisten a las intrusiones históricas más directas y amplias, aceptan y usan los problemas de buen grado, pues no resultan amenazadores y no son un añadido a los currícula de matemáticas.
- El contexto matemático de los problemas es relevante para las necesidades de la enseñanza.
- Las escenas, el entorno histórico y las situaciones descritas en los problemas proporcionan intriga y añaden motivación para los estudiantes.
- Los problemas históricos favorecen una apreciación de la diversidad, tanto matemática como cultural, y proporcionan una base flexible para estudios interdisciplinares que conecten las matemáticas con la historia, la cultura y la economía.

Estos son varios problemas que pueden satisfacer tales objetivos:

> *Conociendo el perímetro y la perpendicular de un triángulo rectángulo, se pide hallar el triángulo. (Isaac Newton, 1728).*
>
> *Una sanguijuela invita a una babosa a comer a una distancia de una leuca, pero solo puede arrastrarse una pulgada al día. ¿Cuánto tardará en alcanzar su comida? [1*

leuca = 1.500 pasos; 1 paso = 5 pies; 1 pie = 12 pulgadas; 1 pulgada = 2,54 cm]. (Alcuino de York, 800).

Encuentra dos números que sumen 20 y que cuando son elevados al cuadrado su suma sea 208. (Diofanto, c. 250 d. C.).

Una ciudad cuadrada y amurallada de dimensiones desconocidas tiene cuatro puertas, una en el centro de cada lado. Un árbol se alza a 20 bu de la puerta norte. Uno tiene que andar 14 bu hacia el sur desde la puerta meridional y luego girar hacia el oeste 1.775 bu antes de poder ver el árbol. ¿Cuáles son las dimensiones de la ciudad? (China, 200 d. C.).

Estrategias de incorporación

Aunque los profesores acepten las colecciones de problemas históricos para utilizarlos en clase, quizá requieran algunas sugerencias al respecto de cómo estos pueden emplearse de forma eficaz. Evidentemente, igual que existen modos diversos de enseñar matemáticas atendiendo a las necesidades y capacidad de la clase, también hay modos diversos de utilizar los problemas históricos en las mismas. Plantear una situación o problema histórico puede introducir un concepto matemático: trepar por un muro utilizando una escala lleva a la conceptualización de la relación base-altura-hipotenusa de un triángulo rectángulo, es decir, al teorema de Pitágoras. De hecho, las relaciones de los triángulos rectángulos llevan milenios formando parte de la enseñanza de las matemáticas, mucho antes de Pitágoras. Así se puede ver en los siguientes ejemplos:

> *Una caña está apoyada contra un muro. Si se mueve hacia abajo 9 pies [su extremo superior], el extremo [inferior] se desplaza 27 pies. ¿Cuánto mide de largo la caña? ¿Qué altura tiene el muro? (Babilonia, 1800-1600 a. C.).*
>
> *Una vara erguida [vertical] de 30 pies ha visto cómo se desplazaba su base 18 pies. Determina la nueva altura y la distancia que ha descendido el extremo superior de la vara. (Egipto, 300 a. C.).*
>
> *Un brote de bambú de 10 pies de alto está roto cerca de su extremo superior. El brote y su parte rota forman un triángulo. El extremo superior toca el suelo a 3 pies del tallo. ¿Cuál es la longitud del tallo que queda erguido? (China, 100 a. C.).*
>
> *Una lanza de 20 pies de largo descansa contra una torre. Su extremo es desplazado hacia afuera 12 pies. ¿A qué altura de la torre queda la lanza? (Italia, 1300 d. C.).*

Si bien la información que proporcionan los problemas es similar, los resultados matemáticos requeridos son distintos. Si en cada problema *x* representa la incógnita que se busca, las situaciones son bastante diferentes, como se muestra en la figura 2.1.

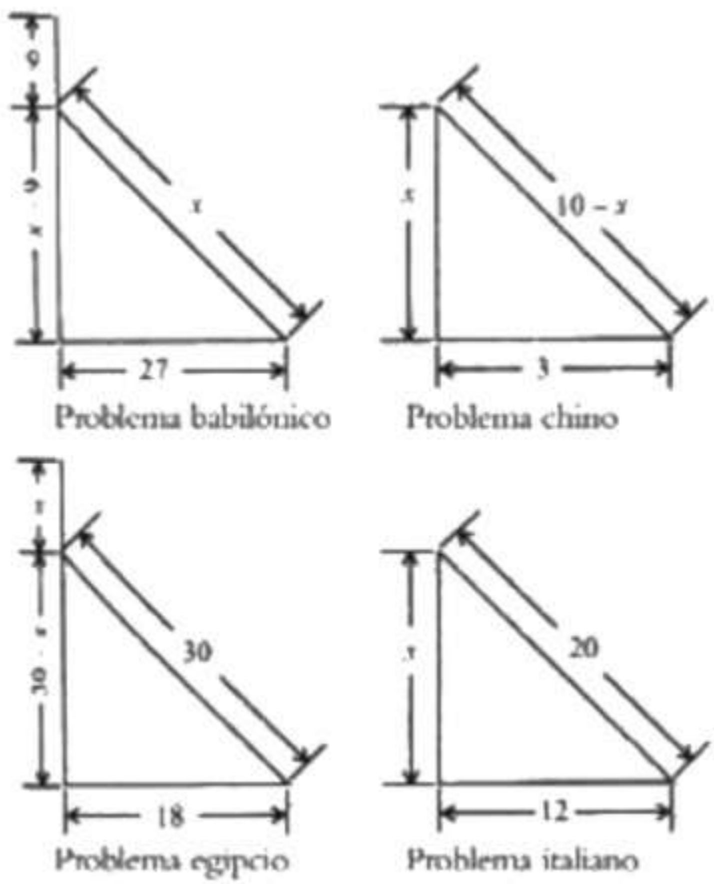


Figura 2.1. Varios problemas con triángulos rectángulos

El conocimiento histórico puede ser utilizado a modo de refuerzo de un concepto ya estudiado. Así, los problemas medievales italianos de «regla de tres» pueden servir de práctica en las relaciones proporcionales. Quizá la estrategia más sencilla consista en incluir en la clase de forma ocasional problemas históricos, mencionando la fecha y el origen de los mismos. Semejantes inclusiones se convierten en un recuerdo implícito de que las matemáticas poseen una herencia y sirven como fuente de satisfacción personal para los estudiantes cuando se dan cuenta de que forman parte de un proceso que continúa: el uso de las matemáticas para solucionar problemas.

Algunos problemas históricos llevan fácilmente a escenarios del tipo «¿qué pasaría si...?». Por ejemplo, hace varios años un lector envió a la redacción de *Mathematics Teacher* la solución dada por uno de sus alumnos al siguiente problema chino (100 a. C.):

> *Dado un triángulo rectángulo con catetos de longitudes a y b e hipotenusa de longitud c, ¿cuál es la longitud, s, del lado del mayor de los cuadrados inscritos utilizando el ángulo recto como uno de sus vértices? (Wikenfield 1985).*

El cuadrado requerido tiene de lado $s = ab/(a + b)$, el producto de los catetos dividido por la suma de los catetos (fig. 2.2).

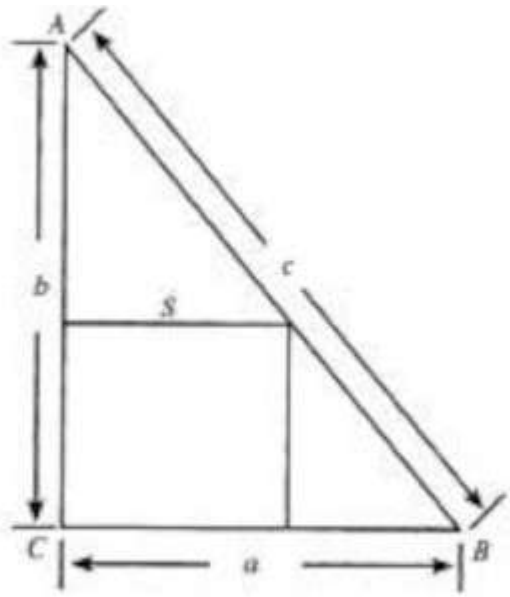


Figura 2.2. La solución de un alumno a un problema chino del año 100 a.C. publicada en Mathematics Teacher

Subsiguientes cartas al director admiraron el problema y de inmediato surgió un escenario del tipo «¿qué pasaría si...?»: «¿Cuál es el lado del cuadrado más grande dibujado a lo largo de la hipotenusa?» (Lieske 1985). Otro lector señaló que la solución era la mitad de la media armónica entre el cateto *a* y el *b*. En otra respuesta subrayé una serie de ingeniosos problemas con triángulos rectángulos a partir de los cuales se originó este y planteé el siguiente, procedente del *Jiuzhang suanshu* (China, 100 a. C.):

> *Encuentra el radio r, del círculo inscrito más grande en este mismo triángulo. (Swetz y Kao 1977).*

En la figura 2.3a la longitud de la hipotenusa AB está representada por *c*, la longitud de BC por *a* y la longitud del cateto CA por *b*.

Entonces,

$$2(\text{área } \triangle ABC) = ab = 4(\text{área } \triangle BEO) + 2(\text{área } \square DOEC)$$

Estos elementos pueden distribuirse y serán iguales en área a:

$$\text{área } \square AHEC + \text{área } \square DGBC + \text{área área } \square AHOD + \text{área } \square GBEO$$

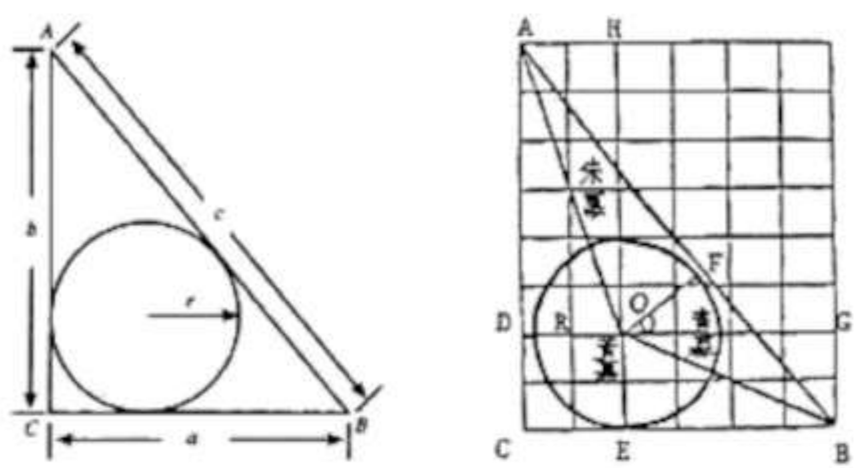
Entonces,

$$ab = br + ar + cr$$

y

$$r = ab/(a + b + c).$$

La figura 2.3b es una ilustración china que muestra el enfoque geométrico utilizado para resolver el problema.



(a) (b)

Figura 2.3 Problema complementario al considerado en la figura 2.2.a) el problema en términos modernos; b) su solución es una ilustración de un comentario chino al Jiuzhang suanshu, capítulo 9

Los chinos parecen haber estado fascinados por las relaciones de los triángulos rectángulos e imaginaron cientos de problemas protagonizados por ellos. Por ejemplo, en su *Espejo marino de las medidas del círculo*, de 1248, Li Zhi presenta 170 de estos problemas, cuyas soluciones dan como resultado ecuaciones de grado superior. Uno de ellos es el siguiente:

> *Hay un árbol situado a 135 bu de la puerta sur de una ciudad circular. El árbol puede verse si uno camina 15 bu desde la puerta norte y luego 200 bu hacia el este. Encuentra el diámetro de la ciudad amurallada.*

Si hacemos que x sea el desconocido radio de la ciudad, entonces tenemos que

$$x^4 + 150x^3 + 5.625x^2 - 2.920.320x - 788.486.400 = 0.$$

Se obtiene una raíz cuadrada positiva. Cualquier clase se preguntará: «¿Cómo lo hicieron los chinos?». Si comparamos este problema con otro anterior, en el que aparece una ciudad cuadrada, podemos ver que hay una prolongación del tipo «¿qué pasaría si...?». Los matemáticos chinos siguieron utilizando problemas con triángulos rectángulos hasta bien entrado el siglo XIX.

Como ya vimos en el capítulo 1, con frecuencia los problemas históricos contienen datos que arrojan luz sobre el clima social y económico de su época. Datos que le hablan al lector de las condiciones de la vida cotidiana del período. Consideremos el siguiente problema de persecución:

> *Un esclavo huye de Milán a Nápoles y recorre 1/10 de la distancia cada día. Al inicio del tercer día, su amo envía a otro esclavo tras él y este recorre 1/7 de la distancia total cada día. Desconozco cuál es la distancia entre Milán y Nápoles, pero deseo saber cuándo lo capturan. (Cardano 1539).*

Gracias a él sabemos que en la Europa del siglo XVI existía la esclavitud. Los estudiantes pueden incluso profundizar en cuestiones como: «¿Quiénes eran esos esclavos?» y «¿qué papel desempeñaban los esclavos en esta sociedad?».

De vez en cuando, los problemas pueden hacer que los estudiantes se enfrenten a unidades de medida desconocidas y antiguas:

> *Si 8 braccia de tela tienen un valor de 11 florines, ¿qué valor tendrán 97 braccia? (Italia, siglo XIII).*

> *Tengo dos campos de grano. Del primero obtengo una cosecha de 2/3 de cesta de grano por unidad de área. La cosecha del segundo supera a la del primero en 500 cestas.*

El área total de los dos campos juntos es de 30 sar. ¿Cuál es el área de cada campo? (Babilonia, 2000 a. C.).

«¿Qué es una *braccia*?», «¿Qué es un *sar*?», «¿Cómo se convierten esas unidades a unidades modernas?», «¿Forman parte de un estándar matemático comprensible?». Se trata de preguntas interesantes, que hacen pensar y pueden surgir de este tipo de problemas, con sus desconocidas expresiones. No obstante, si estos términos desconocidos distraen de las consideraciones matemáticas del problema, pueden ser reemplazados por otros más familiares; por ejemplo, en los problemas que acabamos de considerar, *braccia* puede ser cambiado por «metros» y *sar* por «varas cuadradas».

Del siguiente problema emerge la realidad económica de la vida en Estados Unidos en el siglo XIX:

Un maestro accede a enseñar 9 meses por 562,50 $ más el alojamiento. Al final de este período, debido a una ausencia de dos meses causada por una enfermedad, recibe solo 409,50 $. ¿Cuánto costaba su alojamiento mensualmente? (Milne 1892).

Preguntas que pueden surgir después de trabajar con un problema semejante son: «¿Cuál era el salario de un maestro en esa época?» y «¿Cómo era en comparación a otros salarios?». Esta última cuestión puede generar más investigación.

Consideremos por ejemplo esta otra situación, la del pago de los intereses de un préstamo:

Si el interés de 100 por un mes es de 5, di cuál es el interés de 16 en un año. (Bhaskara II, 1150).

En este caso, la tasa de interés es del 60%. Para financiar sus guerras, algunos reyes de la Edad Media aceptaban préstamos a una tasa del 300% ¡e incluso más!

El coste humano de la guerra queda reflejado en otros problemas:

El rey de Francia entró en combate y fue derrotado de tal modo que 1/4 de sus soldados resultaron muertos, 2/3 heridos, 1.000 fueron hechos prisioneros y quedaron 6.000 sobre el campo de batalla. Quiero saber cuántos soldados tenía antes de ser derrotado. (Italia, 1600).

Tras una terrible batalla se comprueba que el 70% de los soldados ha perdido un ojo, el 75% una oreja, el 80% un brazo y el 85% una pierna. ¿Qué porcentaje de los combatientes debe haber perdido las cuatro cosas? (Lewis Carroll, c. 1880).

El segundo problema expresa mejor los sentimientos pacifistas de su victoriano autor —el matemático Charles Lutwidge Dodgson (quien con el seudónimo de Lewis Carroll también escribió *Alicia en el país de las maravillas*)— que las realidades de la guerra.

Por supuesto, algunos problemas pueden disfrutarse simplemente por su exótica fantasía:

Un zorro, un mapache y un sabueso pasan por la aduana y juntos pagan 111 monedas. El sabueso le dice al mapache, y el mapache le dice al zorro: «Como tu piel vale el doble que la mía, entonces ¡la tasa que debes pagar es también el doble!». ¿Cuánto tiene que pagar cada uno? (China, 200 a. C.).

La raíz cuadrada de la mitad del número de abejas de un panal ha volado hacia un arbusto de jazmín; 8/9 del enjambre se ha quedado detrás. Una obrera vuela hacia un zángano que zumba dentro de una flor de loto por la que se sintió atraído durante la noche gracias a su dulce olor, pero en la cual ahora se encuentra atrapado. Dime, la más encantadora de las mujeres, el número de abejas. (India, 1150).

Otros, en cambio, son planteados como meras adivinanzas para poner a prueba la agudeza matemática del lector:

Un hombre, su mujer y sus dos hijos desean cruzar el río. Tienen una barca que solo puede transportar 100 libras. El hombre pesa 100 libras, la mujer 100 libras y cada uno de los hijos 50 libras. ¿Cómo pueden cruzar todos el río utilizando la barca? (Estados Unidos, 1905).

Los orígenes europeos de este problema pueden remontarse hasta Alcuino de York, en el año 800. Como ya vimos en el capítulo 1, variantes de este problema del «cruce del río» han existido en muchas culturas, con los ocupantes de la barca reemplazados por personajes enfrentados entre sí, como animales y sus presas, caníbales y misioneros o protectores hermanos que transportan a sus hermanas vírgenes (fig. 2.4; *véase* Ascher 1991 para un comentario más amplio).

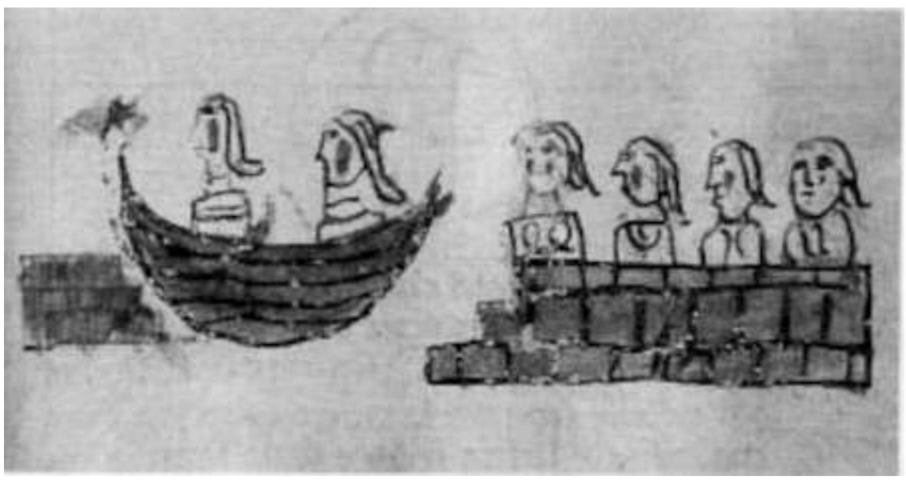


Figura 2.4. Dibujo de un códice italiano del siglo XIV; "Antichissima de algorismo" que ilustra el problema del "transporte de las vírgenes".

Una actividad posible para los estudiantes es seguir los cambios históricos de un problema concreto a lo largo de las diferentes culturas y siglos. Uno de ellos podría ser el de las «cien aves de corral», que a continuación mostramos en su versión de la Europa medieval (año 775) y luego en una variación turca del siglo XII:

Un total de 100 fanegas se distribuyen entre 100 personas, de tal modo que cada hombre recibe 3 fanegas, cada mujer 2 fanegas y cada niño 1/2 fanega. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay?

Se sabe que unos baños públicos reciben 30 visitantes en un día, que usan las instalaciones y en total pagan 30 monedas. Si un musulmán paga 1/2 moneda por baño, un cristiano 2 monedas y un judío 3 monedas, ¿cuántos musulmanes, cristianos y judíos utilizaron el baño ese día?

Otro es el problema del «árbol roto», que ha aparecido en muchos libros de texto a lo largo de los siglos:

Un árbol de 100 pies de altura resulta roto por una tormenta y la copa del mismo toca el suelo a 40 pies de la raíz del árbol. ¿Cuál es la longitud de la porción rota? (Estados Unidos, 1905).

¿Cuál es el linaje de este tipo de problemas y por qué su temática y contenido matemático resultan tan populares? En torno a estas cuestiones se pueden estructurar estudios históricos muy entretenidos. A menudo, el contenido de un problema destaca elementos que resultaban importantes en un momento y lugar concretos, ya se trate de la actividad mercantil de los venecianos (como en el primer ejemplo que sigue) o las frustraciones de un agrimensor británico (como en el segundo):

> *Un hombre tiene cuatro acreedores. Al primero le debe 624 ducados, al segundo 546, al tercero 492 y al cuarto 368. Resulta que el hombre se convierte en moroso y escapa, encontrando los acreedores que sus bienes suma un total de 830 ducados. ¿En qué porcentaje deben dividirlos y cuál será la parte de cada uno? (Tartaglia, 1556).*
>
> *Se me contrató para que midiera un campo, que se me dijo era un cuadrado geométricamente perfecto, pero por causa de un río que lo atravesaba solo pude realizar mediciones parciales. Medí 9 yardas desde la esquina oeste a lo largo del lado sur. Seguidamente, apuntando a la esquina noreste, medí 18 yardas a lo largo de esta línea antes de girar y medir hacia la esquina sureste, que encontré a un ángulo de 28º 30' con respecto al camino que seguí en la medición previa. A partir de estas medidas, determina el área del campo. (London, 1797).*

Examinar el contenido de este tipo de problemas nos revela la temprana dependencia de las matemáticas con respecto a sus aplicaciones en el mundo real. Los problemas más antiguos que se conservan se centran en necesidades humanas muy básicas: distribución de comida, pago de trabajos, mediciones de terrenos y pago de impuestos. Más adelante, según se fueron desarrollando los movimientos sociales y tenían lugar innovaciones tecnológicas y científicas, estos movimientos y estas innovaciones también se convirtieron en tema de los problemas matemáticos.

Si dejamos a un lado los problemas publicados como medio para facilitar la formación de las personas, hay otros que fueron concebidos y presentados como desafíos directos a la capacidad e ingenio matemático de los lectores. En ocasiones los autores dirigían estos desafíos a colegas concretos. No cabe duda de que los estudiantes modernos obtendrán un grado de satisfacción añadido cuando resuelvan problemas que en su momento desconcertaron a destacados matemáticos de su época. Aquí tenemos algunos de ellos:

> *De Christiaan Huygens a Gottfried Leibniz, 1672:*
> *¿Cuál es la suma de los recíprocos de los números triangulares?*

> *De Pierre de Fermat a John Wallis, en torno a 1657:*
> *Dibuja un rectángulo ABCD con lados b y* $a = 1/\sqrt{2}$ *y traza un semicírculo en uno de los lados AB = b. Ahora escoge cualquier punto E del semicírculo. Une E con las esquinas C y D del rectángulo. Llama U y V respectivamente a los puntos de intersección de ED y EC con AB. Demuestra que* $(AV)^2 + (BU)^2 = b^2$.

De las páginas del periódico londinense *The Ladies Diary* a sus lectores, en 1755:

> *Dos círculos con un radio de 25 pies se intersecan de tal modo que la distancia entre sus centros es de 30 pies. ¿Cuál es la longitud de un lado del cuadrado inscribible dentro del espacio definido por los arcos que se intersecan?*

En semejantes circunstancias, la discusión subsiguiente debería centrarse en la cuestión de las herramientas y procedimientos matemáticos que hoy poseemos para ayudarnos a conseguir las soluciones buscadas, los cuales eran desconocidos por nuestros antepasados. Uno los problemas desafío de la Edad Media que más éxito ha conocido es el ejercicio del *pons asinorum* o «puente de los asnos». La cuestión es proporcionar una demostración del teorema de que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales. La demostración de la época se presenta en la figura 2.5, reproducida de la edición de Isaac Barrow de 1665 de los *Elementos* de Euclides. Está escrita en latín, la lengua de los eruditos matemáticos de entonces; no obstante, un estudiante con algunos conocimientos de geometría debería ser capaz de descifrarla y seguirla... lo cual es un problema de comprensión matemática en sí mismo.


PROP. V.

Isoscelium triangulorum ABC qui ad basim sunt anguli ABC, ACB inter se sunt aequales. Et productis aequalibus rectis lineis AB, AC qui sub base sunt anguli CBD, BCE inter se aequales erunt.

a Accipe AF = AD, & junge CD, ac BF. — a 3. 1. b 1. post.

Quoniam in triangulis ACD, ABF, sunt AB c = AC, & AF d = AD, angulusq; A communis, e erit ang. ABF = ACD; & ang. AFB f = ADC, & bas. BF = DC; item FC = DB. ergò in triangulis BFC, BDC g erit ang. FCB = DBC. Q.E.D. Item ideo ang. FBC = DCB. atqui ang. ABF h = ACD. ergò ang. ABC k = ACB. Q.E.D. — c hyp. d constr. e 4. 1. f 3 ax. g 4. 1. h pr. k 3. ax.

Corollarium.

Hinc, Omne triangulum aequilaterum est quoq; aequiangulum.

Figura 2.5. El problema del pons asinorum tal cual aparece en la edición de Barrow de 1665 en los Elementos de Euclides

¿Por qué crees que la demostración se presentó con esta forma? Ofrece una demostración «mejor» de este teorema. En este caso, ¿qué significa «mejor»? ¿Por qué es conocido como «el puente de los asnos»? Se trata de algunas de las muchas preguntas que pueden surgir a partir del problema. El lector debería intentar aumentar esta lista.

Conclusión

El uso de problemas históricos es un modo excelente de enriquecer la enseñanza de las matemáticas. Este tipo de problemas proporciona un contexto de buena resolución de problemas y motiva a los estudiantes para que aprendan, primero porque los ayuda a darse cuenta de que las matemáticas han tenido un uso práctico durante milenios y, segundo, porque hace que se planteen cuestiones adicionales sobre el pasado.

Solo queda una cuestión: ¿dónde pueden conseguir los profesores tales problemas? Pues pueden hallarlos en antiguos libros de texto, de historia general y de historia de las matemáticas, así como en colecciones específicas en internet, como la de la página web de MathDL: *Loci* (sección «Convergence»), patrocinada por la Mathematical Association of America. La bibliografía al final de este libro puede proporcionar muchos problemas más.

Y, como empezamos con un problema, terminaremos con un problema, en este caso uno procedente de la Italia del siglo XV que se resolvía sin utilizar funciones trigonométricas:

> *Un círculo con un diámetro de 4 unidades está inscrito en un triángulo. Un punto de tangencia del círculo con el lado del triángulo divide ese lado en longitudes de 6 y 8 unidades. ¿Cuáles son las longitudes de los otros dos lados del triángulo?*

¿Cómo lo resolvieron?

Capítulo 3
La antigua Babilonia (2000-1000 a. C.)

Tablilla cuneiforme YBC 7289, una de las tablillas de arcilla matemáticas más significativas desde el punto de vista histórico que se haya encontrado nunca. Fechada en el período Babilónico Antiguo (c. 1800-1600 a. C.), fue adquirida por el millonario norteamericano J. P. Morgan, quien la donó a la Universidad de Yale en 1912.

Se cree que el cereal que hoy llamamos trigo apareció por primera vez hace 10.000 años en Oriente Medio. Este alimento fue cultivado en las fértiles llanuras inundables de los ríos Tigris y Éufrates. Aquí en Mesopotamia, la «tierra entre los ríos», es donde prosperó una sociedad agrícola que se convirtió en lo que hoy conocemos como la civilización babilónica. Los babilonios no tardaron en convertirse en mercaderes y comerciantes, extendiendo su influencia sobre una amplia región geográfica. Las necesidades de este imperio garantizaron el desarrollo de las ciencias. Los babilonios desarrollaron sistemas matemáticos y astronómicos muy precisos. Su sistema numeral se basaba en contar sesentenas; nuestra hora de 60 minutos y los 360º de un círculo provienen de la tradición babilónica. La astronomía babilónica, al servicio de una sociedad agrícola, era muy exacta. Como resultado de ello, otros pueblos siguieron los procedimientos astronómicos babilónicos, incluidos los cálculos en base 60.

Utilizando un sistema de escritura llamado cuneiforme, los antiguos escribas babilonios plasmaban sus resultados en tablillas de arcilla. La que vemos en la fotografía de la página anterior contiene un ejercicio escolar en el cual se le pide al estudiante que encuentre la longitud de la diagonal de un cuadrado. Se han descubierto miles de estas tablillas procedentes de la antigua Babilonia, la mayor parte de ellas en los yacimientos de Nippur y Susa. La Universidad de Pennsylvania, la Universidad de Yale, la Universidad de Columbia y el Museo del Louvre de París conservan importantes colecciones de estas tablillas. Se calcula que unas cuatrocientas tienen que ver con las matemáticas, pero pocas han sido traducidas. Una investigadora moderna, Eleanor Robson, de la Universidad de Oxford, asumió el desafío de explorarlas y aprender más sobre las matemáticas de la antigua Babilonia. Su obra más reciente sobre la cuestión es Mathematics in ancient Iraq (2008).

Para facilitar los cálculos, los números de los problemas que siguen, originalmente en forma sexagesimal (base 60), se han pasado a base 10. Para conservar el interés histórico se han mantenido algunas unidades de medida babilónicas, en general de tal forma que sean comprensibles en sí mismas. Se ha de recordar que los babilonios tenían un sistema de medidas amplio y complejo. Como elemento añadido de interés histórico y matemático, en algunos problemas se mantiene la terminología algebraica y geométrica babilónica, como en aquellos donde una incógnita se percibe como la longitud de una línea, el producto de dos incógnitas, el área de un rectángulo o, cuando resulta adecuado, un cuadrado. Los estudiantes contemporáneos que se pongan a resolver estos problemas seguramente tengan que traducir la terminología babilónica a una forma algebraica actual y proceder de acuerdo a ella.

Para los lectores acostumbrados a realizar sus cálculos en notación de base 10, el concepto de aritmética sexagesimal puede parecer muy extraño; pero, matemáticamente hablando, el 60 es un número bonito. Tiene muchos divisores y es útil para la tarea de dividir bienes. Algunos expertos en Babilonia creen que la computación sexagesimal fue utilizada por primera vez para pesar y medir el grano, antes de terminar siendo adoptada para las prácticas matemáticas en general. Examinemos brevemente cómo funciona el sistema. En los números sexagesimales, cada lugar con valor puede ser ocupado hasta por dos dígitos que representan valores menores que 60. La convención popular para escribir numerales sexagesimales babilónicos traducidos es utilizar comas para indicar los lugares sexagesimales. Por ejemplo, consideremos la traducción de un número escrito como:

7, 23, 41 (base 60).

En base 10 lo interpretaríamos como 41 × 600 (unidades) 23 × 601 y 7 × 602. Lo que nos da:

41 + 1.380 + 25.200 = 26.621 (base 10).

Para pasar de base 10 a base 60 se invierte la operación, así:

4.389 (base 10) = 1, 13, 9 (base 60).

Un rasgo histórico único del sistema de numeración babilónico es que incluye fracciones. Si utilizamos el sistema de conversión/traducción, una coma sexagesimal se representa por un punto y coma. Así: 25; 12, 17 significa (25 × 600) + (12 × 60 - 1) + (17 × 60 - 2), es decir, 25,2047. Al pasar de un número decimal a su equivalente sexagesimal, el proceso se vuelve a invertir, de modo que 15,812 (base 10) = 15; 48, 44 (base 60). Intenta convertir algunas fracciones (1/4, 5/8, 11/16, 17/125) a su forma sexagesimal.

Problemas

1. Una viga de madera se apoya verticalmente contra un muro. La longitud de la viga es de 30 unidades. Si el extremo superior de la viga se desliza hacia abajo por la pared 6 unidades, ¿cuánto se habrá deslizado el extremo inferior horizontalmente sobre el suelo?
2. En un círculo cuya circunferencia es de 60 unidades, se dibuja una cuerda que forma un segmento cuyo sagitta es de 2 unidades. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?
3. En un círculo cuya circunferencia es de 60 unidades, se dibuja una cuerda de 14 unidades la cual forma un segmento del círculo. ¿Cuál es la sagitta de este segmento?
4. La suma del área de dos cuadrados es 1.525. El lado del segundo cuadrado es dos terceras partes del área del primero más 5 unidades. Halla los lados de cada cuadrado.
5. Un círculo contiene un triángulo inscrito cuyos lados tienen 50, 50 y 60 unidades, respectivamente. ¿Cuál es el radio del círculo?
6. La anchura de un rectángulo mide una cuarta parte menos que su longitud. La longitud de su diagonal es de 40 unidades. Halla la longitud y la anchura de este rectángulo.
7. Tenemos un trapecio isósceles con bases de 17 codos y 7 codos y una altura de 12 codos; encuentra la longitud de la transversal paralela a la base que divide el trapecio en dos áreas iguales.
8. Tenemos dos anillos de plata: 1/7 parte del primero y 1/11 del segundo están rotas, de tal modo que lo roto pesa un shekel. El

primero, que ha disminuido en 1/7, pesa lo mismo que el segundo, que ha disminuido 1/11. ¿Cuál era el peso original de los anillos de plata?

9. Tengo dos campos de grano. Del primero obtengo 2/3 de fanega de grano por unidad de área; del segundo, 1/2 fanega por unidad de área. La cosecha del primero sobrepasa a la del segundo en 50 fanegas. El área total de los dos campos juntos es de 300 unidades. ¿Cuál es el área de cada campo?

10. Se ha de excavar un pequeño canal rectangular a lo largo de 5 km. Su anchura es de 2 m y su profundidad de 1 m. A cada trabajador se le asigna la extracción de 4 m^3 de tierra, por lo cual se le pagará 1/3 de cesta de cebada. ¿Cuántos trabajadores se requieren para realizar el trabajo y cuál es el total de los salarios que se deben pagar?

11. Es bien sabido que cuanto más profundo esté uno excavando, más complicada se vuelve la tarea. Para compensar este hecho se calculan tareas diferenciales: de un trabajador que excave en la parte superior se espera que extraiga 1/3 de sar de tierra al día, mientras que uno en el nivel medio extrae 1/6 de sar y uno en el fondo 1/9 de sar. Si del canal ha de extraerse una cantidad fija de tierra al día, ¿cuánto tiempo habrá que pasarse excavando en cada nivel?

12. Un granero de cebada contiene 2.400 gur, siendo 1 gur el equivalente a 480 sila. Si los trabajadores han de recibir 7 sila de grano por cada día de trabajo, ¿cuántos hombres se pueden pagar

con este granero?

13. He sumado 7 veces el lado de mi cuadrado y 11 veces su área y he obtenido 6 1/4. ¿Cuál es el lado de mi cuadrado?

14. Le quitamos 2/3 de 2/3 a una cierta cantidad de cebada y obtenemos 100 unidades. ¿Cuál era la cantidad original?

15. Diez hermanos reciben una herencia de 100 shekel para repartir entre todos. El dinero ha de dividirse de tal modo que cada hermano reciba de más la misma cantidad que se le ha dado al hermano anterior, de modo que cada hermano recibe más que su hermano previo en una cantidad igual. Se sabe que el octavo hermano recibe 6 shekel. ¿Cuáles son los diferentes pagos a los hermanos?

16. Un muro tiene una longitud de 60 unidades. La parte superior tiene 1/2 unidad, la base tiene 1 unidad y la altura es de 6 unidades. ¿Cuál es el volumen del muro?

17. Una mujer teje una tela que tiene que tener 48 varas de largo. En un día teje 1/3 de vara. ¿En cuántos días cortará la tela del telar [= terminará]?

18. Un círculo tiene una circunferencia de 60 varas. Penetro 2 varas dentro del círculo. ¿Cuál es la longitud de la línea divisoria que he alcanzado (la cuerda)? [Nota: para este cálculo consideremos que $\pi = 3$].

19. El área de un cuadrado más su lado es igual a 45/60. ¿Cuál es el lado del cuadrado?

20. El área de un cuadrado menos su lado es igual a 870 unidades. ¿Cuál es el lado del cuadrado?

21. La suma del área de dos cuadrados equivale a 1.525 unidades. El lado de un cuadrado equivale a 2/3 del lado del otro cuadrado más 5 unidades. ¿Cuáles son los lados de mis cuadrados?

22. Tengo un cuadrado y añado 4 veces la longitud de su lado y obtengo 25/36. ¿Cuál es el lado de mi cuadrado?

23. La suma de mis dos cuadrados es 1.300. El lado de uno excede al del otro en 10 unidades. ¿Cuáles son los lados de mis cuadrados?

24. La suma de dos cuadrados es 1.300. El producto de sus dos lados es 600. ¿Cuáles son los lados?

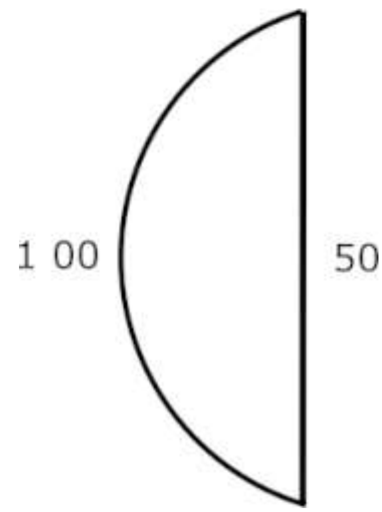
25. Tenemos una trinchera rectangular cuya área es de 7 1/2 sar. Su volumen es de 45 sar. He sumado la longitud y la anchura y he obtenido 6 1/2 varas. ¿Cuál es la longitud, anchura y profundidad de esta trinchera? [1 sar de área = 1 vara cuadrada; 1 sar de volumen = 1 sar de área por 1 codo de altura].

26. Un canal tiene 5 varas de largo, 1 1/2 vara de ancho y 1/2 vara de profundidad. A los trabajadores se les asigna excavar 10 gin de tierra, tarea por la cual se les pagan 6 sila de grano. ¿Cuál es el área de la superficie de este canal y cuál su volumen? ¿Cuál es el número de trabajadores necesarios y cuál su salario? [1 vara = 12 codos; 1 codo = 60 gin].

27. Para atacar una ciudad amurallada se ha de construir una rampa de asedio. El volumen de tierra asignado es de 5.400 sar. La rampa tendrá una anchura de 6 varas, una anchura en la base de 40 varas y una altura de 45 kus. La construcción de la rampa está incompleta; queda un hueco de 8 varas entre su extremo y el muro

de la ciudad. La altura de la rampa incompleta es de 36 kus. ¿Cuánta más tierra se necesita para completar la rampa? [1 kus = 1 codo; 1 vara = 12 codos].

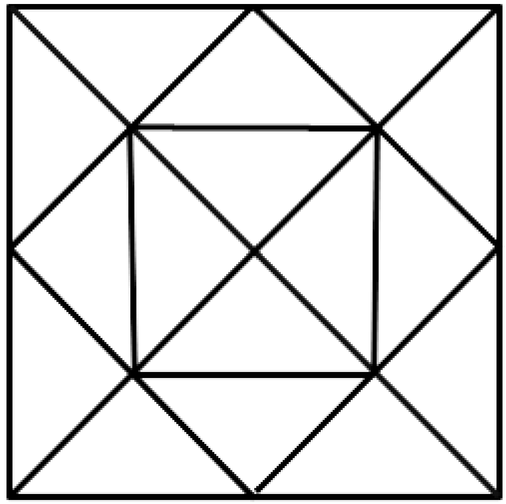
28. Ahora, un problema traducido directamente de una tablilla cuneiforme. Recuerda que las cantidades se dan en forma sexagesimal.



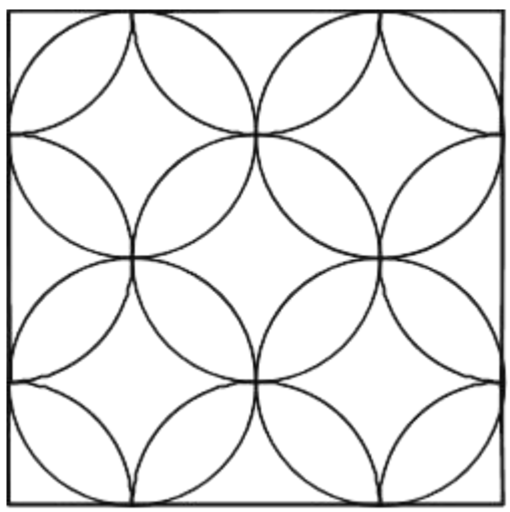
Dada una luna decreciente, el arco de cuyo círculo es 1 00, la línea que la divide es 50. ¿Cuál es el área? Tú: ¿por cuánto 1 60, el círculo, excede de 50? El exceso es 10. Multiplica 50 por 10, el exceso. Obtienes 8 20. Eleva al cuadrado 10, la línea divisora. Obtienes 1 40. Quítale 1 40 a 8 20. El resultado es 6 40. El área es 6 40. Este procedimiento te va conduciendo a una aproximación del área de un segmento circular. ¿Comprendes cómo funciona la aproximación? ¿Es una buena aproximación? De no ser así, ¿cómo puedes conseguir una aproximación mejor?

Los siguientes dos problemas eran propuestos como ejercicios para escribas durante la época babilónica antigua. Tienen aproximadamente 4.000 años de antigüedad. A ver lo bien que te desenvuelves con ellos.

29. El lado del cuadrado es 1 cable. Dentro del mismo, trazo 16 cuñas. ¿Cuál es el área de la cuña? [1 cable = 10 varas; 1 vara = 12 codos].



30. El lado del cuadrado es 1 cable. Dentro del mismo hay 4 cuñas, 16 barcazas y 5 morros de vaca. ¿Cuál es el área de un morro de vaca?



¿Qué están haciendo?

El uso de iteraciones como medio de aproximación a la raíz cuadrada de 2

La ilustración con la cual comienza este capítulo es una fotografía de una tablilla cuneiforme (YBC 7289) perteneciente a la Colección Babilónica de la Universidad de Yale. Es uno de los objetos matemáticos más increíbles y reveladores encontrados nunca. Al estudiarlo de cerca se comprueba que se trata del dibujo geométrico de un cuadrado cuyas dos diagonales se intersecan, acompañado por un texto cuneiforme como el que se ve en la figura 3.1a. Cuando se traduce, nos encontramos con los números mostrados en la figura 3.1b.

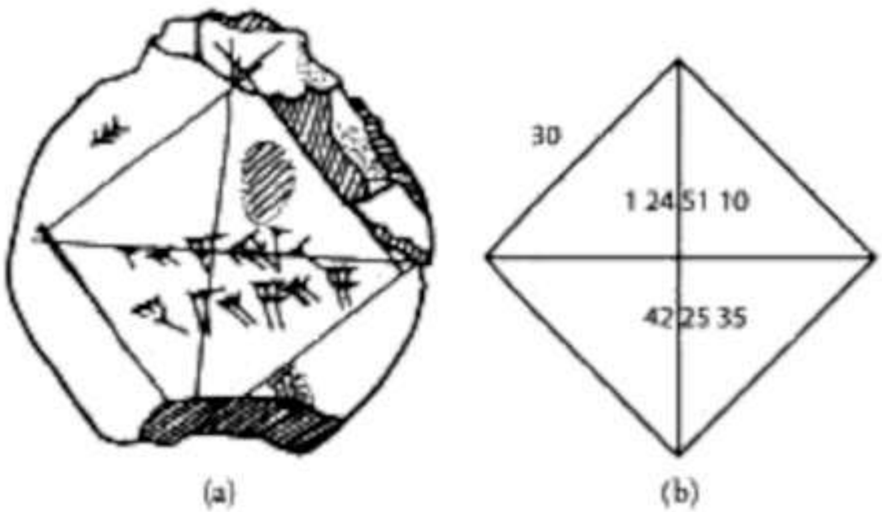


Figura 3.1. a) Dibujo arqueológico YBC7289, realizado por A. Aahoe y publicado en Episodes from the early history of mathematics. b)Traducción de la inscripción

Si examinamos los números escritos sobre la diagonal horizontal y colocamos una coma sexagesimal entre el 1 y el 24, podemos interpretar esta secuencia numérica como sigue:

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1+\frac{2}{5}+\frac{51}{3600}+\frac{1}{21600}=$$
$$=1+0{,}4+0{,}0141666+0{,}0000462=$$
$$=\ 1{,}412129$$

Estos mismos números multiplicados por la longitud del lado del cuadrado (30 unidades) nos dan el valor sexagesimal de 42; 25, 35, que son los números que aparecen bajo la diagonal y que se diría que corresponden a la longitud de esta. El número 1,4142129 es una aproximación a la √2. El valor que mi calculadora ofrece para √2= 1,41421356, lo cual significa que los antiguos babilónicos consiguieron una aproximación a la √2 con un porcentaje del ¡0,02% de error! ¿Cómo hicieron esto?

Si bien nadie sabe con exactitud cómo lo consiguieron, sospechamos que fue mediante el método de «división y valor medio». Funciona como sigue:

1. Se te pide que calcules una aproximación a la $\sqrt{x}$, la cual supones que es g_1.
2. Seguidamente calculas $x/g_1 = e_1$.
3. Entonces $g_2 = (g_1 + e_1)/2$...
4. Regresas al primer paso y repites el proceso utilizando g_2. El proceso se repite hasta que se consiga la precisión suficiente.

Como ejemplo, calculemos √139.

1. Supongamos que es 11.
2. Entonces, 139/11 = 12,63636.

3. (11 + 12,63636)/2 = 11,81818.
4. 139/11,81818 = 11,76154.
5. (11,76154 + 11,81818)/2 = 11,7898.

De modo que tras dos suposiciones, o iteraciones, consigo la respuesta deseada:

$$(11{,}7898)^2 = 138{,}999.$$

El proceso de la iteración matemática —es decir, conseguir una serie de aproximaciones cada vez más precisas a una solución matemática— es un aspecto importante de los cálculos modernos. Aquí vemos cómo este proceso ya se utilizaba para resolver problemas hace tres mil años.

Capítulo 4
El antiguo Egipto

Pintura mural de la tumba de Menna, construida en el periodo 1420-1411 a. C. aproximadamente en la necrópolis tebana.

Menna era un escriba jefe de la XVIII dinastía que supervisaba la agrimensura de los campos y la recaudación de los impuestos. Tenía el título honorario de «escriba de los campos». La imagen muestra escenas agrícolas de este período y nos enseña cómo se usaban las matemáticas. La escena superior presenta la medición de los campos; en la escena central vemos la medición del grano recolectado y el cálculo de impuestos; la escena inferior muestra el pago de impuestos, que seguidamente son transportados, como vemos en el lado derecho.

Los seres humanos se asentaron a orillas del Nilo hace más de cinco mil años. Utilizaron el río para irrigar y desarrollaron una floreciente sociedad agrícola. La región en la que se asentaron pasó a ser conocida como Egipto y sus gentes como egipcios. Si bien hay información concerniente a las matemáticas egipcias que puede ser obtenida de las inscripciones de las tumbas y monumentos de piedra, la mayor parte de nuestra información sobre este tema procede de materiales menos duraderos: rollos de papiro y de cuero. El papiro era una especie de papel fabricado con unas cañas que crecían en abundancia a orillas del Nilo. Los escribas egipcios empleaban tinta para anotar datos en los papiros, bien utilizando escritura jeroglífica cursiva (pictogramas) bien hierática. Tanto los estragos del tiempo como las sucesivas conquistas sufridas por el país nos han dejado escasos documentos egipcios de los cuales obtener testimonios matemáticos. Las principales fuentes de información sobre las matemáticas egipcias son el *Papiro matemático de Moscú* (1850 a. C.), el *Papiro matemático Rhind* (1650 a. C.), el *Papiro matemático Rollin* (1350 a. C.) y el *Papiro matemático Harris* (1167 a. C.). Todos ellos contienen colecciones de problemas relacionados con el gobierno del reino egipcio.

Problemas

1. [Dada] una cantidad: se suman sus dos tercios, un medio y un séptimo, lo cual da 33. ¿Cuál es la cantidad?

2. Un problema acertijo del *Papiro matemático Rhind*:

Existe una heredad que contiene 7 casas; cada casa tiene 7 gatos; cada gato atrapa 7 ratones; cada ratón se come 7 espigas; cada espiga podía producir 7 *hekat* de grano.

¿Cuánta cosas hay en la heredad? La respuesta que se da es 19.607, ¿es correcta? Demuestra que es la respuesta correcta para la suma de la serie geométrica 7 + 49 + 343 + 2.401 + 16.807.

3. Divide 100 panes entre 10 hombres, incluidos un barquero, un capataz y un portero, que reciben raciones dobles. ¿Cuál es la parte de cada uno?

4. ¿Cuántas cabezas de ganado hay en un rebaño del cual dos tercios de un tercio de él suman 70, que es la cantidad dada como tributo al dueño?

5. Supón que un escriba te dice que cuatro capataces han sacado 100 *hekat* cuádruples de grano y que sus equipos de trabajo están formados por 12, 8, 6 y 4 hombres. ¿Cuánto grano recibe cada capataz?

6. Se tiene un círculo en el cual hay inscrito un triángulo equilátero. El triángulo posee un área de 12 unidades cuadradas. ¿Cuál es el área del círculo?

7. Dado un conducto circular de 100 codos de longitud, 3 codos de diámetro en su base y 1 codo de diámetro en el extremo superior, determina su volumen.

8. Un terreno rectangular tiene 60 codos cuadrados; la diagonal es de 13 codos. ¿Cuántos codos se necesitan para hacer los lados?

9. Una vara erguida, de 10 codos de longitud, su base es desplazada hacia afuera 6 codos. Determina la nueva altura y la distancia que el extremo superior de la vara ha descendido.

10. Se te dice: «Haz una vela para los barcos» y luego se te dice: «Dedica 1.000 codos de tela para una vela y haz que la relación entre la altura de la vela y su anchura sea de 1 a 1 1/2». ¿Cuál es la altura de la vela?

11. Una cantidad más 17 de ella se convierte en 19. ¿Cuál es la cantidad?

12. A una cantidad junto a sus dos tercios se le quita un tercio de su suma para obtener 10. ¿Cuál es la cantidad?

13. La suma de una cierta cantidad, junto a sus dos tercios, su mitad y su séptima parte resulta 37. ¿Cuál es la cantidad?

14. Se te dice que un cuadrado de área 100 codos cuadrados es igual al área de dos cuadrados más pequeños; el lado de uno es 1/2 más 1/4 del otro. ¿Cuáles son los lados de los cuadrados?

15. Divide 10 *hekat* de cebada entre 10 hombres, de modo que la diferencia común sea 1/8 de *hekat*.

16. Divide 100 *hekat* de grano entre 5 hombres, de tal modo que la diferencia común sea la misma y la suma de las dos partes más pequeñas sea una séptima parte de la suma de las tres mayores.

17. Encuentra el volumen de un granero cilíndrico de 10 codos de diámetro y una altura de 10 codos.

18. Dada un área circular cuyo diámetro es de 9 *hekat*, ¿cuál es el área?

Las indicaciones egipcias para resolver el problema son las siguientes:

Debes sustraer al diámetro 1/9 de su longitud; el resto es 8.

Debes multiplicar 8 por 8; el resultado es 64. Esta es la cantidad del área.

¿Cómo se aproximaron los egipcios al área de un círculo? Si estuvieran utilizando la fórmula moderna para este cálculo, ¿cuál sería su valor para π?

19. Tenemos cuatro números cuya suma es 9.900. El segundo excede al primero en 17; el tercero excede a la suma de los dos primeros en 300; y el cuarto excede a la suma de los tres primeros en 300. Encuentra esos números.

20. Dada una pirámide de 300 codos de alto, con una base cuadrada de 500 codos en cada lado, determina la distancia desde el centro de cualquier lado hasta el vértice.

21. Encuentra la altura de una pirámide cuadrada con un *seqt* de 5 palmos y 1 dedo por cada codo y una base de 140 codos en cada lado.

[Nota: el *seqt* es la unidad de medida egipcia para la pendiente de una pirámide. Se halla determinando la relación entre la distancia y la altura, es decir, dando la distancia horizontal de la cara oblicua desde la vertical para cada unidad de altura. La unidad vertical se considera un codo y la horizontal un palmo, donde 7 palmos = 1 codo y 4 dedos = 1 palmo].

22. Un trozo de tela que tiene 7 codos de altura y 5 codos de anchura suma 35 codos cuadrados de tela. Quítale 1 codo a la altura y súmaselo a la anchura, de tal modo que el área siga siendo la misma. ¿Qué medida se le suma a la anchura?

23. Una pirámide tiene de base 360 codos y una altura de 250 codos. ¿Cuál es su *seqt*?

24. Un zapatero puede cortar cuero para diez pares de zapatos en un día. Puede terminar cinco pares de zapatos en un día. ¿Cuántas pares de zapatos puede cortar y terminar en un día?

25. En el antiguo Egipto, la calidad de los productos fabricados con grano, como el pan y la cerveza, se medía en una unidad llamada *pesu*, cuyo valor se calculaba como sigue:

$$Pesu = \frac{cantidad\ de\ pan\ o\ cerveza}{1\ hekat^3\ de\ grano}$$

¿Cuánta cerveza se puede hacer con una fuerza de 2 *pesu* a partir de 10 *hekat*[3] de grano?

¿Qué están haciendo?

El cálculo del volumen del frustum de una pirámide

Cuando los arqueólogos traducen los antiguos papiros egipcios, a menudo cogen el contenido —por lo general escrito en hierático, una escritura cursiva utilizada por los escribas— y lo pasan primero a jeroglíficos, una forma pictográfica, y de ahí a una lengua moderna. La figura 4.1 es una reproducción facsímil del problema 14r del *Papiro matemático de Moscú* (1850 a. C.). En la parte inferior de la ilustración se encuentra la traducción del texto a jeroglíficos.

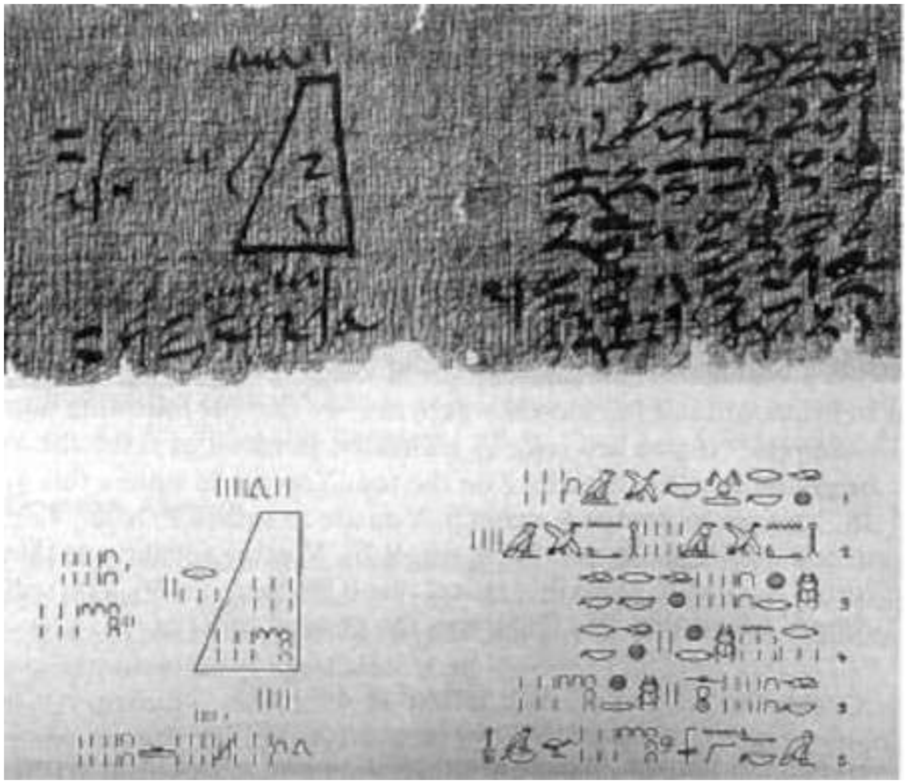


Figura 4.1. Fragmento del papiro matemático de Moscú (1859 a. C) con el texto pasado a jeroglíficos en la parte inferior.

En español el problema sería como sigue:

Método para calcular una pirámide cuadrada.

Si se te habla de una pirámide cuadrada de 6 como altura, de 4 como lado inferior y de 2 como lado superior.

Debes elevar al cuadrado esos 4. 16 debe resultar.

Debes doblar 4. 8 debe resultar.

Debes elevar al cuadrado esos 2. 4 debe resultar.

Debes sumar el 16 y el 8 y el 4. 28 debe resultar.

Debes calcular 1/3 de 6. 2 debe resultar.

Debes calcular 28 veces 2. 56 debe resultar.

Mira, perteneciente a ello es 56.

Lo que ha sido hallado por ti es correcto.

Para ayudarnos a comprender estas indicaciones, utilicemos la notación general. Visualiza el frustum de una pirámide cuadrada, con una altura = h, la longitud de la base superior = a y la longitud de la base inferior = b. La primera línea de las indicaciones nos dice que h = 6, b = 4 y a = 2. Siguiendo los siguientes pasos indicados tenemos:

$4^2 = 16$	$b^2 = 16$
$2 \times 4 = 8$	$ab = 8$
$2^2 = 4$	$a^2 = 4$
$16 + 8 + 4 = 28$	$16 + 8 + 4 = 28$
$6/3 = 2$	$h/3 = 2$

$$2 \times 28 = 56 \rightarrow \text{Volumen} = h/3\ (b^2 + ab + a^2)$$

El volumen del frustum de la pirámide es 56 [unidades cúbicas].

Los escribas estaban utilizando la fórmula moderna correcta para el volumen del frustum de una pirámide cuadrada. ¿Cómo consiguieron esta fórmula? Creemos que la derivaron mediante el método de la disección. A modo de ejercicio, haz un dibujo del frustum de una pirámide cuadrada y nombra sus dimensiones como sigue: a, b y h. Utilizando estas dimensiones, divide el frustum en varias partes (como se muestra en la figura 4.2): un prisma central rectangular, dos prismas rectangulares formados por las piezas laterales y, por último, una pirámide formada por las cuatro piezas de las esquinas. Utilizando las dimensiones que les asignes, calcula el volumen de cada una de estas piezas. (Debes conocer las fórmulas adecuadas para esos tres volúmenes). Suma las cifras conseguidas y simplifica el resultado para ver si consigues la fórmula dada más arriba.

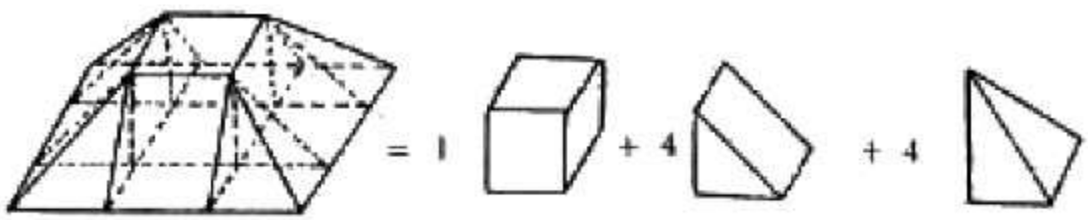


Figura 4.2. Disección de un frustum en sólidos geométricos más simples

A lo largo de la historia de las matemáticas, han sido muchos los problemas resueltos mediante esta técnica: un problema cuya solución se quiere encontrar se divide en una serie de problemas más simples cuyas soluciones se conocen. Es como si la solución al difícil problema mayor se convirtiera en la suma de las soluciones de los problemas más sencillos y pequeños. De este modo, quien se dedique a realizar estos cálculos cambia un problema difícil por una serie de problemas más sencillos que sabe cómo resolver.

Capítulo 5

La antigua Grecia

Pitágoras reflexiona sobre la relación existente entre los números y el universo.

La Historia reconoce a Tales de Mileto (c. 624-546 a. C.) como el primer matemático griego. Viajó mucho por el Mediterráneo y se cree que fue mercader. En Egipto observó a sacerdotes-agrimensores utilizar principios matemáticos para establecer los límites de los campos. En Babilonia aprendió las técnicas para observar los cielos: astronomía. Tales se llevó este conocimiento a Grecia y se convirtió en profesor de las matemáticas que había aprendido, además de desarrollar ideas nuevas sobre la cuestión. Admiradas como una ciencia filosófica e intelectual, en Grecia las matemáticas evolucionaron siguiendo líneas más formales y abstractas que en otras regiones del mundo de esa época. Los griegos consideraban que las matemáticas estaban divididas en dos partes: la aritmética, el estudio abstracto de los números, sus propiedades y sus relaciones; y la logística, las matemáticas aplicadas, la resolución de los sencillos problemas del día a día. Los eruditos griegos estudiaban la aritmética, dejando la logística para esclavos, mercaderes y artesanos. Los siguientes problemas griegos reflejan esta situación.

Problemas

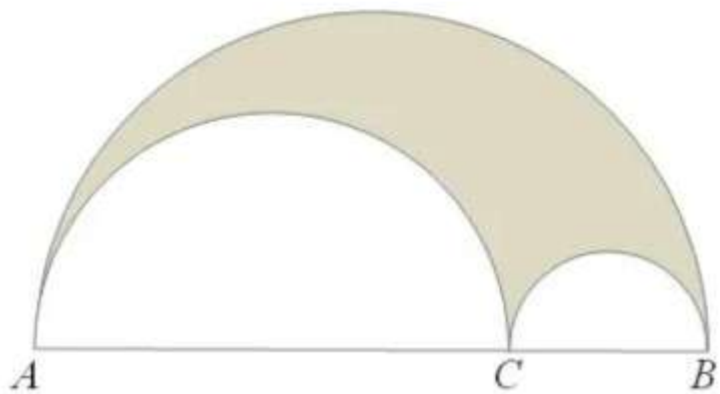
1. Encuentra dos números que sumen 20 y que cuando se eleven al cuadrado su suma sea 208.
2. Tenemos cuatro números enteros que, al ser sumados de tres en tres, sus sumas dan 20, 22, 24 y 27. ¿Cuáles son estos números?
3. Herón de Alejandría (c. 75) escribió sobre muchos aspectos de las matemáticas aplicadas. En su obra *Sobre la medición* presenta una fórmula para el área de un triángulo dada la longitud de sus tres lados *a*, *b* y *c*:

$$\acute{a}rea = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{1/2}$$

$$donde\ s = \frac{a+b+c}{2}$$

Demuestra que la fórmula de Herón es correcta.

4. En el *Libro de Lemmas* (c. 250), Arquímedes introduce una figura que, debido a su forma, se conoce históricamente como el «cuchillo del zapatero» o árbelos. Si en un semicírculo de radio R y diámetro AB se construyen dos semicírculos con radios r_1 y r_2 (donde $r_1 \neq r_2$ y $r_1 + r_2 = R$) sobre el diámetro AB, de tal modo que se encuentren en el punto C sobre AB, la región limitada por estas tres circunferencias se denomina árbelos.



El árbelos fascinaba a Arquímedes por sus propiedades matemáticas. Exploremos algunas de ellas:

a) Demuestra que la longitud del arco AC más la longitud del arco CB es igual a la longitud del arco AB.

b) Demuestra que, si se construye una línea perpendicular desde C que interseque el arco AB en un punto P, entonces PC es el diámetro de un círculo cuya área es igual a la del árbelos.

c) Completa la parte inferior del círculo de diámetro AB. El punto medio del arco de este semicírculo inferior es Q, el punto medio del arco AC es M y el punto medio del arco CB es N. Demuestra que el área del cuadrilátero *MCNQ* es igual a *r*12 + *r*22.

Consigue más información sobre el árbelos y sus propiedades matemáticas investigando en internet.

5. Encuentra dos números cuya diferencia y la diferencia de sus cubos sea igual a dos números dados.

6. Cuatro caños llenan un tanque. De los cuatro, uno puede llenarlo en un día, el segundo tarda dos días, el tercero tarda tres y el cuarto tarda cuatro días. ¿Cuánto tardarán en llenarlo los cuatro a la vez?

7. Dos amigos están caminando. Uno le dice al otro: «Dame 10 monedas y tendré tres veces más dinero que tú», y el otro dice: «Si me das esa misma cantidad, tendré cinco veces más que tú». ¿Cuántas monedas tiene cada uno?

8. Demócrates ha vivido una cuarta parte de su vida como un niño, una quinta parte como un joven y una tercera parte como un hombre, y ya ha pasado 13 años como un anciano. ¿Qué edad tiene?

9. Albañil, tengo prisa por terminar esta casa. Hoy no hay nubes y no necesito muchos más ladrillos, pues tengo todos los que necesito excepto 300. En un día, tú solo puedes hacer esta cantidad, pero cuando tu hijo deja de trabajar ha terminado 200 y tu yerno ha dejado de trabajar cuando ha hecho 250. Trabajando todos juntos, ¿en cuántos días puedes hacer esos ladrillos?

10. Dos personas están teniendo esta conversación. La primera de ellas dice: «Dame dos minas y tendré el doble que tú». El segundo responde: «Si recibo esa misma cantidad tendré cuatro veces lo que

tú». ¿Cuántas minas tiene cada una de ellas?

11. Tres personas están teniendo esta conversación. La primera de ellas dice: «Soy igual a la segunda y a un tercio de la tercera». La segunda de ellas dice: «Soy igual a la tercera y a un tercio de la primera». La última persona exclama: «Soy un tercio de la segunda más 10». ¿Cuál es el valor de cada persona?

12. Un anciano habla con un niño. El hombre le pregunta: «¿Dónde están todas las manzanas, chico?». El chico responde: «Ino ha cogido una tercera parte, Semale una octava parte y Antone se fue con una cuarta parte, mientras que Agrave salió corriendo con una quinta parte. Quedan 30 manzanas. Juro por el dios Cypris que yo solo tengo una». ¿Cuántas manzanas había originalmente?

13. En la inscripción de una tumba se lee: «En esta tumba yace Diofanto. Ah, ¡qué maravilla!», y luego continúa describiendo la longitud de su vida como sigue: «Dios le garantizó ser un niño durante una sexta parte de su vida y, sumándole una duodécima parte, cubrió sus mejillas con vello. Encendió la luz del matrimonio después de una séptima parte de su vida y, transcurridos 5 años de matrimonio, le garantizó un hijo. Desgraciadamente, siendo un niño tardío, tras alcanzar la mitad de la vida de su padre, el cruel destino se lo llevó consigo. Tras consolar su dolor durante 4 años con la ciencia de las matemáticas, Diofanto terminó su vida». Determina el número de años para cada respectivo acontecimiento de la vida de Diofanto.

14. Las tres Gracias llevan cestas de manzanas, y cada cesta

contiene el mismo número. Las nueve Musas se encuentran con ellas y les piden manzanas. Las Gracias le dan el mismo número de manzanas a cada Musa, y tanto las tres como las nueve se quedan con la misma cantidad. Averigua cuántas manzanas regalaron, y cómo es que todas tienen igual número.

[Nota: este problema resulta en una ecuación indeterminada. Elige la respuesta más pequeña].

15. Un acertijo: soy un león de latón; mis caños son mis dos ojos, mi boca y la planta de mi pata derecha. Mi ojo derecho llena una jarra en 2 días, mi ojo izquierdo en 3 y mi pata en 4. Mi boca es capaz de llenarla en 6 horas. Dime cuánto tardarán los cuatro caños juntos en llenarla. [Asume que 1 día = 12 horas].

El siguiente lamento es la paráfrasis de un problema que aparece en la *Antología griega*, una colección de 46 problemas reunidos por el gramático Metrodoro (c. 500 d. C.).

16. Tras rezar por un pequeño incremento de mi fortuna en oro, no tengo nada. Les di 40 talentos de oro bajo malos auspicios a mis amigos en vano, y veo a mis enemigos en posesión de la mitad, un tercio y un octavo de mi fortuna.

¿Cuántos talentos tuvo una vez este hombre?

17. Encuentra dos números cuadrados cuya diferencia es un número cualquiera, por ejemplo 60. [Pista: considera $x2$ y $(x + k)2$].

18. Dado un círculo de cuerdas iguales, demuestra que las cuerdas iguales determinan ángulos iguales con respecto a la circunferencia del círculo.

19. Demuestra que el ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

20. Si dos líneas son paralelas y una línea recta las interseca, demuestra que los ángulos interiores alternos formados son iguales.

21. Arquímedes estaba fascinado con la relación del volumen de tres sólidos: un cilindro recto con radio R y altura R; un hemisferio con radio R; y un cono con radio R y altura R. ¿Cuál es la relación entre los volúmenes de estos tres sólidos?

22. Demuestra que los ángulos externos de un polígono serán iguales a cuatro ángulos rectos.

23. Demuestra que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.

24. Cuando un agrimensor mide un terreno triangular, por lo general mide la longitud de los tres lados del triángulo. A partir de estos datos, en ocasiones puedes obtener el área del triángulo. Herón de Alejandría (c. 75 d. C.) desarrolló una fórmula para esta situación: dado un triángulo de lados con longitudes a, b y c y cuyo semiperímetro es s, entonces el área del triángulo A viene dada por la expresión:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Utiliza la fórmula de Herón para hallar el área de un triángulo de lados 7, 6 y 3.

Los tres problemas clásicos de la antigua Grecia son los siguientes:

a) La trisección del ángulo.

b) La cuadratura del círculo; es decir, encontrar un círculo con la misma área que un cuadrado dado.

c) La construcción de un cubo con el doble de volumen que un cubo dado.

Estos tres problemas se tenían que resolver mediante construcción, utilizando solo una regla y un compás. Con el paso de los siglos se han realizado muchos intentos por resolverlos. Los siguientes tres problemas son un reflejo de estos intentos, sobre todo el de la cuadratura del círculo.

25. En una antigua obra de matemáticas india titulada *Sulbasutras* [*Aforismos sobre el uso de la cuerda*] se ofrece un sistema para construir un círculo con la misma área que un cuadrado dado. Realiza esta construcción de «envolver el cuadrado en un círculo», luego calcula el área de las dos figuras y compara el resultado.

a) Dibuja un cuadrado.

b) Circunscribe el cuadrado con un círculo.

c) Construye una perpendicular bisectora desde el centro del cuadrado O hasta su lado superior. La bisectriz interseca el lado superior en un punto P y el círculo que lo circunscribe en un punto M.

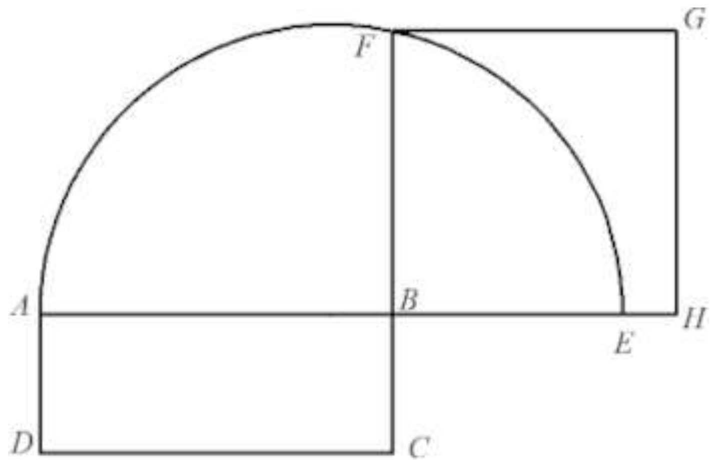
d) Divide PM en tercios. Los puntos de la división se llamarán K y N, donde K es el más cercano al punto P.

e) Utiliza OK como radio para construir un círculo. Se supone que este círculo debe tener la misma área que el cuadrado original.

¿La tiene?

26. Euclides, en el libro 2, propuesta 14 de sus *Elementos*,

proporciona el siguiente método para convertir un rectángulo en cuadrado: «Dado un rectángulo *ABCD*, el lado *AB* es extendido la longitud *CB* hasta el punto *E*. *AE* se utiliza como diámetro para construir un semicírculo. El lado *BC* se extiende entonces hasta encontrarse con el semicírculo en el punto *F*. *BF* nos proporciona el lado del cuadrado requerido *BFGH*».

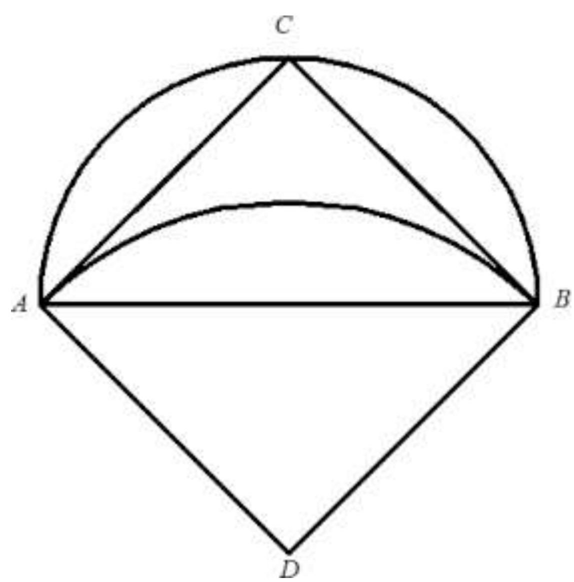


En una hoja de papel en blanco dibuja un rectángulo y realiza la construcción anterior para encontrar un cuadrado con la misma área que el rectángulo. Utiliza tus conocimientos de álgebra y geometría para demostrar que el cuadrado y el rectángulo tienen la misma área.

27. En sus intentos por cuadrar el círculo, el matemático griego Hipócrates de Quíos (c. 440 a. C.) inventó la teoría de las lúnulas. La palabra lúnula significa «luna pequeña» en latín. Las lúnulas son figuras formadas por la intersección de dos arcos circulares. Estas figuras o regiones parecen crecientes lunares. Hipócrates descubrió

que es posible hallar una lúnula concreta con la misma área que un semicuadrado y que esta relación puede obtenerse mediante construcciones geométricas. Realiza la construcción de Hipócrates que sigue a continuación y demuestra que la lúnula y el semicuadrado tienen la misma área.

Dibuja un segmento de línea *AB*. Utilizando *AB* como diámetro, dibuja un semicírculo. Señala el punto medio de *AB*, *C,* y dibuja *AC* y *CB*. El triángulo isósceles *ACB* forma un semicuadrado. Completa el cuadrado y llama *D* al cuarto vértice. Utilizando *D* como centro de un círculo, dibuja un arco que conecte *A* con *B*. La región *ACB* forma una lúnula. Ahora demuestra que el área de esta lúnula es igual al área del triángulo *ACB*.



28. En sus estudios de las relaciones entre los números, los griegos utilizaron distintos métodos. Uno de ellos era considerar la relación media entre dos números cualesquiera, *a* y *b*. Para esta tarea

desarrollaron tres métodos principales: la media aritmética, *M*A; la media geométrica, *M*G; y la media armónica, *M*H.

Estas medias se definen como sigue:

$$M_A = \frac{a+b}{2} \quad M_G = \sqrt{ab} \quad M_H = \frac{2ab}{a+b}$$

Ordena estas tres medias atendiendo a su tamaño.

29. Encuentra tres números cualesquiera donde el producto de dos de ellos sumado al cuadrado del tercero tenga como resultado un cuadrado.

¿Qué están haciendo?

La construcción de una secuencia de longitudes irracionales

Los antiguos pitagóricos buscaban la armonía y la coherencia en los números. Los números representaban la permanencia y eran algo en lo que se podía confiar. El lema de esta hermandad mística era «Todo es número». Todo dependía de los números enteros. Todas las cantidades podían ser comparadas con números o proporciones de los mismos. Pero entonces se descubrió un número que era inconmensurable —es decir, que no podía ser comparado como una proporción de dos números— y ello originó un «escándalo lógico» entre los pitagóricos. El alcance del escándalo fue especialmente grande porque se trataba de un número que aparecía en una situación muy sencilla: las dimensiones de la diagonal de un cuadrado cuyos lados eran una unidad. El segmento de línea que representaba este número podía construirse de forma sencilla con una regla y un compás y, aun así, teóricamente, no podía medirse. El número era √2.

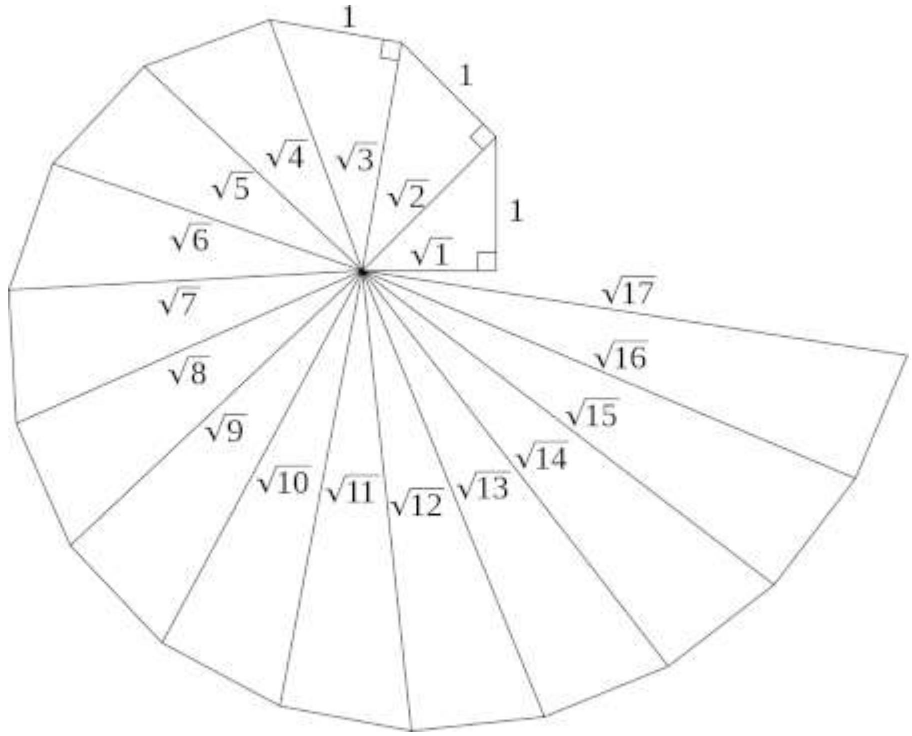


Figura 5.1. La demostración de Teodoro de la irracionalidad de los números enteros no cuadráticos del 3 al 17

El conocimiento de la existencia de números irracionales supuso un desafío para las sagradas creencias matemáticas. Pero quizá √2 fuera una anomalía; quizá solo existiera un número así. Por desgracia, no fue ese el caso. Teodoro de Cirene (c. 425 a. C.) demostró que existían muchos de tales números. Dibujó varios de ellos con una regla y un compás como segmentos de línea utilizando el principio pitagórico y se detuvo en la raíz cuadrada de 17, pero su sistema podía continuarse indefinidamente.

Estudia el diagrama de la figura 5.1 y, cuando comprendas cómo se ha realizado, dibuja más segmentos de línea que representen números irracionales.

Desde la época de los griegos, los matemáticos han estudiado en profundidad los números irracionales. Han descubierto que aparecen dentro de los números racionales: entre cada dos números racionales existe un número irracional y hay un número infinito de ellos. Y, en lo que parece una contradicción, hay más números irracionales que racionales. Números importantes como π y e han resultado ser irracionales.

Capítulo 6
La antigua China

Frontispicio de Suanfa tongzong [Fuente general de métodos de computación] (1592). Titulado «Discusión sobre problemas difíciles entre un maestro y su pupilo», es la única representación que se conoce de una tabla de cálculo china.

Al igual que Mesopotamia y el antiguo Egipto, la antigua China era una «sociedad hidráulica». Se desarrolló en fértiles valles que permitieron la agricultura. Sin embargo, los ríos, principalmente el Yangtsé y el Amarillo, sufrían inundaciones, por lo que para la supervivencia de los asentamientos humanos se hacían necesarios sistemas de irrigación y diques para el control del agua. La responsabilidad de la construcción y mantenimiento de estos sistemas recayó en el gobierno y su burocracia. Con el tiempo, este gobierno terminó consistiendo en un emperador y ministerios imperiales dirigidos por eruditos de la corte. Las dos disciplinas científicas utilizadas para mantener el imperio eran las matemáticas —necesarias para la construcción y el cobro de impuestos— y la astronomía —para predecir los ciclos del crecimiento agrícola.

Los pocos manuales de matemáticas que se conservan contienen problemas que demuestran la naturaleza práctica de las primeras matemáticas chinas. El más importante de estos libros se titula *Los nueve capítulos del arte matemático* (c. 100 a. C.), que satisfizo las necesidades matemáticas chinas durante cientos de años y fue adoptado en países vecinos como Japón y Corea.

Los problemas siguientes contienen varias unidades de medida tradicionales chinas. Cuando ha sido necesario, se han proporcionado algunas relaciones de conversión. No obstante, sería un interesante ejercicio que el alumno estudiara las relaciones entre ellas y las comparara con las unidades de medida modernas.

Problemas

1. En un muro hay encajado un tronco de madera. Si rebajamos parte del muro una profundidad de 1 pulgada, la anchura del tronco expuesto mide 10 pulgadas. ¿Cuál es el diámetro del tronco?
2. Tres personas compran madera juntas. Una paga al mercader 5 monedas, otra 3 monedas y la última 2 monedas. Tras la transacción sobran 4 monedas. Quieren dividirlas

proporcionalmente entre ellas. ¿Cuántas monedas deberán recibir cada persona?

3. Un zorro, un mapache y un sabueso pasan por la aduana y juntos pagan 111 monedas. El sabueso le dice al mapache, y el mapache le dice al zorro: «Como tu piel vale el doble que la mía, entonces ¡la tasa que debes pagar es también el doble!». ¿Cuánto tiene que pagar cada uno?

4. Si en un día una persona puede hacer 30 flechas o ponerle las plumas a 20 flechas, ¿cuántas flechas puede hacer y colocarles las plumas en un día?

5. Hay dos montones, uno contiene 9 monedas de oro y el otro 11 monedas de plata. Los dos montones tienen el mismo peso. Se coge una moneda de cada pila y se pone en la otra. Ahora, la pila que en su mayoría es oro pesa 13 unidades menos que la pila que es en su mayoría plata. Calcula el peso de una moneda de plata y el de una de oro.

6. Tenemos un muro de 5 pies de grueso. Dos ratas comienzan a horadarlo desde extremos opuestos. El primer día la rata grande excava 1 pie; la rata pequeña también excava 1 pie. Entonces la rata grande duplica su producción diaria y la rata pequeña la reduce a la mitad. Calcula cuántos días pasarán hasta que las ratas se encuentren.

7. Tenemos una puerta y una vara de medir, ambas de dimensiones desconocidas. Utilizamos la vara para medir la puerta y vemos que la vara es 4 pies más larga que la anchura de la puerta, 2 pies más

larga que su altura y que tiene la misma dimensión que su diagonal. ¿Qué dimensiones tiene la puerta?

8. Una puerta de dos hojas de anchura desconocida está abierta de tal modo que entre ambas hojas queda una separación de 2 pulgadas. Sabemos que el borde de la puerta abierta sobresale 1 pie respecto a la que está cerrada. ¿Cuál es la anchura de la puerta? [Nota: 1 pulgada = 2,54 cm; 1 pie = 12 pulgadas].

9. Un caballo del ejército no puede arrastrar una carga de 40 *dan*; como tampoco pueden dos caballos normales, ni tres caballos de calidad inferior. Sin embargo, un caballo militar y un caballo normal pueden arrastrar la carga, igual que pueden hacerlo dos caballos normales y un caballo de calidad inferior, así como tres caballos de calidad inferior y un caballo militar. ¿Cuánto puede arrastrar cada

caballo?

10. Un buen caballo y un caballo de calidad inferior salen de Chang'an camino de Qi. Qi se encuentra a 3.000 *li* de Chang'an. El caballo de buena calidad recorre 193 *li* el primer día, una distancia que cada día amplía en 13 *li*; el caballo de calidad inferior recorre 97 *li* el primer día y cada día disminuye la distancia recorrida en 1/2 *li*. El caballo de buena calidad llega primero a Qi y regresa para encontrase con el caballo de inferior calidad. Calcula cuántos días pasan hasta que se encuentran y cuánto ha viajado cada uno.

11. Dentro de un campo cuadrado hay un estanque redondo y el área alrededor del estanque es de 13,75 *mu*. Se sabe que la suma de los perímetros del cuadrado y del círculo es de 300 *bu*. Halla los perímetros del cuadrado y del círculo. [1 *mu* = 240 bu^2].

12. Hay un campo con 4 lados: el lado oriental mide 35 pasos; el lado occidental mide 45 pasos; el lado meridional 25 pasos; y el lado septentrional 15 pasos. Calcula el área del campo. ¿Es correcta la respuesta china de 800 pasos cuadrados?

13. Encuentra un número cuyos restos son 2, 3 y 2 cuando es dividido respectivamente entre 3, 5 y 7.

14. En una cesta se ponen conejos y faisanes. De la cesta sobresalen 35 cabezas y en el fondo se ven 94 patas. ¿Cuántos animales de cada tipo hay en la cesta?

15. Tenemos juntos animales cuadrúpedos de 6 cabezas y pájaros de 4 cabezas y 2 patas. Un recuento de la parte superior del grupo nos da 76 cabezas y un recuento de la parte inferior nos da 46

patas. Calcula el número de animales y el de aves.

16. Tres hermanas abandonan el hogar juntas. La mayor vuelve a casa cada 5 días, la segunda cada 4 días y la más joven cada 3 días. Calcula el número de días que transcurrirán antes de que las tres hermanas se encuentren de nuevo.

17. Un caballo, que disminuye su velocidad a la mitad cada día, viaja 700 millas en 7 días. ¿Cuánto camino recorre cada día?

18. Tenemos a un huésped que recorre a caballo 300 *li* al día. El huésped se dejó la ropa olvidada. El anfitrión se da cuenta al cabo de 1/3 de día y sale tras él con la ropa. En cuanto lo alcanza le devuelve la ropa y regresa a su casa en 3/4 de día. Asumiendo que el anfitrión viaja sin detenerse, calcula cuánto puede recorrer en un día.

19. Una mujer está lavando cuencos junto al río. Un funcionario llega y le pregunta: «¿Por qué hay tantos cuencos?»; y la mujer responde: «Porque hay huéspedes en la casa». El funcionario pregunta entonces: «¿Cuántos huéspedes?» y la mujer dice: «No lo sé, pero hay un cuenco de arroz para cada 2 personas, un cuenco de sopa para cada 3 personas y un cuenco de carne para cada 4 personas. En total utilizamos 65 cuencos». ¿Cuántos huéspedes hay?

20. Una ciudad cuadrada y amurallada de dimensiones desconocidas tiene 4 puertas, una en el centro de cada lado. A 20 *bu* de la puerta norte hay un árbol. Hay que caminar 14 *bu* hacia el sur desde la puerta sur y luego girar al oeste y caminar 1.775 *bu*

antes de poder ver el árbol. ¿Cuáles son las dimensiones de la ciudad?
21. A 4 condados se les exige proporcionar carromatos para transportar 250.000 *hu* de grano hasta un depósito. En el primer condado hay 10.000 familias y se encuentra a 8 días de camino del depósito; en el segundo condado hay 9.500 familias y se encuentra a 10 días de distancia; en el tercer condado hay 12.350 familias y se encuentra a una distancia de 13 días: y en el último condado hay 12.200 familias y se encuentra a 20 días de distancia del depósito. El número total de carromatos necesario es de 1.000. ¿Cuántos carromatos tiene que proporcionar cada condado atendiendo al tamaño de su población y a su distancia hasta el depósito? [El número de carromatos es proporcional al tamaño de la población e inversamente proporcional a la distancia].
22. Cuando durante la primavera fui de excursión me llevé una botella de vino. Al llegar a una taberna dupliqué el contenido de la botella y me bebí 1 9/10 *dou* en la taberna. Tras visitar cuatro tabernas mi botella quedó vacía. Permíteme que te pregunte: ¿cuánto vino tenía al principio de la excursión?
23. Un estanque cuadrado tiene lados de 10 pies de longitud. En la orilla occidental crecen cañas verticales que sobresalen exactamente 3 pies del agua. En la orilla oriental un tipo diferente de caña sobresale exactamente 1 pie fuera del agua. Cuando se hace que los dos tipos de caña se junten, sus extremos superiores están exactamente nivelados con la superficie del agua. Permíteme que te

pregunte cómo calcular estas tres cosas: la profundidad del agua y la longitud de cada caña.

24. Tengo dos cañas. El primer día una crece 3 pies y la otra 1 pie. El crecimiento de la primera disminuye cada día a la mitad que el día anterior, mientras que la otra crece el doble que el día anterior. ¿Cuántos días tardarán las cañas en tener la misma altura?

25. Dos hombres comienzan a andar en direcciones distintas a partir del mismo punto de partida. El camino que recorren está en relación de 7 a 3. El hombre más lento camina hacia el este. Su compañero camina hacia el sur una distancia de 10 *bu* y luego gira en la dirección adecuada y continúa caminando hasta que ambos se encuentran de nuevo. ¿Cuántos *bu* caminan cada uno?

26. Tenemos un tronco de madera de 2 pies y 5 pulgadas de diámetro del que se corta un tablón de 7 pulgadas de grueso. ¿Cuál es la anchura máxima posible del tablón? [1 pie = 12 pulgadas; 1 pulgada = 2,54 cm].

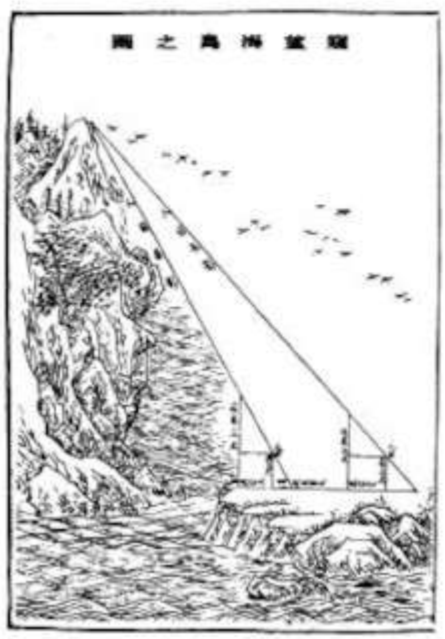
27. Un árbol tiene 20 pies de altura y una circunferencia de 3 pies. Al pie de árbol hay una enredadera que rodea el tronco exactamente siete veces antes de llegar a la cima del mismo. ¿Qué longitud tiene la enredadera?

28. Una vaca, un caballo y una cabra se encuentran en un campo de trigo, del que comen algunos tallos. El dueño del campo pide una compensación de 5 cestas de grano. Si la cabra come la mitad de tallos que el caballo y el caballo la mitad de los que come la vaca, ¿cuánto tienen que pagar el dueño de la cabra, del caballo y de la

vaca por cada animal?

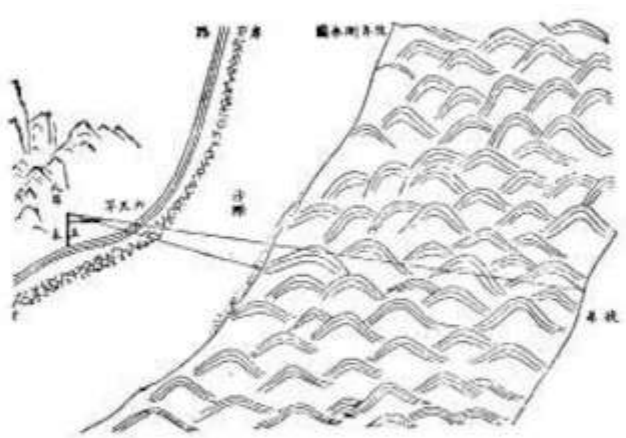
29. Para topografiar una lejana isla en el mar levanto dos postes de la misma longitud, 3 *zhang*, con una separación entre ellos de 1.000 *bu*. Considerando que los postes están alineados con la isla, si me alejo 123 *bu* del poste delantero y observo la cima de la isla desde el nivel del suelo, compruebo que la punta del poste coincide exactamente con ella. Seguidamente me alejo 127 *bu* del poste trasero y vuelvo a observar la isla desde el nivel del suelo. El extremo del poste vuelve a coincidir con la cima. ¿Cuál es la altura de la isla? ¿A qué distancia se encuentra del poste delantero?

[Nota: 1 *li* = 300 *bu* = 180 *zhang*].

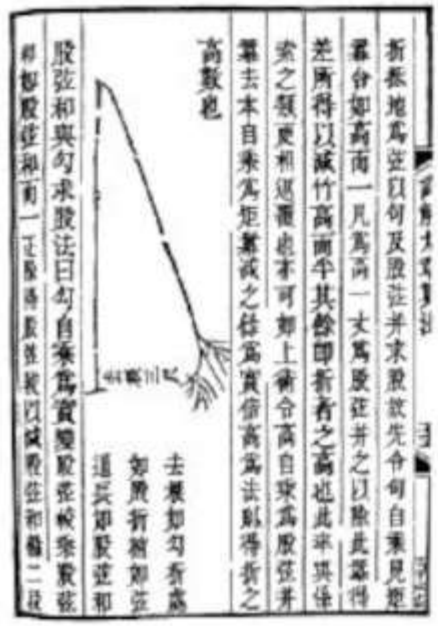


30. Un viejo general chino conduce a su ejército hasta un río con una orilla elevada. Desde encima de la orilla sujeta un bastón de 6

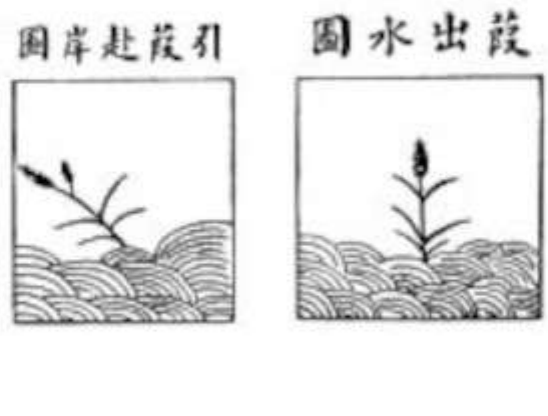
pies de largo perpendicular a sí mismo. Cuando el extremo más cercano a él se encuentra a 0,5 pies por debajo de su ojo, ve la orilla opuesta del río en el extremo más alejado del bastón. Sin mover nada excepto los ojos, ve la orilla cercana del río alineada con una marca situada a 2,6 pies del extremo cercano del bastón. Tras haber terminado la observación deja caer una cuerda desde la orilla y descubre que tiene una altura de 30 pies. ¿Cuál es la anchura del río si el ojo del general se encuentra a 5 pies del suelo?



31. Un brote de bambú de 10 *chi* de altura está roto cerca de su extremo superior. El brote y la parte rota forman un triángulo. El extremo superior toca el suelo a una distancia de 3 *chi* del tallo. ¿Cuál es la longitud del tallo que queda de pie?



32. En el centro de un estanque cuadrado con lados de 10 *chi* de longitud crece una caña cuya punta sobresale 1 *chi* por encima del agua. Si estiramos de la caña hacia la orilla, la punta queda igualada con la superficie del agua. ¿Cuál es la profundidad del estanque y cuál la longitud de la planta?



¿Qué están haciendo?

El uso de una aproximación geométrica (completar el cuadrado) *para conseguir la raíz cuadrada de un número*

La *Gran enciclopedia del reinado Yongle*, escrita durante el siglo xv, contiene las páginas que se muestran en las figuras 6.1 y 6.2. Puede que muchos lectores encuentren familiar el diagrama de la figura 6.1: es una derivación geométrica del proceso de «completar el cuadrado». Esta sección de la *Enciclopedia* recoge el trabajo de Yang Hui (c. 1270) relativo al método chino tradicional para extraer raíces de números y ecuaciones polinómicas. A partir de comienzos de la dinastía Han, utilizando sus tableros de cálculo los matemáticos chinos podían calcular raíces cuadradas y cúbicas con gran precisión.

Figura 6.1. Ilustración china del siglo XV del proceso de «completar el cuadrado»

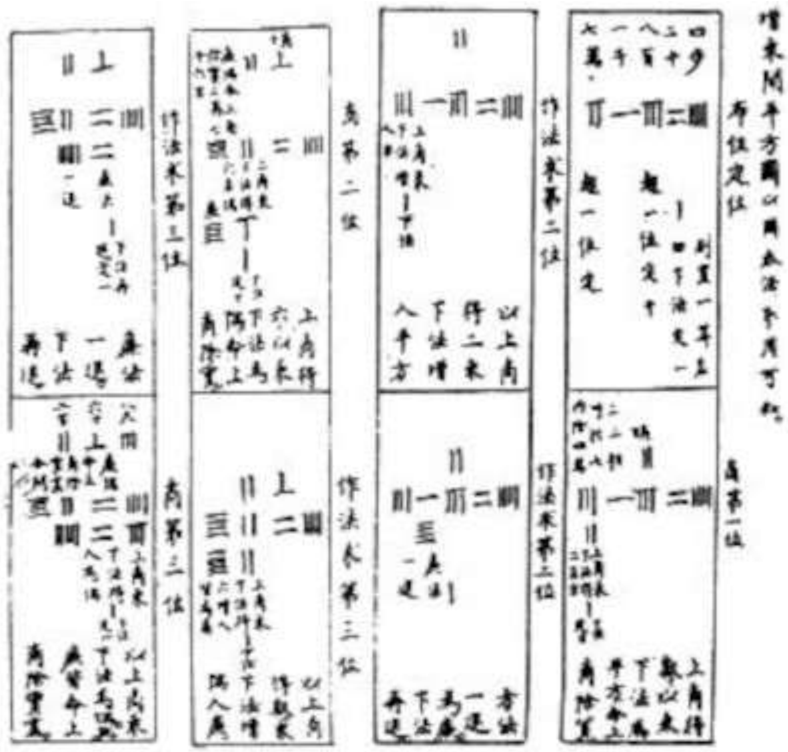
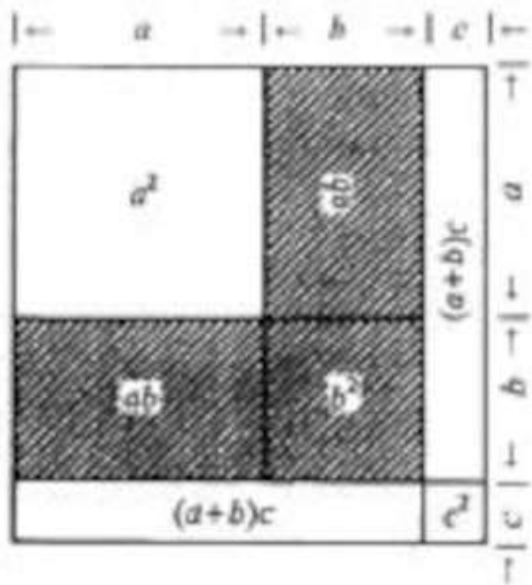


Figura 6.2. Desarrollo de la técnica de la vara para calcular la raíz cuadrada de 71.824. (El diagrama se lee de arriba a la derecha abajo a la izquierda)

Sus métodos se ampliaron hasta encontrar soluciones para ecuaciones cuadráticas y polinómicas de grado superior.

Utilicemos notación moderna y estudiemos qué es lo que está sucediendo. Si dibujamos el diagrama y nombramos sus partes utilizando notación moderna, tenemos:



Entonces, el área del cuadrado viene dada como:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

Si tenemos un número N, entonces $N = (a + b + c)^2$; luego $\sqrt{N} = a + b + c$. De modo que para aproximar una raíz cuadrada a un número, N, sigue los siguientes pasos:

1. Elige un valor para $a \Rightarrow a^2$.
2. Calcula entonces $b + c \leq (N - a^2)/2a$.
3. Elige b en consecuencia.
4. Luego elige c, donde $c \leq \dfrac{N - (a + b)^2}{2(a + b)}$.
5. Entonces $\sqrt{N} = a + b + c$.

La figura 6.3 utiliza las directrices dadas por Yang para resolver un problema concreto del *Jiuzhang suanshu*. Siguiendo sus indicaciones y utilizando la notación empleada arriba acabamos resolviendo el problema propuesto:

Dado un cuadrado de área 71.824 *bu* cuadrados, ¿cuál es el lado de este cuadrado?

1. Hallamos $\sqrt{71.824}$.

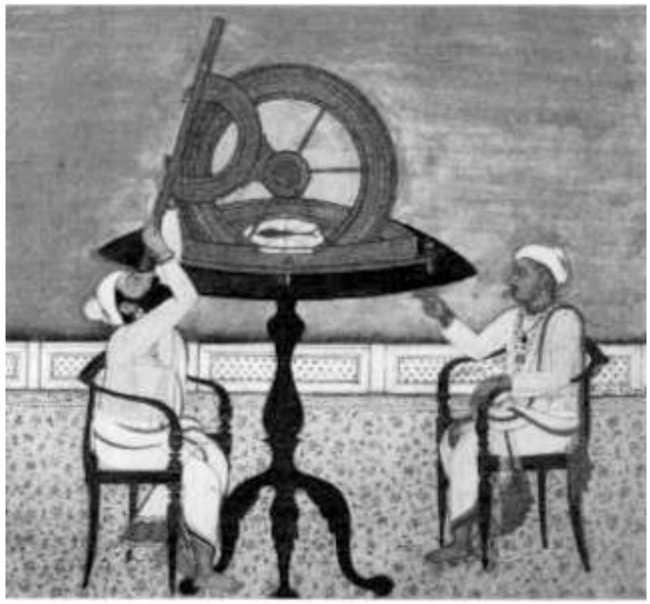
2. Aproximamos $\sqrt{70.000} \approx 200$; entonces $b + c \leq 31.824/400 \approx 79$.

3. Dado que b es un dígito de decenas probamos con 70 para b, pero es demasiado grande. Por lo tanto, hacemos que $b = 60$.

4. Por último, aproximamos c utilizando $c \leq (71.824 - 260^2)/(2 \times 270) = 7{,}82 \approx 8$.

5. Encontramos que $\sqrt{71.824}$ es $200 + 60 + 8 = 268$.

Capítulo 7
India



Astrónomos indios del siglo XVIII estudiando los cielos. El instrumento que utilizan es un teodolito, que puede determinar distancias verticales y horizontales. Mientras se dedicaban a la astrología, que era su verdadero interés, fueron desarrollando los principios de la astronomía matemática.

En la antigua India, los documentos se escribían en hojas de palma. Es un material muy frágil que no se conserva durante demasiado tiempo, lo cual ha hecho que en la actualidad se conozcan pocas de las obras de las antiguas matemáticas indias o hindúes. Los libros que existen están escritos en sánscrito, una lengua difícil de traducir. Las obras de matemáticas hindúes más antiguas que se conservan, los *Sulbasutras* (*Aforismos sobre el uso de la cuerda*) se escribieron antes de la era cristiana. Son manuales para sacerdotes y describen la construcción geométrica de altares y técnicas rituales utilizadas en astronomía. El manuscrito *Bakhshali* (c. 400 d. C.) proporciona ejemplos de aritmética sencilla. Matemáticos posteriores como Brahmagupta (c. 628) y Bhaskara II (1150) compilaron colecciones de problemas. A menudo, los problemas están escritos de forma poética o extravagante para ayudar a su memorización. Algunos de ellos aparecen a continuación.

Problemas

1. Encuentra un número que tenga un resto de 29 cuando es dividido por 30 y un resto de 3 cuando es dividido por 4.

2. Una persona posee 7 caballos *asavas*, otra 9 caballos *hayas* y otra 10 camellos. Cada dueño se desprende de 2 animales, dando uno a cada uno de los otros dueños. Ahora los tres poseen los mismos bienes. Calcula el valor de cada animal y el valor total del ganado que posee cada persona.

3. En una expedición para apoderarse de los elefantes de su enemigo, un rey recorrió 2 *yojana* el primer día. Dime, inteligente calculador, con qué creciente ritmo de marcha procedió, pues alcanzó la ciudad de su enemigo, situada a 80 *yojana*, al cabo de una semana.

4. Veintitrés cansados viajeros entraron en un delicioso bosque. Allí encontraron 63 montones de plátanos numéricamente iguales. Juntos reunieron 7 plátanos más y seguidamente dividieron los plátanos entre todos, de tal modo que no quedaran plátanos. Para

que esto sea posible ¿cuál es el número más pequeño posible para cada montón?

5. La tercera parte de un collar de perlas, roto durante una pelea de enamorados, cae al suelo; su quinta parte se queda sobre el colchón; la sexta parte la salva la criada y la décima parte se la queda su amante. Quedan seis perlas. ¿Cuántas perlas componían el collar?

6. Un pez descansa en la esquina noreste de un estanque rectangular. Una garza situada en la esquina noroeste avista al pez. Cuando el pez ve que la garza lo mira, nada rápidamente hacia el sur. Cuando alcanza el lado sur del estanque tiene la desagradable sorpresa de encontrarse allí a la garza, que había ido caminando tranquilamente por el lateral hasta llegar a la esquina suroeste del estanque, donde giró hacia el este, llegando al mismo tiempo que el pez al lado sur. Dado que el estanque mide 12 unidades por 6 unidades, y que la garza camina tan rápido como nada el pez, calcula la distancia que nadó el pez.

7. En un lago repleto de gansos rojos, la punta de un brote de loto sobresale [9 pulgadas] del agua. Forzada por el viento va avanzando poco a poco hasta terminar sumergida a una distancia de 2 codos [= 40 pulgadas]. Calcula rápido, oh matemático, la profundidad del agua.

8. Dime con rapidez, amigo mío, el cuadrado de 3 1/2, y luego la raíz cuadrada del cuadrado, y la raíz cúbica de ello, si es que conoces los cuadrados y cubos de las fracciones.

9. Un viajero de peregrinación da 1/2 de su dinero en Allahabad, 2/9 del resto en Benarés, 1/4 de lo que resta en peajes y 6/10 de lo que le queda en Patna. Después de hacerlo, le quedan 63 monedas de oro y regresa a casa. Dime la cantidad inicial de dinero.

10. Tenemos un triángulo cuyos dos lados son 10 y 17, y la base 9. Dime rápido, matemático, la altura y también el área del triángulo.

11. De un montón de mangos, el rey coge 16; la reina 1/5 de lo que queda; las tres princesas 1/4, 1/3 y 1/2 de los sucesivos restos y el hijo más joven se queda con los 3 últimos mangos. Oh tú, que eres inteligente en cuestión de problemas variados con fracciones, dime cuántos mangos había.

12. La octava parte de un grupo de monos, al cuadrado, brincaban en una arboleda encantados con su actividad. Los 12 monos restantes estaban en la colina, entretenidos charlando unos con otros. ¿Cuántos monos había en total?

13. Si tenemos un poste vertical de 12 pies de altura, al ingenioso hombre que pueda calcular la longitud de la sombra del poste, la diferencia de la cual se sabe que es 19 pies, y la diferencia de la hipotenusa creada, 13 pies, lo consideraré por completo familiarizado con toda el álgebra, así como con la aritmética.

14. Una poderosa, imbatida y excelente serpiente negra de 80 *angula* de longitud entra en un agujero a una velocidad de 7 1/2 *angula* en 5/14 de día, mientras que en el transcurso de un día su cola crece 11/4 de *angula*. Oh, adorno de aritméticos, dime cuánto tiempo le lleva a esta serpiente penetrar por completo en el agujero.

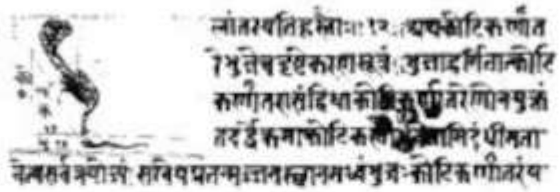
15. El precio conjunto de 9 limones y 7 limonias es 107; y el precio conjunto de 7 limones y 9 limonias es 101. Oh, tú, aritmético, dime rápido el precio del limón y de la limonia, habiendo diferenciado bien los precios de cada fruta.

16. La raíz cuadrada de la mitad del número de abejas de un panal ha volado hacia un arbusto de jazmín; 8/9 del panal se ha quedado detrás. Una obrera vuela hacia un zángano que zumba dentro de una flor de loto por la que se sintió atraído durante la noche gracias a su dulce olor, pero en la cual ahora se encuentra atrapado. Dime, la más encantadora de las mujeres, el número de abejas.

17. Cuando dividimos una cantidad por 12 nos queda un resto de 5 y, además, cuando la dividimos por 31 deja un resto de 7. ¿Cuál debería ser esa cantidad?

18. El impuesto de la venta de ropajes es de 1/20 de su valor. Un hombre compra 42 vestidos y paga en *panas* (moneda de cobre). El impuesto lo paga con dos prendas y el resto con 10 *panas*. ¿Cuál es el precio de un vestido, oh sabio?

19. En la base de un pilar de 9 *hastas* de altura hay un agujero y encima del pilar un pavo real doméstico. Al ver que una serpiente retorna hacia su agujero a una distancia del pilar equivalente a tres veces su altura, el pavo real se lanza contra la serpiente de forma oblicua. Dime con rapidez a qué distancia del poste tiene lugar el encuentro de sus caminos.



20. Un mono desciende de un árbol con una altura de 100 y va a un estanque a una distancia de 200. Otro mono, que salta desde un punto algo más alto del árbol, llega en diagonal al mismo sitio. Si las distancias recorridas son iguales, dime rápidamente, oh sabio —si posees un amplio conocimiento de los cálculos—, cuál es la altura del salto.

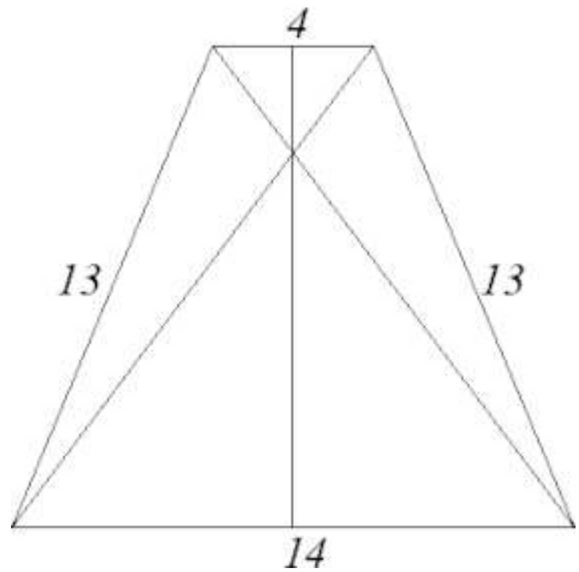
21. En una figura triangular, cuando la base es igual a 14 y los brazos a 13 y a 15, dime con rapidez la altura y los dos segmentos de la base, así como la cantidad de partes iguales conocida como el área.

22. Una persona tiene 300 monedas y 6 caballos; otra tiene 10 caballos del mismo precio y una deuda de 100 monedas. Los dos poseen una riqueza igual. ¿Cuál es el precio de un caballo?

23. Los 8 rubíes, 10 esmeraldas y 100 perlas que tiene el adorno de tu oreja fueron comprados por mí para ti al mismo precio. La suma de los precios de esta tríada de gemas fue la mitad de 100 reducida en 3. Dime, cariño mío, el precio de cada una por separado en el caso, oh aquella que es auspiciosa, de que conozcas las matemáticas.

24. Se observa que las sombras de dos gnomones iguales tienen respectivamente 10 y 16 *angula* y que la distancia entre las puntas de las sombras es de 30. Se han de encontrar tanto el lado vertical como la base.

25. Sean la tierra 14 unidades y la cara 4. Las dos orejas principales deben medir 13; averigua la longitud de las líneas que se intersecan en la parte superior y el área.



26. La quinta parte de un grupo de monos, menos 3, al cuadrado, se ha ido a una cueva: a uno de ellos se lo ve trepando a la rama de un árbol. Dime cuántos hay.

27. Exasperado durante el combate, Arjuna dispara toda una aljaba de flechas para acabar con su enemigo, Carna. Con la mitad de sus flechas rechaza las de su antagonista; con cuatro veces la raíz cuadrada de la aljaba llena mata a su caballo; con 6 flechas mata al carretero de Carna; con 3 le arranca la sombrilla, el estandarte y el arco; y con 1 corta la cabeza de su enemigo. ¿Cuántas flechas disparó Arjuna?

¿Qué están haciendo?

La aplicación de la regla de tres

Una de las reglas básicas de las matemáticas indias era la *trairasica*, o regla de tres. El matemático Brahmagupta (c. 628) explicaba así la regla:

> *En una regla de tres los términos se llaman argumento, fruto y requisa o deseo. El primer y el último términos deben ser similares. La requisa multiplicada por el fruto y dividida por el argumento o medida tiene como resultado el producto o fruto del deseo. (Smith 1958, 2:483).*

Un problema típico en el que se aplica esta regla sería el siguiente:

> *Si 1 1/4 de pala de madera de sándalo cuesta 10 1/2 pana, ¿cuánto cuestan 9 1/4 palas de madera de sándalo?*

Un escriba matemático multiplicaría el fruto por el deseo y dividiría el resultado por la medida para obtener el fruto del deseo, 77 7/10 *panas*.

En la actualidad reconocemos este procedimiento como la expresión de una proporción simple: $a/b = c/x$ y $x = bc/a$.

La regla de tres fue adoptada por los mercaderes árabes e introducida en Europa. Entre los mercaderes italianos pasó a conocerse como la *regula del tres*, aunque también recibió otros nombres: «regla de oro», señalando a su importancia; y «regla del mercader», referido a su uso principal. De hecho, esta sencilla técnica matemática era muy valorada por la comunidad mercantil. En su libro de aritmética de 1683, Hodder comenta lo siguiente al respecto de la regla de tres:

> *La Regla de Tres es llamada comúnmente Regla de Oro y, de hecho, puede ser así categorizada, porque, igual que el oro trasciende a todos los demás metales, así hace esta regla con todas las demás de la aritmética. (p. 87)*

También se desarrollarían otras reglas similares basadas en las proporciones, como la regla de cinco y la regla de siete.

Capítulo 8
El mundo islámico

Agrimensores «árabes» toman medidas, en una xilografía impresa en un comentario del Somnium Scipionis de Cicerón. En esta época, el término «árabe» se refiere a cualquier sabio islámico, pues todos los trabajos eruditos realizados en la comunidad islámica se escribían en árabe.

La religión islámica, fundada por el profeta Mahoma, data del año 622. Originado en la península arábiga, el islam unió a diversas tribus y pueblos en un único grupo que obedecía las mismas reglas religiosas y seguía los mismos rituales culturales asociados a ellas, el cual terminó expandiéndose por todo el mundo. En el año 750, el califa al-Mansur estableció la capital en Bagdad. La ciudad se convirtió en el centro de estudios del mundo islámico y en ella fueron recogidos y traducidos al árabe los clásicos griegos. Los sabios árabes estudiaron las matemáticas y la ciencia de los helenos.

En el año 766 se fundó en Bagdad una institución de enseñanza formal, el Bayt al-Hikma o Casa de la Sabiduría. Atrajo a eruditos de todo el mundo islámico. Algunos de ellos comenzaron a redactar sus propios libros sobre matemáticas. Quizá el más influyente de ellos sea el escrito por Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi (c. 780-850), titulado *Kitab al-jabr wa'l muqabalah*. El libro trata lo que nosotros conocemos como resolución de ecuaciones utilizando dos procedimientos: «equilibrar» y «restaurar». En árabe, la palabra para «restaurar» es *al-jabr*. Cuando el libro fue traducido y llevado a Occidente se convirtió en un libro de álgebra.

Cuando hablamos de las «matemáticas islámicas» nos referimos a los desarrollos matemáticos que tuvieron lugar durante el califato abasí (750-1000), cuando el imperio fundado sobre los principios del islam gobernaba gran parte del Oriente Medio, el norte de África y partes de Europa. Quienes contribuyeron a ellas no fueron necesariamente musulmanes. La libertad de erudición que existía en todas partes del imperio permitió a cristianos, judíos y otros no musulmanes vivir y trabajar juntos. Los problemas que siguen son típicos de los que aparecen en los corpus de matemáticas islámicas de este período.

Problemas

1. Hay quien dice que si 10 se divide en tres partes, y la parte pequeña se multiplica por sí misma y es añadida a la parte media

multiplicada por sí misma, el resultado es la parte grande multiplicada por sí misma; y que cuando la parte pequeña es multiplicada por la parte grande es igual a la parte media multiplicada por sí misma. Calcula las partes.

2. El número 50 es dividido por un cierto número. Si el divisor se incrementa en 3, el cociente disminuye en 3,75. ¿Cuál es el número?

3. He dividido 10 en dos partes y he dividido la primera por la segunda, y la segunda por la primera y la suma de los cocientes es 2 1/6. Calcula las partes.

4. Supongamos que dividimos 10 en dos partes, y que el producto de una de estas partes por sí mismo es igual al producto de la otra parte por la raíz cuadrada de 10. Calcula las partes.

5. Supongamos que 10 se divide en dos partes, cada una de las cuales es dividida por la otra, y que cuando cada uno de los cocientes se multiplica por sí mismo y el más pequeño se le resta al mayor, nos queda 2. Calcula las partes.

6. Se dice que 10 ropajes fueron comprados por dos hombres por un precio de 72 dírhams. Cada uno pagó 36 dírhams. El valor de los ropajes no es el mismo. El precio de cada ropaje de un hombre es 3 dírhams mayor que el precio de cada ropaje del otro hombre. ¿Cuántos ropajes compró cada hombre?

7. Coge un número, quítale 1/3 y súmale 2. Si multiplicamos este resultado por sí mismo es igual al número más 24. ¿Cuál es el número?

8. Un terreno triangular tiene dos lados que miden 10 yardas de longitud y una base de 12 yardas. ¿Cuál es el cuadrado más grande que puede construirse dentro de este terreno, de tal modo que uno de sus lados se encuentre sobre la base del triángulo?

9. Tienes dos cantidades de dinero, la diferencia de las cuales es de 2 dírhams; divides la suma más pequeña por la mayor y el cociente resultante es igual a 1/2. ¿Cuáles son las dos cantidades de dinero?

10. Una mujer muere, dejando esposo, un hijo y tres hijas. Calcula la fracción de su herencia que recibirá cada uno.

[Nota: se han de seguir las condiciones de la ley islámica, es decir, que el marido hereda una cuarta parte y un hijo el doble que una hija].

11. Una mujer muere, dejando esposo, un hijo y tres hijas, pero también le deja a un extraño 1/7 + 1/8 de sus bienes. Calcula las partes de cada heredero.

[Nota: según la ley islámica, un legado fuera de la familia no puede exceder de una tercera parte de los bienes a menos que los herederos naturales estén de acuerdo. Si lo están, tras pagarse la herencia externa los miembros de la familia se repartirán los bienes según las condiciones mencionadas en el problema anterior].

12. Tenemos un triángulo con lados de longitud 14, 13 y 15. Utiliza el lado de longitud 13 como base del triángulo y calcula su altura.

13. He dividido 10 en dos partes, tras lo cual he dividido una por la otra y el cociente que he obtenido es 4. ¿Cuáles son las dos partes?

14. Dos cuadrados y 10 raíces son igual a 48 dírhams. ¿Cuál es la

raíz?

15. He multiplicado 1/3 de una cosa y una, por 1/4 de la cosa y una, y el producto es 20. ¿Cuál es el valor de la cosa?

16. He dividido 10 en dos partes; he dividido cada parte por sí misma y luego he sumado los productos y la suma es 58 dírhams. ¿Cuáles son las partes?

17. He multiplicado 1/3 de una raíz por 1/4 de la raíz, y el producto es igual a la raíz más 24. ¿Cuál es la raíz?

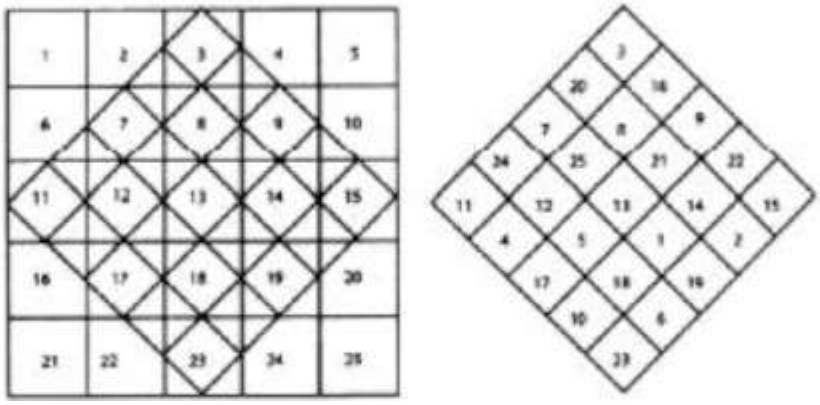
18. Tenemos un cuadrado. 2/3 de 1/5 de él equivalen a 1/7 de su raíz. ¿Cuál es la raíz?

19. Si alguien dice que un trabajador recibe una paga de 10 dírhams al mes, ¿cuánto se le ha de pagar por seis días?

20. Se divide 10 en dos partes. Una parte se multiplica por sí misma y la otra por la raíz de 8. Si se restan estos dos productos el resultado es 40. ¿Cuáles son las dos partes?

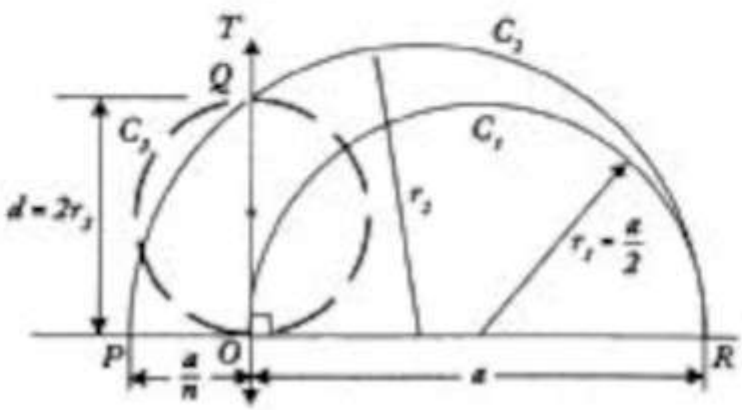
21. Se divide 10 en dos partes, cada una de las cuales es dividida por la otra. Si seguidamente multiplicamos por sí mismos cada uno de los cocientes y luego el pequeño es sustraído al mayor, el resultado es 2. ¿Cuáles son las partes?

22. El matemático ibn al-Haytham, conocido en Occidente como Alhazen (965-1040), descubrió un sistema para construir cuadrados mágicos de orden impar. Su método para construir un cuadrado de quinto orden aparece demostrado debajo:



El cuadrado oblicuo de la derecha está rotado 45º al contrario de las agujas del reloj. Utiliza este método para construir un cuadrado mágico de séptimo orden.

23. El matemático persa Abu Bakr al-Karaji (m. 1019) ideó una construcción en la que, dado un círculo, era posible construir otro círculo de área $1/n$ del círculo dado. La construcción se muestra en el diagrama de debajo. Demuestra que es correcto.



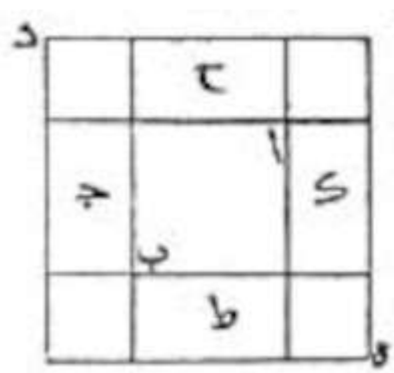
¿Qué están haciendo?

La resolución de una ecuación cuadrática mediante el sistema de *completar el cuadrado.*

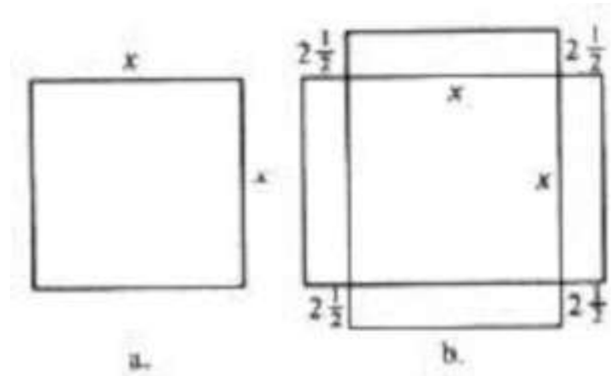
En su *Álgebra*, al-Khwarizmi (c. 825) demuestra cómo resolver seis tipos de ecuaciones. La solución a un tipo de ellas se explica con el siguiente problema:

> *Un cuadrado y diez veces su raíz equivalen a 39 dírhams. ¿Cuál es el valor de la raíz?*

Al explicar la solución, al-Khwarizmi utilizó el diagrama siguiente:



En nuestro análisis de la solución utilizaremos notación moderna. Estamos resolviendo el problema $x^2 + 10x = 39$. Primero construimos un cuadrado de lado x y seguidamente extendemos sus lados para incluir rectángulos con lados que midan $10/4 = 2\ 1/2$.



Ahora la figura de la derecha representa $x^2 + 10x$ de forma geométrica, el lado izquierdo de la ecuación dada. «Completamos el cuadrado» añadiéndole cuatro pequeños cuadrados de área $(5/2)^2$ en las esquinas. Para equilibrar la situación debemos añadir $25/4 \times 4$ al otro lado de la ecuación: $39 + 25 = 64$.

Así, el área del cuadrado completado es 64 y su lado 8. Esto hace que el lado del cuadrado pequeño (el cuadrado con el que empezamos) sea $8 - 5 = 3$; por lo tanto, $x = 3$.

Como hemos visto en los problemas previos, muchos pueblos de la Antigüedad utilizaron un enfoque geométrico para resolver operaciones algebraicas. Con el producto de dos cantidades concebido como el área de un rectángulo, la serie de operaciones matemáticas que seguían podían justificarse visualmente. El álgebra primitiva se basaba en este tipo de visualización. Los antiguos babilonios utilizaron un método de «completar el cuadrado» para resolver ecuaciones cuadráticas, igual que hicieron los chinos cuando perfeccionaron las técnicas para la extracción de raíces cuadradas. De modo que cuando al-Khwarizmi compiló su álgebra, muchas de sus técnicas también estaban basadas en el método geométrico de completar el cuadrado.

Capítulo 9

La Europa medieval

Durante la Edad Media se tenían en muy alta estima los trabajos de Pitágoras. Una antigua xilografía de una aritmética de 1491 muestra a Pitágoras enseñando a un grupo de jóvenes. Nótense las discrepancias matemáticas de la ilustración.

Con la caída del Imperio romano en torno al 500 d. C., Europa retrocedió a un estadio más primitivo. El sistema impositivo se colapsó y el sistema monetario dejó de mantenerse. La red de carreteras se deterioró y el transporte se volvió difícil. Los pueblos quedaron aislados. Surgió un sistema feudal, en el cual la población que vivía de la agricultura era gobernada y protegida por caudillos aristócratas. A su vez, los productos y servicios de los campesinos pertenecían a su señor. La única influencia unificadora de la época era la Iglesia católica. La Iglesia estaba interesada principalmente en cuestiones espirituales; las actividades científicas y la promoción de las ciencias, las matemáticas incluidas, eran de importancia menor.

Durante esta época solo aparecieron dos obras importantes de matemáticas: *Propositiones ad acuendos juvenes* (800) y Liber abaci (1202). Carlomagno, un caudillo franco que en el año 800 se convirtió en emperador de la parte de Europa conocida como Sacro Imperio Romano Germánico, fundó una escuela cortesana en la década del 780 y trajo a un monje desde Inglaterra, Alcuino de York, para que enseñara en ella. Alcuino escribió *Propositiones*, o «Problemas para perfeccionar a los jóvenes», una colección de 56 rompecabezas matemáticos destinados a la enseñanza de los pajes de la corte.

En el siglo x la cada vez mayor actividad de mercaderes y artesanos en Europa sostenía el comercio internacional. Los mercaderes europeos viajaban lejos para conseguir bienes exóticos y beneficios. Banqueros, prestamistas y mercaderes necesitaban las matemáticas para poder llevar sus cuentas. El Liber abaci (1202), o Libro de los cálculos —escrito por el mercader italiano Leonardo de Pisa (c. 1175-1250), conocido popularmente como Fibonacci— enseñaba las técnicas de la aritmética y el álgebra simple. Fue una de las primeras obras en introducir en Italia los numerales indo-arábigos y el uso de las fracciones comunes. Fibonacci aprendió muchas de sus matemáticas de maestros árabes mientras vivía en el norte de África.

Problemas

1. Trescientos cerdos han de ser preparados para un festín. Serán preparados en 3 tandas en 3 días sucesivos con un número impar de cerdos en cada tanda. ¿Cómo es posible conseguir esto?
2. En un pozo que tiene 50 palmos de profundidad hay un león. El león trepa 1/7 de palmo diariamente y se resbala 1/9 de palmo. ¿En cuántos días saldrá del pozo?
3. Hay un árbol con 100 ramas; cada rama tiene 100 nidos; cada nido, 100 huevos; cada huevo, 100 pájaros. ¿Cuántos nidos, huevos y pájaros hay?
4. En un terreno se levantan 2 postes separados 12 pies; el poste más pequeño tiene una altura de 35 pies, mientras que la altura del grande es de 40 pies. Se quiere saber, en el caso de que el poste más grande se inclinara hacia el más pequeño, ¿en qué punto lo tocaría?
5. Un hombre tiene en su tienda 4 pesas con lo que puede pesar libras enteras, desde 1 hasta 40. ¿Cuántas libras tiene cada pesa?
6. Una sanguijuela invita a una babosa a comer a una leuca de distancia; pero solo puede reptar una pulgada al día. ¿Cuánto tardará la babosa en alcanzar la comida? [1 leuca = 1.500 pasos; 1 paso = 5 pies; 1 pie = 12 pulgadas, 1 pulgada = 2,54 cm].
7. Una ciudad cuadrangular mide 1.100 pies por un lado y 1.000

pies por el otro. En un lateral 600 y en el otro lateral 600. Quiero cubrirla con tejados de casas, cada una de las cuales tendrá 40 pies de largo y 30 pies de ancho. ¿Cuántas casas puedo meter dentro?

La respuesta de Alcuino es 520 casas. ¿Es correcta?

8. Dos caminantes ven algunas cigüeñas y se preguntan cuántas hay. Hablando, deciden que si hubiera el mismo número, y el mismo número otra vez, y luego la mitad de una tercera parte de la suma que haría 2 más, eso serían 100. ¿Cuántas cigüeñas había?

9. Un mercader quería comprar 100 cerdos por 100 peniques. Por un verraco pagaría 10 peniques y por una puerca 5 peniques, mientras que tú pagarías 1 penique por una pareja de lechones. ¿Cuántos verracos, puercas y lechones tiene que haber para que pueda haber pagado exactamente 100 peniques por 100 animales?

10. Con oro, plata, bronce y plomo se fabrica un disco que pesa 30 libras. Contiene tres veces más plata que oro, tres veces más bronce que plata y tres veces más plomo que bronce. ¿Cuánto hay de cada metal?

11. Un tonel es llenado con 100 metretas mediante tres tubos. Por uno de ellos fluye un tercio más un sexto de la capacidad, por otro un tercio de la capacidad, mientras que por el tercer tubo solo fluye un sexto de la capacidad. ¿Cuántos sextarios fluyen por cada tubo? [1 metreta ≈ 9 galones; 1 galón = 3,7854 litros; 1 sextario ≈ 1 pinta; 1 metreta = 72 sextarios].

12. Tengo una capa de 100 codos de largo por 80 codos de ancho. Con ella quiero hacer capas más pequeñas, de 5 codos de largo y 4

codos de ancho. ¿Cuántas capas puedo hacer?

13. En el momento de su muerte, un padre les da a sus hijos 30 frascos de cristal, de los cuales 10 están llenos de aceite, 10 están llenos por la mitad y los otros 10 vacíos. Divide el aceite y los frascos de tal modo que cada uno de los 3 hijos reciba la misma cantidad de frascos y de aceite.

14. Un rey ordena a sus sirvientes que reúnan un ejército en 30 feudos, de tal modo que en cada feudo cojan el mismo número de hombres que hayan reunido hasta entonces. El sirviente va al primer feudo solo; al segundo va con otro; al siguiente va con tres. ¿Cuántos se cogieron de los 30 feudos?

15. Un buey ara el campo durante todo el día. ¿Cuántas huellas deja en el último surco?

16. Dos hombres conducen unos bueyes por el camino y uno le dice al otro: «Si me das dos bueyes tendré tantos como tú tienes». Y el otro le contesta: «Si me das dos bueyes tendré el doble de los que tú tienes». ¿Cuántos bueyes hay y cuántos tiene cada uno?

17. Tres amigos, cada uno con una hermana, tienen que cruzar un río. Cada uno de ellos desea a la hermana del otro. En el río encuentran una pequeña barca en la cual solo pueden cruzar dos de ellos a la vez. ¿Cómo pueden cruzar el río sin que ninguna de las mujeres sea deshonrada por los hombres?

18. Un hombre y una mujer, cada uno con el peso de un carro, con dos hijos, que juntos pesan lo que un carro, tienen que cruzar un río. Encuentran una barca que solo puede cargar el peso de un

carro. Haz el traslado, si puedes, sin hundir la barca.

19. Tenemos un campo de 200 pies de longitud y 100 de anchura. En él quiero poner ovejas, de tal modo que cada oveja disponga de 5 pies por 4 pies. ¿Cuántas ovejas puedo poner?

20. Un campo cuadrangular mide 30 perches por un lado y 32 por el otro; 34 perches en la parte superior y 32 en la parte inferior. ¿Cuántos acres contiene el campo?

21. Una bodega tiene 100 pies de largo y 64 pies de anchura. ¿Cuántos barriles puede contener si cada barril tiene 7 pies de largo y 4 pies de anchura en el centro y hay que dejar un pasillo de 4 pies de anchura?

22. Un caballero tiene 30 empleados y ordena que se les den 30 medidas de grano. Según sus órdenes, a cada hombre han de dársele 3 medidas, a cada mujer 2 medidas y a cada niño 1/2 medida. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay?

23. Un hombre que quería construirse una casa contrató a 6 albañiles, de los cuales 5 eran maestros albañiles y el sexto un aprendiz, para que la construyeran para él. Accedió a pagarles un total de 25 peniques al día, recibiendo el aprendiz la mitad de paga que un maestro. ¿Cuánto recibió cada uno al día?

24. Un hombre en Oriente quería comprar 100 animales variados por 100 chelines. Ordenó a su sirviente que pagara 5 chelines por un camello, 1 chelín por un asno y 1 chelín por 20 ovejas. ¿Cuántos camellos, asnos y ovejas compró?

25. Un bastón de Berbería de 8 palmos de longitud es vendido por 4

7/10 besantes. Se quiere saber cuánto valen 2 1/4 palmos.

26. Dos hombres crean una empresa en la que uno pone 15 libras y 7 sueldos, es decir, 15 7/20 libras; mientras que el otro pone 19 libras. Sus beneficios conjuntos suponen 14 libras, 14 sueldos y 5 denarios, o 14 y 5/12 y 14/20 libras. ¿Qué parte de los beneficios debe recibir cada uno?

27. Un hombre recibe 7 besantes al mes por su trabajo y si en algún momento no trabaja, devuelve 4 besantes al mes. Se queda durante un mes; algunas veces trabaja y otras no; así, tiene 1 besante de cuando trabajó, descontando lo que no trabajó. Queremos saber cuánto trabajó durante el mes y cuánto no. [Asúmase un mes de 30 días].

28. Un hombre compra en Constantinopla 90 modios de maíz, mijo, judías, cebada y lentejas por 21 1/4 besantes. 100 modios de maíz se venden a 29 besantes, de cebada a 25 besantes, pero el mijo a 22 besantes y las judías a 18 besantes. Las lentejas cuestan 16 besantes. Se quiere saber cuánto compra de cada cosa.

29. Dos hombres con besantes encuentran dos caballos a la venta, el segundo de los cuales cuesta 2 besantes más que el primero. El primer hombre, con un tercio de los besantes del segundo hombre, propone comprar el primer caballo. El segundo hombre, con un cuarto de los besantes del primero, propone comprar el segundo caballo. Todo ello se hace con números enteros. Se quiere saber el precio de cada caballo y cuántos besantes tiene cada hombre.

Si bien la mayoría de los problemas de esta época se escribieron en latín, algunos sabios judíos escribieron en hebreo. Levi ben Gershon (1288-1344) —rabino, filósofo y matemático— fue uno de ellos. Vivía en una comunidad judía en el sur de Francia y escribió varios libros de matemáticas. Los problemas siguientes proceden de su Maaseh hoshev [El arte del cálculo], escrito en 1321.

30. Dado que 2/5 + 3/4 + 1/3 de un número equivalen a 20, ¿puedo preguntar el valor de todo el número?

31. Dado que 3/7 + 4/5 de un número desconocido exceden en 3/2 + 1/4 del número desconocido en 20, ¿cuál es el número?

32. El coste de 11 medidas de trigo es de 17 dinares. ¿Cuál es el coste de 15 medidas de este trigo?

33. Un barril tiene varios agujeros. El primer agujero vacía el barril por completo en 3 días; el segundo hace lo mismo en 5 días; otro agujero lo hace en 20 horas; y el restante vacía el barril por completo en 12 horas. Con todos los agujeros abiertos, ¿en cuánto tiempo se vaciará el barril?

34. Un mercader vende dos medicinas. El precio de la primera es de 17 peshuts por litro y el de la segunda de 24 peshuts por litro. Un comprador desea adquirir una mezcla de las dos por 19 peshuts. ¿Qué fracción de cada una de estas medicinas formarán la medida requerida?

35. Reuven compró 2/5 y 3/7 de una medida por 7 8/11 dinares. Vendió 4/9 de la medida por 8 3/7 dinares. En total invirtió 100 dinares. ¿Ganó o perdió con la transacción? ¿Cuánto?

36. La suma de dos números es 13 y su producto 17. ¿Cuáles son

los números?

37. Un número más 2/7 y 1/9 de un segundo número hacen 20. Si sumas al segundo número 2/5 del primer número también consigues 20. ¿Cuáles son los números?

38. Dados dos números, cuando sumas el primero al segundo su relación con un tercer número equivale a 3 2/5 + 1/7. Cuando el primero es sumado al tercero, su relación con el segundo equivale a 7 2/3 = 1/4. El segundo número es 30. Queremos saber cuál es el valor de cada uno de los números restantes.

¿Qué están haciendo?

Los primeros intentos de crear gráficos

Dado que la Europa medieval carecía de una notación matemática estándar, los autores de la época utilizaron varios sistemas visuales para representar relaciones matemáticas. Emplearon bosquejos, imágenes y en algunos casos unas figuras que llamaremos «garabatos matemáticos» para ilustrar y expresar algunas de sus ideas. La figura 9.1 muestra una ilustración dibujada a mano en un manuscrito del siglo x que representa las posiciones de los «siete errantes celestes» —es decir, los cinco planetas más el Sol y la Luna— en el cielo nocturno en el período de un mes.

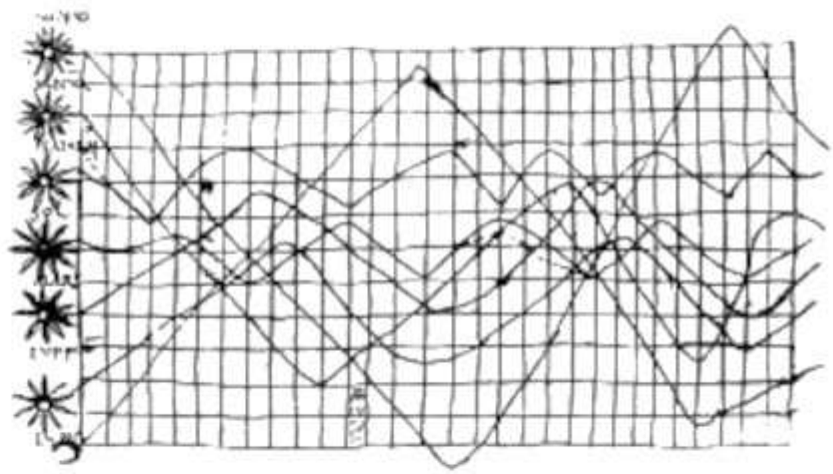


Figura 9.1. Un «gráfico» primitivo que aparece en el Codex Latinus 14436, Bayerische Staats Bibliothek de Münich

Examina el diagrama con atención. ¿Puedes identificar los nombres de los errantes celestes que aparecen a la izquierda? La cuadrícula, ¿es un sistema de coordenadas? De ser así, ¿qué representan estas? ¿Qué representan los caminos dibujados sobre la cuadrícula?

En el siglo xiv, el sabio parisino Nicole Oresme realizó un estudio de los cuerpos que se movían por el espacio. Alrededor del año 1350 publicó *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, una obra sobre la configuración de las cualidades en la que intentaba utilizar conceptos geométricos para representar «la extensión e intensidad de cualquier cualidad». La figura 9.2 muestra una página de una edición posterior de su obra que incluye sus dibujos en los márgenes.

Figura 9.2. Página del Tractus de Oresme con dibujos en los márgenes que explican las posibles variaciones de la distancia recorrida a lo largo de un período de tempo

Si interpretamos que estos diagramas representan la velocidad de un cuerpo en movimiento a lo largo del tiempo, donde las divisiones de la línea de base representan intervalos iguales de tiempo, entonces el área contenida en esas curvas representa distancias recorridas en un período de tiempo (velocidad × tiempo = distancia). El área parece representar una cantidad física, la distancia.

Serían estas pruebas con expresiones para representar conceptos e interacciones matemáticos las que terminaron por proporcionarnos el sistema de notación matemática que conocemos y usamos en la actualidad.

Capítulo 10

La Europa renacentista

Esta xilografía anónima de la Estrasburgo del siglo XV muestra a un mercader calculando cambio de moneda utilizando una mesa de cálculo. Dos burgueses curiosos discuten la transacción.

Con la aparición de Liber abaci de Fibonacci en 1202 surgió en Europa un nuevo tipo de libro matemático. Destinado a los mercaderes, este libro fomentaba el uso de los numerales indo-arábigos, trataba cuestiones concretas que resultaban de interés para los mercaderes y permitía que los cálculos se realizaran con lápiz y papel en vez de en la mesa de cálculo. Los nuevos libros matemáticos que siguieron al de Fibonacci se titularon en ocasiones Practica por su énfasis en las matemáticas prácticas y aplicadas. Al principio se traba de manuscritos; pero con la llegada de la imprenta se multiplicaron con rapidez y se hicieron muy populares. El primer libro de aritmética impreso, la Aritmética de Treviso, apareció en Italia en 1478 y recibe su nombre de la ciudad donde fue publicado. Hacía hincapié en las matemáticas necesarias para los mercaderes: cambio de divisas, cálculo de descuentos, creación de sociedades mercantiles y el interés generado por los préstamos de dinero. La primera aritmética publicada en Alemania apareció en 1482; en Francia y en España, en 1512; en Portugal, en 1519; y en Inglaterra, en 1537.

Así, entre los siglos XIII y XVI apareció en Europa una importante literatura sobre el uso de las matemáticas. Los problemas siguientes muestran cuáles eran las preocupaciones matemáticas de la época y también nos dicen algo sobre la vida cotidiana de entonces. En algunos de ellos pueden aparecer unidades monetarias, de distancia o de peso diversas y extrañas, las cuales pueden ser traducidas a unidades modernas si es necesario.

Problemas

1. Tenemos tres círculos tangentes mutuamente. El radio de uno de ellos es de 10 unidades, el radio del segundo es de 15 unidades y el radio del tercero se desconoce. Si los centros de los tres círculos se unen mediante líneas rectas, el área del triángulo resultante es de 340,74 unidades cuadradas. ¿Cuál es el radio del tercer círculo?

2. Encuentra dos números, x e y, cuya suma sea 10 y $x/y + y/x = 25$.

3. Un hombre se bebe un barril de vino en 14 días. Si se lo bebe junto a su mujer estará vacío en 10 días. ¿En cuántos días se

beberá el barril su mujer sola?

4. Tres hombres tienen una pila de monedas y la parte que le corresponde a cada uno es 1/2, 1/3 y 1/6. Cada uno coge algún dinero del montón hasta que no queda nada. El primer hombre devuelve entonces 1/2 de lo que había cogido, el segundo 1/3 y el tercero 1/6. Cuando el total de lo que han devuelto se divide a partes iguales entre ellos, resulta que cada uno recibe la parte que le correspondía originalmente. ¿Cuánto dinero había en el montón original y cuanto cogió cada uno?

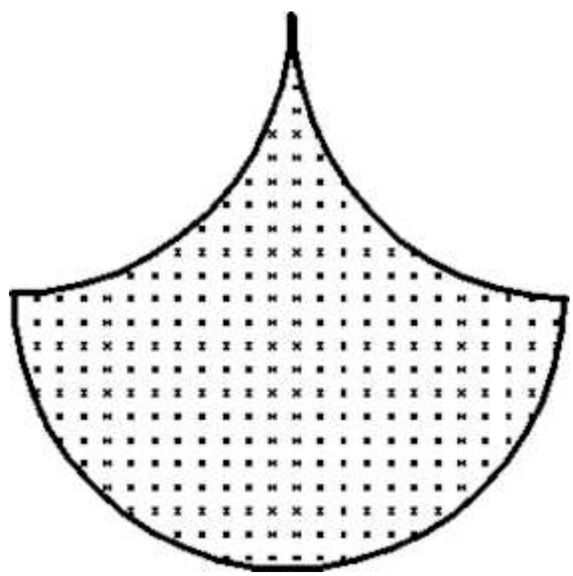
5. Dos mercaderes de vino entran en París, uno lleva 64 frascas de vino y el otro 20. Como no tienen suficiente dinero para pagar los derechos de aduana, el primero entrega 5 frascas de vino y 40 francos y el segundo paga con 2 frascas de vino y recibe 40 francos como cambio. ¿Cuál es el precio de cada frasca de vino y el impuesto de aduanas sobre ella?

6. El matemático francés Nicolas Chuquet afirmó (en 1484) que si tenemos los números positivos a, b, c y d, entonces $(a + b)/(c + d)$ se encuentra entre a/c y b/d. ¿Es correcto? Justifica tu respuesta.

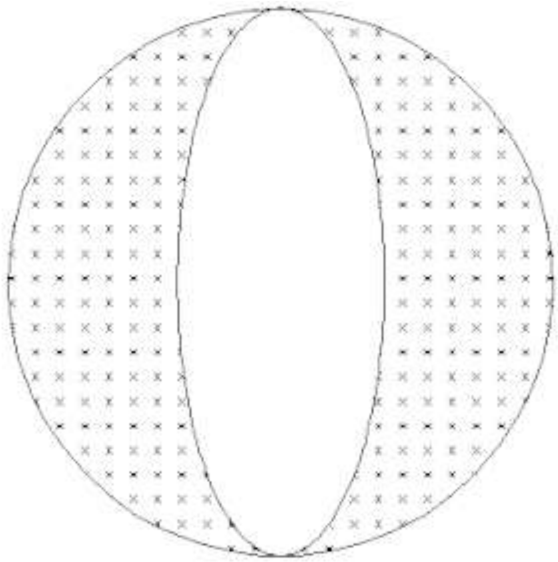
7. Un mercader compra 50.000 libras de pimienta en Portugal por 10.000 escudos y paga un impuesto de 500 escudos. Transporta la pimienta a Italia con un coste de 300 escudos y debe pagar otros 200 escudos de aduana y una tasa de importación de 100 escudos en esa ciudad. El siguiente transporte, hasta Florencia, le cuesta 100 escudos y en esa ciudad tiene que pagar unos derechos de importación de 100 escudos. Por último, el gobierno le exige a cada

mercader un impuesto de 1.000 escudos. Y claro, ahora duda sobre cuál será el precio que tendrá que cargar por cada libra de su pimienta de tal modo que, tras todos estos gastos, pueda conseguir un beneficio de 1/10 de escudo por cada libra.

8. Leonardo da Vinci propuso este problema y el siguiente en 1505. Tenemos un péndulo como el que se ve debajo. La altura del mismo es de 2 unidades y su anchura horizontal de 2 unidades. ¿Cuál es el área del péndulo?



9. Dado el ojo de gato de debajo, si el radio del ojo viene dado por R, ¿cuál será el área de la pupila?



10. Si le diera 7 peniques a cada mendigo que hay en mi puerta, me quedarían 24 peniques en la bolsa. Me faltan 32 peniques para ser capaz de darle 9 peniques a cada uno. ¿Cuántos mendigos hay y cuánto dinero tengo?

11. Para animar a su hijo a estudiar aritmética, un padre decidió pagarle 8 peniques por cada problema que resolviera correctamente y cobrarle 5 peniques por cada solución incorrecta. Después de que el hijo terminara 26 problemas ninguno le debía al otro. ¿Cuántos problemas resolvió el hijo correctamente?

12. Tenemos un número que cuando se divide por 2, o 3, o 4, o 5, o 6 el resto siempre es 1 y es divisible por 7. Se quiere saber cuál es el número.

13. Un hombre tiene 12 pescados y otro tiene 13, y todos los pescados tienen el mismo precio. Al primer hombre un agente de aduanas le quita 1 pescado y 12 denarios a modo de pago. Y al otro

le quita 2 pescados y le devuelve 7 denarios. Calcula la tasa de la aduana y el precio de cada pescado.

14. Tenemos un triángulo rectángulo donde la perpendicular es 5 y la suma de la base y la hipotenusa es 25. Calcula la longitud de la base y de la hipotenusa.

15. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa es 9,434 y la suma de los lados en torno al ángulo recto es 13. Halla las longitudes de los lados en torno al ángulo recto.

16. El cuadrado de un cierto número multiplicado por sí mismo y por 200 es 446.976. ¿Cuál es el número?

17. Cien hombres asediados en un castillo tienen suficiente comida para que a cada hombre le toque un peso de 14 lotes de pan al día durante 10 meses. Siete meses y 20 días después, se avisa a los hombres de que el castillo no podrá recibir ayuda durante otros 4 meses. ¿Cuánto pan debería serle asignado a cada hombre si consideramos que cada mes tiene 30 días?

18. Un esclavo huye de Milán a Nápoles y recorre 1/10 de la distancia cada día. Al comenzar el tercer día, su amo envía a otro esclavo tras él y este recorre 1/7 de la distancia cada día. Desconozco cuál es la distancia entre Milán y Nápoles, pero deseo saber cuándo lo capturan.

19. Cuatro hombres con denarios se encuentran una bolsa con denarios. El primer hombre dice que si tuviera los denarios de la bolsa entonces tendría el doble que el segundo hombre; el segundo, que si tuviera la bolsa, entonces tendría tres veces más que el

tercero; el tercero, que si la tuviera, entonces tendría cuatro veces más que el cuarto; y el cuarto dice que tendría cinco veces más que el primero. Se desea saber cuántos denarios tiene cada uno.

20. El siguiente es una variación de uno de los problemas de Alcuino de York (c. 800) y el antepasado del problema del «jeep en el desierto»: un caballero ordenó que se trasladaran 90 medidas de grano desde su casa hasta otra, alejada 30 leuca. Un camello se encargaría del transporte, llevando 30 medidas cada día. El camello se come una medida por cada leuca. ¿Cómo puede transportarse el grano? ¿Cuánto grano llegará a la segunda casa?

21. Dos hombres poseen una cierta cantidad de dinero. El primero le dice al segundo: «Si me das 5 denarios tendré 7 veces más de lo que te queda». El segundo le dice al primero: «Si me das 7 denarios, tendré 5 veces más de lo que te queda». ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

22. Un hombre va a un pañero y le compra una tela de 35 braccia de longitud para hacer una serie de trajes. El pañero le dice que cuando encoja y se corte, la tela perderá 1 braccio por cada 7 braccia. El hombre se fía de su palabra, pero en realidad la tela encogió 1 braccio por cada 6 braccia. ¿Cuánta tela le falta al hombre?

23. Un hombre tiene cuatro acreedores. Al primero le debe 624 ducados; al segundo, 546; al tercero, 492; y al cuarto, 368. Resulta que el hombre se convirtió en moroso y escapó, encontrando los acreedores que sus bienes sumaban un total de 830 ducados. ¿En

qué porcentaje deben dividirlos y cuál será la parte de cada uno?

24. Un ratón está subido en lo alto de un álamo de 60 braccia de altura mientras un gato espera a sus pies en el suelo. El ratón desciende 1/2 braccio al día y por la noche retrocede 1/6 braccio. El gato trepa 1 braccio al día y cada noche retrocede 1/4 de braccio. El árbol crece 1/4 de braccio entre el ratón y el gato cada día y se encoge 1/8 de braccio cada noche. ¿En cuántos días alcanzará el gato al ratón, cuánto habrá crecido el árbol mientras tanto y cuánto habrá trepado el gato?

25. Quiero encontrar tres números de tal modo que el primero y el segundo con la mitad del tercero sumen 20, y el segundo y el tercero con un tercio del primero sumen 20, y que el tercero más el primero y un cuarto del segundo sumen también 20.

26. Hay dos hombres, de los cuales el primero tiene tres pequeñas hogazas de pan y el segundo dos. Caminan hasta un arroyo, donde se sientan y comen; un soldado se une a ellos y comparten el almuerzo, comiendo cada uno de ellos la misma cantidad. Una vez comido el pan, el soldado se marcha dejando 5 besantes como pago por su almuerzo. El primer hombre acepta 3 de los besantes, puesto que tenía tres hogazas; el otro coge los restantes 2 besantes por sus dos hogazas. ¿Es justa esta división?

27. Un león se puede comer a una oveja en 4 horas; un leopardo puede hacerlo en 5 horas; y un oso en 6 horas. ¿Cuántas horas tardarían los tres animales en comerse a la oveja si la lanzaran en medio de ellos?

28. Supón que te digo que he comprado azafrán en Siena a 18 liras la libra y que lo he llevado a Venecia, donde me encontré con que 10 onzas de peso en Siena equivalen a 12 onzas de Venecia, y que 10 liras de dinero de Siena equivalen a 8 liras venecianas. Vendo el azafrán por 14 liras de dinero veneciano la libra. Te pregunto cuánto he ganado en porcentaje. [1 libra = 16 onzas.]

29. Supón que tienes dos tipos de vino. Una medida del de peor calidad cuesta 6 denarios. Una del de mejor calidad vale 13 denarios. Quiero una medida de vino que valga 8 denarios. ¿Qué cantidad de cada vino debo poner en la mezcla?

30. Un hombre que hacía negocios en Lucca dobló su dinero allí y se gastó 12 denarios. Después fue a Florencia, donde también dobló su dinero y se gastó 12 denarios. De regreso a Pisa dobló su dinero y se gastó 12 denarios, con lo que no le quedó nada. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

31. Un hombre visitó tres ferias llevando con él 10 1/2 denarios. En cada feria dobló su dinero y gastó cierta cantidad —la misma— en cada feria. Regresó a casa sin dinero. ¿Cuánto se gastó en las ferias?

32. Un hombre invirtió 1 denario con interés, con una tasa que hizo que en 5 años tuviera 2 denarios y que 5 años después el dinero se doblara. Te pregunto cuántos denarios ganaría en 100 años con su denario.

33. Si 1.000 libras de pimienta valen 80 ducados, 16 grossi y 1/4, ¿cuánto costarán 9.917 1/2 libras? [1 ducado = 24 grossi].

34. Tres hombres con denarios se encontraron una bolsa con 23 denarios. El primer hombre le dijo al segundo: «Si me quedara con la bolsa, tendría el doble que tú»; el segundo le dijo al tercero: «Si me quedara con la bolsa tendría tres veces más que tú»; y el tercero le dijo al primero: «Si me quedara con la bolsa tendría cuatro veces más que tú». ¿Cuánto tenía cada uno?

35. Tres hombres —Tomasso, Domenego y Nicolo— se asociaron. Tomasso puso 760 ducados el primer día de enero de 1472 y el primer día de abril cogió 200 ducados. Domenego puso 616 ducados el primer día de febrero de 1472 y el primer día de junio cogió 96 ducados. Nicolo puso 892 ducados el primer día de febrero de 1472 y el primer día de marzo sacó 252 ducados. El primer día de enero de 1475 se encontraron con que habían ganado 3.160 ducados, 13 1/2 grossi. Calcula la parte de cada uno de tal modo que ninguno acabe engañado.

36. Un mercader le da a una universidad 2.814 ducados, quedando entendido que se le devolverían 618 ducados al año durante nueve años, al final de los cuales se considerarían pagados los 2.814 ducados. ¿Cuál es el interés compuesto que está consiguiendo por su dinero?

37. Un hombre compra varias balas de lana en Londres, cada una de las cuales pesa 200 libras (medida inglesa) y le cuesta 24 florines. Envía la lana a Florencia y paga el carro y otros gastos que suman la cantidad de 10 florines por bala. Desea vender la lana en Florencia a un precio que le permita conseguir un 20% de beneficio

sobre su inversión. ¿Cuánto tiene que cobrar por hundredweight si 100 libras londinenses equivalen a 133 libras florentinas?

38. Dos hombres alquilan un pasto por 100 liras, sobrentendiéndose que dos vacas se considerarán equivalentes a tres ovejas. El primero introduce en el campo 60 vacas y 85 ovejas; el segundo, 80 vacas y 100 ovejas. ¿Cuánto debe pagar cada uno de ellos?

39. Un mercader debe 500 libras, que devolverá en pagos de 300 libras en cuatro meses, 200 libras a seis meses y 100 libras a 12 meses. El deudor accede que salde la deuda en un solo pago. La cuestión es en qué momento ha de hacerse el pago sin perjuicio ni para el deudor ni para el acreedor. El acreedor recibe un 6% por año.

40. Un triángulo tiene un lado que mide 20 unidades y la altura desde ese lado es 6 unidades; los restantes lados se desconocen, pero uno mide el doble que el otro. ¿Cuánto miden los lados desconocidos del triángulo?

41. Tenemos tres círculos mutuamente tangentes y con diferentes radios; si el área del triángulo formado al conectar sus centros es de 367,424 unidades cuadradas y los radios de dos de los círculos se sabe que miden 10 y 15 unidades, ¿cuál es el radio del tercer círculo?

¿Qué están haciendo?

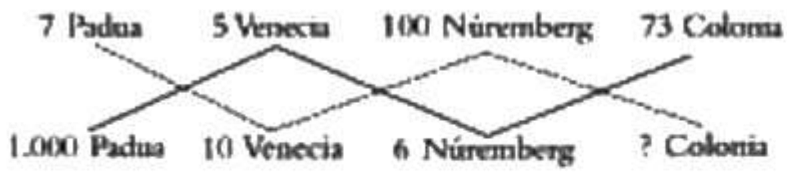
Cálculos de cambios monetarios

Una de las complejidades matemáticas a las que se enfrentaban los mercaderes de la Edad Media y comienzos del Renacimiento era el cambio de moneda. Con la caída del Imperio romano, el poder y la consistencia de una agencia monetaria central desaparecieron. Sin dinero, el comercio se realizaba en gran parte mediante trueque. Durante su reinado, Carlomagno (768-814) introdujo un sistema monetario basado en una libra de plata como unidad de cambio estándar. Una libra se dividía en 20 chelines o 240 peniques. Esta unidad monetaria, la libra, se sigue utilizando hoy día en diversos países del mundo. El Imperio árabe desarrolló un sistema monetario basado en el oro, acuñando el dírham o dinar. Con el tiempo, muchas ciudades comerciales italianas desarrollaron sus propias cecas y sistemas de moneda. Uno de los más respetados era el de la ciudad de Venecia, que funcionaba basado en el ducado de oro. No obstante, la multitud de monedas existentes con diferentes leyes y valores generaba preocupación entre los mercaderes y dio lugar a unas técnicas muy específicas para el cambio.

La xilografía del libro de aritmética alemán del siglo XV de la figura 10.1, que ilustra un cambio de moneda, era el preludio a una serie de problemas que trataban las cuestiones propias de estas transacciones. Un ejemplo típico de estos problemas es el siguiente:

> *7 libras en Padua son 5 libras en Venecia; 10 libras en Venecia son 6 libras en Núremberg; y 100 libras en Núremberg son 73 libras en Colonia. ¿Cuántas libras son en Colonia 1.000 libras de Padua?*

La solución se alcanzaba mediante un proceso llamado regula del chatanina, la «regla de la cadena», que se realiza con ayuda del siguiente esquema gráfico:



Así, 1.000 libras en Padua se ven reducidas a 312 6/7 libras en Colonia.

Figura 10.1. Cambio de moneda como la representaba una xilografía para la edición de 1500 de la Aritmética de Johannes Widmann.

Fueron los mercaderes italianos quienes dominaron inicialmente el nuevo y creciente comercio europeo, utilizando nuevas técnicas de calcular y la numeración indo-arábiga como ayuda para resolver problemas comerciales. Técnicas específicas, como la mencionada más arriba, recibieron nombres italianos. Además, gran parte del vocabulario mercantil nació de frases y palabras italianas. En italiano, una mesa sobre la que se realizaban cálculos y se cambiaba dinero es un banco, de donde procede la palabra española. Cuando se descubría que un cambista era corrupto su mesa era rota, físicamente, de ahí bancoruptus, es decir, «bancarrota». Del mismo modo, la expresión «endosar» procede del italiano endorso, «firmar en el dorso», puesto que las letras de cambio, que también aparecieron en esta época, tenían que verificarse con una firma.

En el siglo XVIII, cuando Estados Unidos comenzó a existir, se encontraron con problemas similares. Cada una de las trece colonias poseía su propio sistema monetario y el intercambio de fondos entre ellas suponía un problema. El Congreso estadounidense estableció el sistema monetario federal en 1786. Era un sistema decimal, tal y como se explica en el texto de la figura 10.2, extraída de *The scholar's arithmetic* o *Federal accountant* (Adams 1821, 80).

The denominations are in a *decimal proportion*, as exhibited in the following

TABLE.

10 Mills	make one	Cent,
10 Cents		Dime,
10 Dimes		Dollar, *marked thus*, \$
10 Dollars		Eagle.

The expression of any sum in Federal Money is simply the expression of a *mixed number* in decimal fractions. A dollar is the *Unit Money*; dollars therefore must occupy the place of units, the less denominations, as dimes, cents, and mills, are decimal parts of a dollar, and may be distinguished from dollars in the same way as any other decimals by a comma or separatrix. All the figures to the left hand of dollars, or beyond units place are eagles. Thus, 17 eagles, 5 dollars, 3 dimes, 4 cents, and 6 mills are written—

1	Eagles; or, Hundreds.
7	or, Tens.
5,	Doll's; or, Units.
3	Dimes; or, Tenth parts.
4	Cents; or, Hundredth parts.
6	Mills; or, Thousandth parts.

Of these, four are real coins, and one is imaginary.

The real coins are the Eagle, a gold coin; the Dollar and the Dime, silver coins; and the Cent, a copper coin. The Mill is only imaginary, there being no piece of money of that denomination.

There are half eagles, half dollars, double dimes, half dimes, and half cents, real coins.

Figura 10.2. Tabla que muestra conversiones decimales para el sistema monetario estadounidense (1821)

Ayudados por tablas de cambio, los estudiantes de la época eran sometidos a problemas como el siguiente:

> *Cambia 46 libras 10 chelines 6 1/2 peniques en cada divisa a moneda federal.*
>
> *Respuesta: 155,09 \$ en moneda de Nueva Inglaterra; 116,317 \$ en moneda de Nueva York; 124,072 \$ en moneda de Pensilvania.*

Nótese que, en la respuesta, los decimales están señalados por comas y no por puntos, como sucede en la actualidad en el mundo anglosajón.

Los problemas de conversión de moneda en los libros de aritmética norteamericanos del siglo XIX se veían complicados aún más por el hecho de que Estados Unidos se estaba transformando en una potencia comercial internacional. Los problemas de conversión relacionados con el comercio también tenían que considerar el valor de las monedas extranjeras, sobre todo las acuñadas en oro y plata. Una vez más, a modo de referencia, a los alumnos se les proporcionaban tablas de conversión. La tabla de conversión de monedas extranjeras de plata de la figura 10.3 está sacada de *The columbian calculator* de 1845 (Ticknor 1845, 161).

A TABLE OF FOREIGN COINS, &c.—Showing their value in the United States as established by acts of Congress—not given in the preceding tables:—

SILVER.	D.	c.	m.
English or French Crown - - - -	1	10	0
Dollar of Spain, Sweden, and Denmark - -	1	00	0
Dollar of Mexico and S. A. S. - - -	1	00	0
Five-franc Piece - - - - - - -	0	93	6
Franc - - - - - - - - -	0	18	8
Pistareen - - - - - - - -	0	20	0
Pound of Ireland - - - - - -	4	10	0
Pagoda of India - - - - - -	1	94	0
Tale of China - - - - - -	1	48	0
Millrea of Portugal - - - - - -	1	28	0
Ruble of Russia - - - - - -	0	66	0
Rupee of Bengal - - - - - -	0	55	5
Guilder of the United Netherlands - - -	0	39	0
Mark-Banco of Hamburg - - - -	0	35	5
Livre of Francois . - - - - -	0	18	5
Gold Ducat of Russia - - - - -	2	00	0

Capítulo 11
Problemas de los templos japoneses

Ilustración para el problema de la venta de aceite (número 16, más abajo), según aparece en el Jinkoki (1643).

Los libros de matemáticas utilizados en el Japón antiguo eran clásicos chinos importados, como el Jiuzhang suanshu. No obstante, en el siglo xvii comenzaron a aparecer en el país problemas relacionados con cuestiones relevantes para los japoneses; sucedió durante el período Edo (1603-1867), cuando el país se retrajo a un estado de aislacionismo impuesto por sus emperadores. Durante este período, que vino acompañado por una introspección cultural paralela, el matemático Yoshida Koyu publicó una colección de 12 problemas-desafío sin incluir la respuesta. Hubo lectores que los resolvieron para, seguidamente, proponer sus propios desafíos. Y así fue como nació la moda de proponer y resolver problemas, basados principalmente en soluciones de configuraciones geométricas complejas y situaciones que implicaban círculos, elipses y otras curvas geométricas comunes. Estos problemas, llamados sangaku, eran resueltos por personas de todas las clases sociales que, orgullosas de su éxito, escribían sus soluciones y sus problemas en tablillas de madera que luego colgaban en los templos budistas locales o en santuarios sintoístas. Los problemas comenzaron a conocerse como «problemas del templo». Son colecciones de expresiones matemáticas que resultan un testimonio del clima de creatividad matemática y del ingenio para la resolución de problemas que existía en el Japón de la época.

Problemas

1. Tenemos un círculo dentro del cual se recorta un cuadrado; la parte restante tiene una superficie de 47,6255 unidades cuadradas. Si el diámetro del círculo tiene siete veces más unidades que la raíz cuadrada del lado del cuadrado, se pide encontrar el diámetro del círculo y el lado del cuadrado.

2. Un castillo tiene n habitaciones, en cada una de las cuales viven 7 samuráis. Su número total, 7n, deja un resto de 9 y 15 cuando es dividido entre 25 y 36, respectivamente. Encuentra el valor mínimo posible para n.

3. Un día de verano, un chico estaba cogiendo flores de cerezo bajo un árbol. Cerca se encontraba un poeta leyendo sus obras en voz alta. Mientras él leía, el chico contaba las flores, una flor por cada

palabra de un poema. Tras varios poemas (haiku), cada uno con 17 palabras, al chico le quedaban 3 flores; después de varios poemas de 28 palabras, al chico le quedaban 5 flores; después de varios poemas de 31 palabras, le quedaban 8 flores. ¿Cuál es el número mínimo de flores que recogió el chico?

4. El precio de compra de una manzana y una naranja es de 100 yenes. Si compramos n naranjas y n + 3 manzanas, el precio es de 520 yenes. Encuentra el número, n, de naranjas y el precio de una naranja.

5. Un chico le da 11 monedas del mismo valor a un hombre, y el hombre se da cuenta de que su valor total en yenes es su edad menos 4. El chico le da al hombre 9 monedas del mismo valor, diferentes de las primeras, y el hombre se da cuenta de que su valor total en yenes es su edad menos 5. ¿Cuál es la edad del hombre?

6. Un grupo de cuatro círculos congruentes cuyos centros forman un cuadrado están inscritos en un triángulo ABC, donde C es un ángulo recto y una de las esquinas del cuadrado. Encuentra su radio (r) en función de los lados (a, b y c) del triángulo.

7. El círculo inscrito $O(r)$ del triángulo ABC toca AB en D, BC en E y AC en F. Encuentra r en función de AD, BE y CF.

8. El círculo $O(r)$ está inscrito en un trapezoide isósceles $ABCD$, donde $AB = CD$ y $AD = BC$. Demuestra que $4r = (AB)(CD)$.

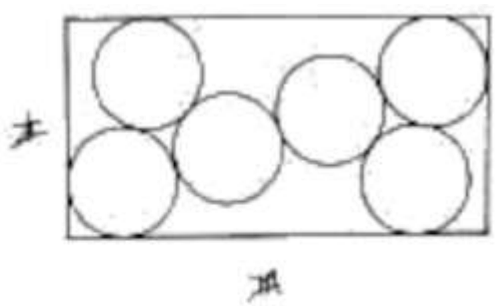
9. Un conjunto de n círculos disjuntos y congruentes $Oi(r)$ (i = 1,2,..., n) cubre la superficie de una esfera S, de tal modo que cada región de la superficie exterior de los círculos está limitada por

arcos de tres de los círculos. Calcula los posibles valores del número n de círculos, y en cada caso expresa r en términos del radio de S.

10. Tenemos un pentágono regular. La longitud de su lado es a. Halla el área del pentágono. Generaliza tu resultado para un nonágono.

11. Tenemos dos círculos: O_1 con radio r_1 y O_2 con radio r_2, donde $r_1 > r_2$. Son tangentes uno con respecto al otro y mutuamente tangentes a una línea común. Si O_1 es tangente a la línea en el punto A y O_2 tangente a la misma en el punto B, demuestra que $(AB)^2 = 4r_1r_2$.

12. En la figura de debajo, si el radio de cada círculo inscrito es 1, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo que los delimita?



13. Tenemos el triángulo rectángulo ABC, donde C es el ángulo recto, y la elipse O (a, b) se inscribe en su interior con su eje mayor paralelo a BC. Calcula el eje semimayor a, en función de AC, BC y b.

14. Tenemos un tronco de 18 pies de largo, el diámetro de cuyos extremos es 1 pie y 2,6 pies, respectivamente. Una cuerda de 75 pies de largo rodea el tronco en espiral, con cada giro de la misma

separado 2,5 pies. ¿Cuántas veces rodea la cuerda el tronco?

15. Tenemos un montículo de tierra con forma de frustum de cono. Las circunferencias de las bases son 40 medidas y 120 medidas, y el montículo tiene 6 medidas de altura. Si de la parte superior se quitan de manera uniforme 1.200 medidas cúbicas de tierra, ¿cuál será la altura restante?

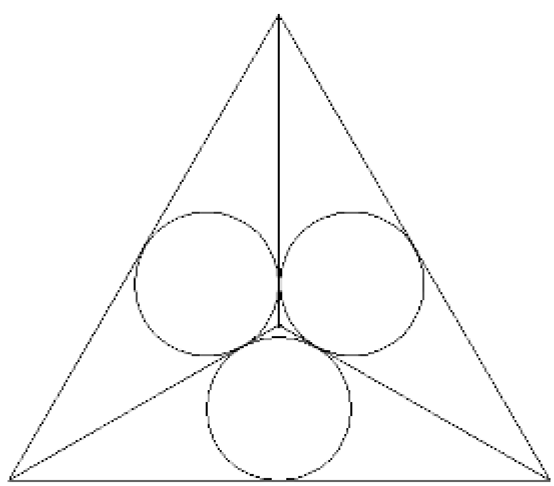
16. Un vendedor ambulante de aceite para cocinar está trabajando. Un día, de camino a casa un cliente le pide 5 sho de aceite; pero el vendedor tiene 10 sho de aceite en su recipiente y ningún medio para medir el aceite excepto dos damajuanas vacías, una con una capacidad de 3 sho y la otra de 7 sho. ¿Cómo hace el vendedor ambulante de aceite para medir 5 sho para el cliente?

17. El 1 de enero aparecen en la casa un par de ratones, que paren 6 ratones machos y 6 hembras. A finales de enero, hay 14 ratones, 7 machos y 7 hembras. El 1 de febrero, cada una de estas siete parejas tiene 6 machos y 6 hembras de ratón, de tal modo que a finales de febrero hay 98 ratones, en 49 parejas. A partir de entonces, cada pareja de ratones tiene seis pares más cada mes.

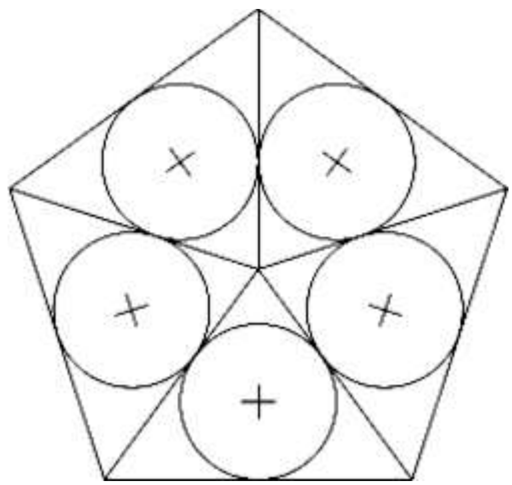
a) Calcula el número de ratones que habrá a finales de diciembre.

b) Si asumimos que la longitud de cada ratón es de 12 cm, si alineáramos a todos los ratones mordiendo cada uno la cola del que tiene delante, ¿qué longitud tendría la línea de ratones?

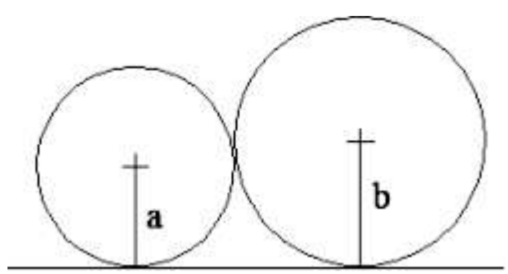
18. Tenemos un triángulo equilátero cuyos lados son 1 unidad. Dibuja tres líneas hasta el centro para construir tres triángulos iguales y, dentro de ellos inscribe un círculo, como se muestra en la figura. Demuestra que el diámetro del círculo es aproximadamente 0,26794.



19. Tenemos un pentágono cuyos lados miden 1 unidad. Traza líneas desde los vértices hasta el centro para crear cinco triángulos y dentro de cada uno de ellos inscribe un círculo, como se muestra en la figura. Demuestra que el diámetro de los círculos es aproximadamente 0,50952.



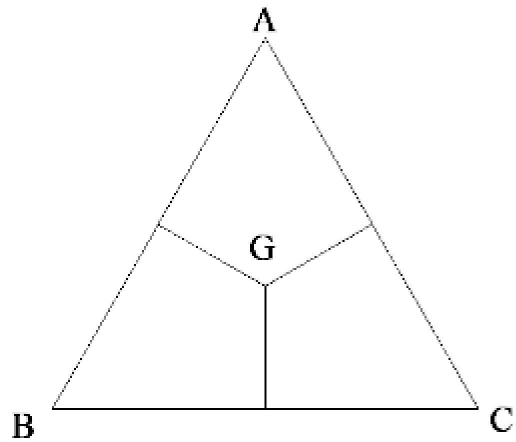
20. Tenemos dos círculos con radios a y b, respectivamente, que son tangentes a la misma línea así como el uno al otro; los puntos donde tocan la línea son D y E. Demuestra que $DE = 2\sqrt{ab}$.



21. Una noche, unos ladrones robaron un rollo de tela de un cobertizo. Estaban dividiendo la tela bajo un puente cuando un

transeúnte escuchó esta conversación: «Si cada uno de nosotros recibe 7 tan, entonces sobran 8 tan; pero si cada uno de nosotros intenta llevarse 8 tan entonces nos faltan 7 tan». ¿Cuántos ladrones había y cómo era de larga la tela?

22. Tal y como se muestra en la figura, dividimos un triángulo equilátero ABC en tres cuadriláteros con la misma área. Si el triángulo tiene lados de longitud 14 y G es el centro del triángulo, halla el área de ABC y la longitud del lado pequeño de los cuadriláteros.



23. Los funcionarios A y B trabajan en la oficina de la ciudad. El funcionario A va a trabajar cada duodécimo día y el funcionario B lo hace cada decimoquinto día. Hoy se encuentran en la oficina. ¿Cuántos días pasarán antes de su próxima reunión?

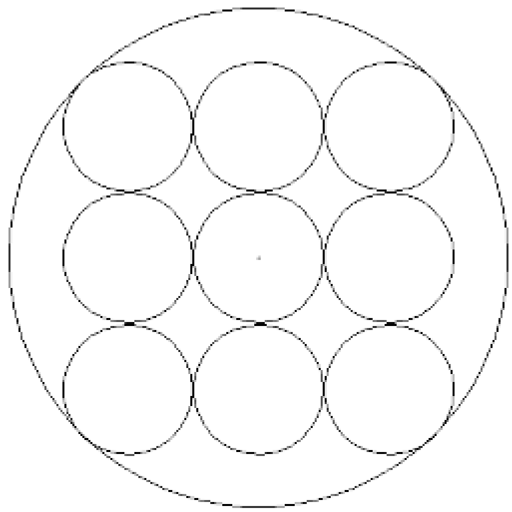
24. Un círculo de radio R está inscrito dentro de un triángulo isósceles cuyos lados miden 12 y la base 10. Encuentra la longitud de R.

25. El tallo de un melón crece 7 sun al día. Una enredadera crece 10 sun al día. El mismo día, el tallo del melón empieza a crecer hacia abajo desde un punto de un acantilado que está a 90 sun de altura y la enredadera trepa por él desde el fondo. ¿Después de cuántos días se encuentran las dos plantas?

26. Dos caminos circulares A y B son tangentes el uno al otro en el punto P. El camino A tiene una circunferencia de 48 km y el camino B de 32 km. Una vaca y un caballo comienzan a caminar desde el punto P a lo largo de los caminos A y B, respectivamente. La vaca camina 8 km al día y el caballo 12 km al día. ¿Cuántos días después se encontrarán la vaca y el caballo en el punto P?

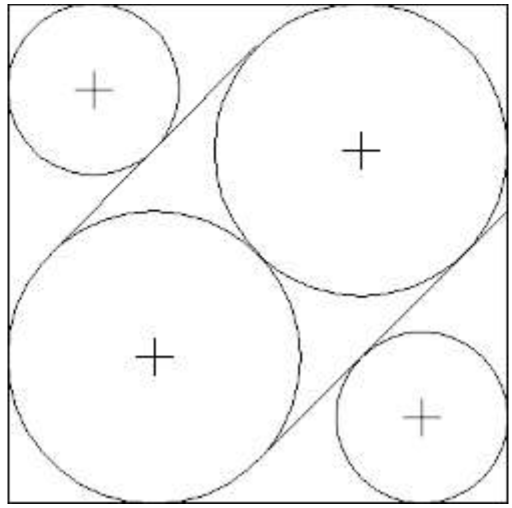
27. Nueve círculos de radio r pueden meterse dentro de un círculo

de radio R. Expresa r en función de R.



28. Tenemos un campo con forma de rosquilla. La circunferencia exterior es de 120 ken y la interior de 84 ken. En medio del campo se alza una casa, de modo que no podemos medir su diámetro, pero la distancia entre las dos circunferencias es de 6 ken. Calcula el área del campo sin utilizar π.

29. Dos círculos de radio *r* están inscritos en un cuadrado y se tocan en el centro del mismo. Cada uno de dos círculos más pequeños con radio t toca dos lados del cuadrado, así como la tangente común entre los dos círculos mayores. Encuentra *t* en función de *r*.



30. Tenemos 225,36 koku de arroz. El gobierno quiere distribuirlo a cinco tipos de hogares. Cada hogar de segunda categoría recibe 0,8 de la cantidad de cada uno de los 4 hogares de primera categoría. Cada hogar de tercera categoría recibe 0,8 veces tanto arroz como cada uno de los 8 hogares de segunda categoría. Cada uno de los hogares de cuarta categoría recibe 0,8 veces tanto arroz como cada uno de los 15 hogares de tercera categoría. Cada uno de los 120 hogares de quinta categoría recibe 0,8 veces la cantidad de arroz dada a cada uno de los 41 hogares de cuarta categoría. ¿Cuánto arroz reciben cada hogar y cada categoría?

31. Un número de visitantes, N, visita un templo. Solo sabemos que:

7/9 de N es un número entero cuyos dos últimos dígitos son 68.

5/8 de N es un número entero cuyos dos últimos dígitos son 60.

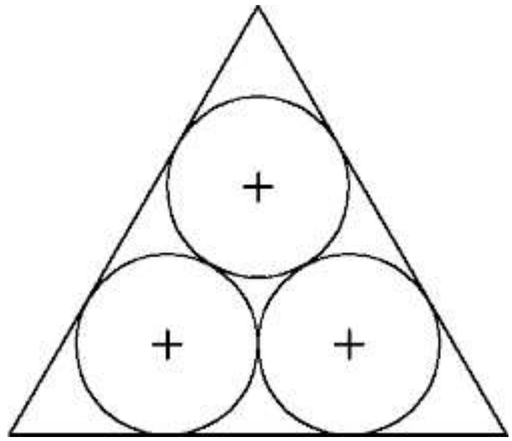
Encuentra el valor más pequeño para N que satisfaga estas características.

32. Dos cañas de la misma altura sobresalen 3 syaku del agua de un estanque. Si torcemos la punta de una caña 9 syaku en

dirección a la orilla, la punta toca la superficie del agua. Calcula la profundidad del estanque.

33. Utilizando los números 1, 2 y 3 tres veces cada uno, crea un cuadrado mágico en el cual la suma de cada columna, fila y diagonal sume 6.

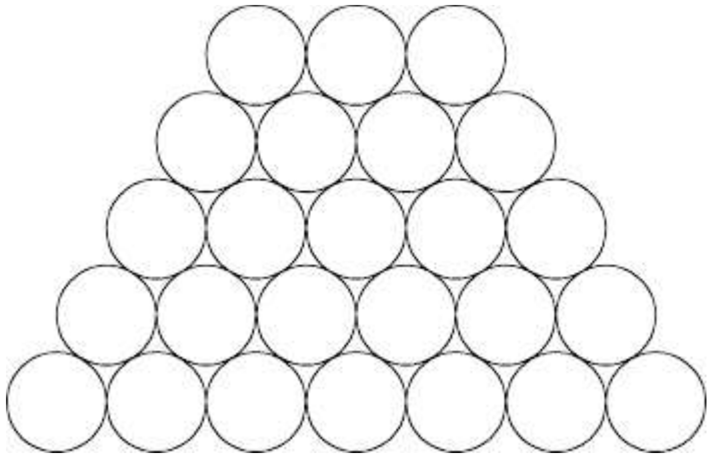
34. Un círculo de radio r inscribe tres círculos de radio t, el centro de los cuales forma un triángulo equilátero de lado $2t$. Calcula t en función de r.



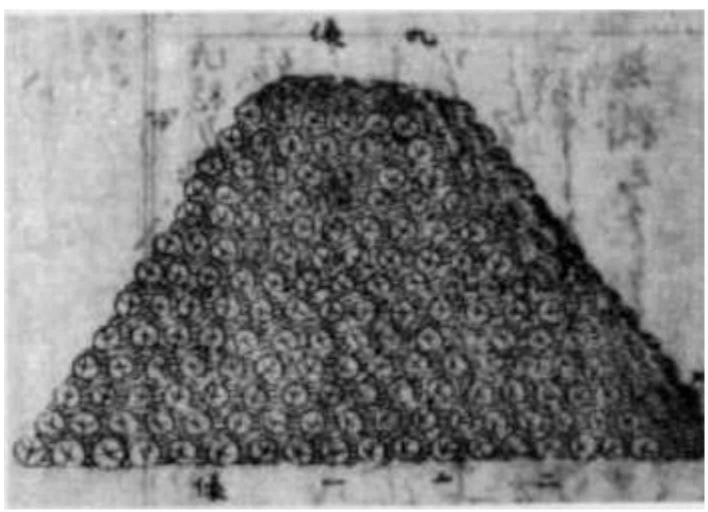
35. Un chico ahorra dinero como sigue: el primer día ahorra 1 mon, el segundo día ahorra 2 mon y el tercer día ahorra 22 = 4 mon. ¿Cuánto dinero ahorrará al cabo de 30 días?

36. Han robado un caballo. El dueño lo descubre y comienza a perseguir al ladrón, que ya ha recorrido 37 ri. Después de que el dueño recorra 145 ri, sabe que el ladrón todavía le lleva una ventaja de 23 ri. ¿Después de recorrer cuántos ri más alcanzará el dueño al ladrón?

37. Un número de bolas idénticas está apilado en un trapecio como vemos debajo, en el cual la base contiene siete bolas y la cima contiene tres bolas. ¿Cuál es el número total de bolas?



38. Mira la imagen que aparece a continuación y determina cuántos barriles hay en el montón. No te limites a contarlos. ¡Utiliza tus conocimientos de matemáticas!



¿Qué están haciendo?

Encontrar los números que faltan en los problemas japoneses

La figura 11.1 representa un problema en el cual se pide que se encuentre el número que falta de un «papel comido por los gusanos». Los problemas con esta forma, que suelen aparecer en las matemáticas tradicionales japonesas, se llaman mushikuisan. Intenta algunos problemas de este tipo eligiendo dígitos del grupo de los enteros {0, 1, 2,..., 9} para realizar afirmaciones matemáticamente correctas a partir de los ejercicios:

El área de un rectángulo cuyos lados miden 253 cm y [ ] [ ] cm es de [ ] [ ] [ ] 39 cm^2.

En un concurso de arquería se obtienen [ ] [ ] 3 aciertos al disparar 364 flechas, con un porcentaje de aciertos de 0, [ ] [ ].

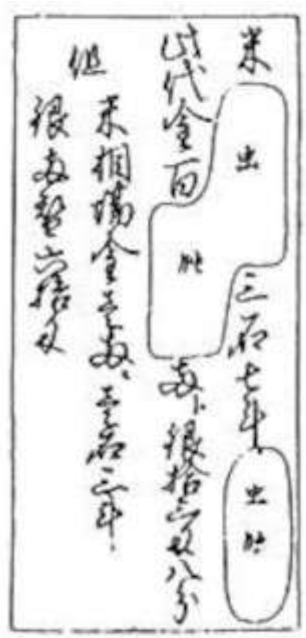


Figura 11.1. «Encuentra los números que faltan», un ejercicio matemático tradicional japonés

Capítulo 12

The Ladies Diary (1704-1841)

La cubierta de la edición de 1709 de The Ladies Diary, donde se ve el retrato de la reina Ana. Se buscó conseguir su real patronazgo, pero no se consiguió.

The Ladies Diary era una revista bastante popular que se publicó en Inglaterra con carácter anual durante los siglos XVIII y XIX. En un principio estuvo destinada solo a lectoras femeninas, pero no tardó en conseguir popularidad entre el público en general. En el cénit de su popularidad vendía 30.000 copias al año. Era una especie de revista científica de su época. Una de las características del Diary era una serie de desafíos matemáticos que habían de ser resueltos por los lectores. Las respuestas y soluciones de los problemas aparecían en el número siguiente. La revista ayudó a promocionar la resolución de problemas matemáticos entre la clase media inglesa. Algunas recopilaciones de sus problemas y soluciones matemáticas fueron publicadas después de forma independiente. Cuando en 1804 se publicó la primera revista matemática estadounidense, el *Mathematical Correspondent*, imitó a The Ladies Diary haciendo hincapié en la resolución de problemas. A continuación se presenta una selección de los problemas publicados en la revista inglesa.

Problemas

1. Se me contrató para que midiera un campo, que se me dijo que era un cuadrado geométricamente perfecto, pero por causa de un río que lo atravesaba solo pude realizar mediciones parciales. Medí 9 yardas desde la esquina oeste a lo largo del lado sur. Seguidamente, apuntando a la esquina noreste, medí 18 yardas a lo largo de esta línea antes de girar y medir hacia la esquina sureste, que encontré a un ángulo de 28º 30’ con respecto al camino que seguí en la medición previa. A partir de estas medidas, determina el área del campo.

2. Un hombre alquila un caballo en Londres por 3 peniques la milla. Cabalga 94 millas en dirección oeste hasta Bristol y luego en dirección norte hasta Chester, desde donde regresa hacia Londres recorriendo 66 millas, lo que lo sitúa en Coventry. Desde Coventry se desvía hacia Bristol, desde donde se dirige finalmente a Londres. ¿Cuánto debe del alquiler del caballo si tenemos en cuenta que el

camino de Coventry a Bristol se encuentra en ángulo recto con el camino que va de Chester a Londres?

3. Siete hombres tienen partes iguales de una piedra de moler de 5 pies de diámetro y se ponen de acuerdo en que cada uno ha de usarla hasta que haya desgastado su parte. ¿Qué parte de la rueda debe desgastar cada uno?

4. Demuestra que si las sumas de los cuadrados de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero son iguales, sus diagonales se intersecan en ángulos rectos.

5. Si tienes h pies de altura y caminas dando la vuelta a la Tierra manteniéndote sobre la misma circunferencia, ¿cuánto más ha recorrido tu cabeza que tus pies cuando completas el recorrido?

6. Estando en una habitación frente a una ventana, la parte inferior de la cual se encuentra justo a la altura de mis ojos, observo que, hasta el borde superior de la ventana, puedo ver 42 hileras de ladrillos en un muro del otro lado de la calle; pero si me muevo 5 yardas en dirección a la ventana puedo ver 72 hileras. Se pide la altura de la ventana, suponiendo que la anchura de la calle es de 12 yardas y 4 hileras de ladrillos tienen 1 pie de altura.

7. Dos círculos de 25 pies de radio se intersecan de tal modo que la distancia entre sus centros es de 30 pies. ¿Cuál es el lado del cuadrado mayor inscribible dentro de sus arcos intersecados?

8. Tenemos un jardín con forma de rombo cuyo lado es de 768,52 pies. Dentro del jardín hay inscrito un parterre de flores cuadrado cuyo lado es de 396 pies. ¿Cuál es el área del jardín?

9. Un general que ha servido con éxito a su rey en sus batallas pide una recompensa por sus servicios: 1 farthing (cuarto de penique) por cada fila de 10 hombres que pueda hacer con un cuerpo de 100 hombres. El rey, creyendo que se trata de una muy modesta petición, accede de inmediato. ¿A cuánto ascenderá la suma?

10. Observas el borde de una nube a una altitud de 20° y el Sol sobre ella a 35°. La sombra proyectada por el borde de la nube cae sobre un objeto que sabes que se encuentra a 2.300 yardas de tu posición. ¿A qué altura está la nube?

11. Dado un semicírculo, extiende su diámetro una distancia arbitraria hasta el punto P y dibuja PC a un ángulo adecuado de tal modo que interseque el círculo en los puntos B y C. En B y C dibuja perpendiculares a PC y alárgalas hasta que corten el diámetro en D y E. Demuestra que si O es el centro del círculo, entonces DO = OE.

12. Dentro de un jardín rectangular hay un estanque redondo. Su centro es inaccesible; no obstante, sabes la distancia desde cada esquina hasta el centro del estanque: 60, 52, 28 y 40 yardas. ¿Cuál es el radio del estanque?

13. Un caballero tiene un jardín de forma rectangular y desea construir un camino de anchura uniforme que lo bordee, de tal modo que ocupe la mitad del jardín. ¿Cuál debe ser la anchura del camino? [Asume que el jardín tiene lados de longitudes a y b.]

14. Un agrimensor vago calculó la altura de una torre sin medir ningún ángulo del modo siguiente. A cierta distancia de la torre vio su parte superior en un ángulo que llamó α. Seguidamente dibujó el

complementario de α en una hoja de papel y caminó hacia delante hasta que vio la torre en un ángulo recto menos α. A continuación dibujó un ángulo el doble de α y caminó hacia delante en la misma línea recta hasta que vio la parte superior de la torre a 2α. Si la distancia entre la primera y la segunda medición es α y entre la segunda y la tercera b, demuestra que γ, la altura de la torre, viene dada por $\gamma^2 = (b + 3\alpha/2)/(b + 2\alpha)$.

15. Un caballero que deseaba saber cuánto le costaría ponerle una valla a un terreno trapezoidal a razón de seis peniques el poste, e incapaz de realizar el cálculo por sí mismo, recurrió a The Ladies Diary. Proporcionó los siguientes datos: la longitud de la base mayor equivale a 1.432 links; uno de los ángulos de la base es 34º 17’ y el otro 54º 18’; el área del campo es de 2,75 acres. ¿Cuánto costará ponerle una valla al terreno?

16. Un recipiente circular cuyos diámetros superior e inferior son 70 y 92, y cuya profundidad perpendicular es de 60 pulgadas, es elevado por un lado de tal modo que el otro queda perpendicular al horizonte. Se pide averiguar la cantidad de licor, en galones de cerveza británicos, que cubrirá el fondo con el recipiente en esta posición.

17. Un acertijo:

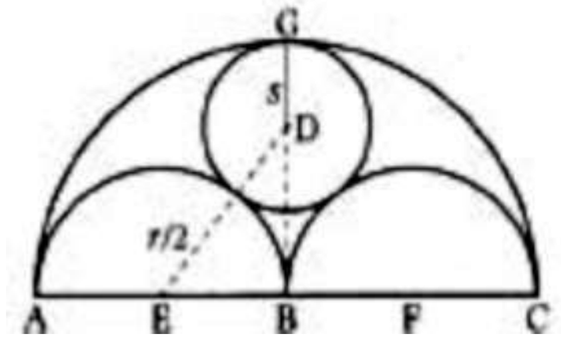
¡Rediós! Señoras, ¿qué soy?
Estoy lejos, pero cercana;
soy alta y baja, redonda, corta y larga,
soy muy débil y muy fuerte.

En ocasiones suave, en ocasiones enfurecida.
Ahora desagradable, ahora encantadora.
En ocasiones soy fea, en ocasiones guapa [...].
Soy muy sucia, muy limpia,
soy muy gorda y muy flaca,
soy muy gruesa y muy delgada,
puedo alzar una piedra, pero no un alfiler [...].[1]

18. El siguiente problema fue propuesto en 1838 y recibió muchas soluciones, incluida una de Lewis Carroll en 1894: En los lados del triángulo ABC se construyen los cuadrados *ABDE*, *BCFG* y *ACHL* exteriores al mismo. Construye el triángulo *ABC* teniendo en cuenta que *A'*, *B'* y *C'* son la intersección de *DE* y *HL*, *ED* y *FG*, *GF* y *LH* respectivamente.
19. Dados dos círculos que se tocan: uno con centro *O* y radio = r_1; el otro con centro *Q* y radio = r_2, y que la tangente común a ambos círculos es *PT*, demuestra que $PT^2 = 4r_1r_2$.
20. Una dama paga el doble por cada ganso que por cada pato; y el doble por cada pato que por cada pollo, que cuestan todos juntos 1 libra 13 chelines 4 peniques. La suma de los cuadrados del número [de aves] que compra es 326. ¿Cuántos gansos, patos y pollos ha comprado? ¿Y cuál es el precio de cada uno?
21. Sea AC un semicírculo de diámetro ABC, con radio igual a r.

[1] Los problemas 17 y 22 y las adivinanzas de las páginas 164-166 han sido traducidos en colaboración con Andrew King y Aída Faramín Rodríguez (N. del T.).

Otros dos semicírculos tienen centros en E y F sobre AC. Un círculo con centro en el punto D es tangente a estos tres semicírculos. Dado que $AE = BF = r/2$, demuestra que el radio del círculo con centro en D es $AB/3$.



22. Otra adivinanza (recuerda que fue escrita en el siglo XVIII):

Mi padre me trajo al mundo sin cabeza.
Entonces yací inútil, sin moverme y muerta;
pero algún tiempo después, con gran ingenio,
diez cabezas él me colocó, por la gracia de Dios.
Yo, ofendiéndome por los crueles golpes, me escapé.
Y con valentía deambulo por el campo.
Por ciudades y pueblos vagabundeo,
y bien atendida soy allí donde llego;
¿por qué no? Mucho me merezco sus cuidados;
aunque me llevan, un poderoso peso soporto.
Cuando en noches oscuras por las calles yo paso
hago que jóvenes chispas me presten atención con sus luces;

pero segura estoy de que forma como la mía nunca hubo.
Camino con cabeza y talón juntos,
y de estatura tan baja soy, tan diminuta,
que no puedo evitar ser pisoteada.

¿Qué están haciendo?

Acertijos matemáticos

A lo largo de la historia, ha sido frecuente que los problemas matemáticos fueran propuestos en forma poética o de acertijos. En el Papiro matemático Rhind (1650 a. C.) encontramos la adivinanza de los gatos en los sacos; después, en la Antología griega aparecen adivinanzas referentes a la edad de personas y el reparto de manzanas. Cuando Alcuino de York escribió sus Problemas para perfeccionar a los jóvenes (800), muchos los propuso en forma de adivinanzas. También Fibonacci utilizó acertijos en su Liber abaci (1202).

Quizá el concepto de acertijo añadiera otro atractivo más a la resolución del problema. En primer lugar está el hecho de que había que resolver tanto la adivinanza como el problema matemático que contenía. Otro motivo para utilizar adivinanzas es que eran más amables a la hora de desafiar al lector. Podían servir como tema para una discusión en grupo y ser un asunto a tratar por una audiencia más amplia, evitando así la confrontación intelectual con una única persona. El uso de los acertijos destacaba el hecho de que los problemas matemáticos eran algo más que meros ejercicios: también eran actividades intelectuales. En muchos de los libros y revistas de los siglos XVIII y XIX, los problemas se planteaban en forma de acertijo. Reproducimos a continuación dos de estas adivinanzas. ¿Puedes resolverlas sin mirar las respuestas?

Una noche, por mera casualidad me senté con un calderero, cuya lengua se movía demasiado rápido para su inteligencia: habló de su arte con abundante temple; así que le pedí que me hiciera una tetera de fondo plano.

Hagamos que el diámetro superior y el inferior tengan la misma proporción que 5 es a 3: de 12 pulgadas de profundidad, le propuse, y ni una más; y que contuviera galones de cerveza, 7 menos que 20.

Prometió hacerla, y de cabeza al trabajo se lanzó; pero cuando la tuvo terminada la encontró demasiado escasa.

La modificó, pero demasiado grande la hizo.

Pues cuando pensaba que la tenía bien, el diámetro le falló; haciéndola unas veces demasiado grande y otras demasiado pequeña, al final el calderero había fastidiado bastante su tetera; pero afirmó que traería lo prometido, aunque estropeara hasta la última onza de su latón: para evitar que se arruine, te ruego que encuentres para él la longitud del diámetro, porque él nunca lo logrará, no tengo dudas.

(The Ladies Diary, 1711).

Respuesta: base, 14,44401 pulgadas; boca, 24,4002 pulgadas.

Mientras caminaba por sus tierras, un caballero una piedra con forma y tamaño poco frecuentes halló; tras con curioso placer haberla observado, un gran deseo de medirla le entró: así lo hizo con el juicio de un artista, la forma encontrada un cono erguido resultó; el lado inclinado del cual tenía 18 pies, el diámetro de la base 14 tenía.

Órdenes dio para que enviada fuera a su jardín como adorno.

Deseoso de tener una habitación igual en el cono mismo, con una de estas tres formas tenía que ser: un cubo, un cilindro o un hemisferio, la más grande posible que la piedra pudiera soportar.

Un habilidoso artista propuso cortarla, fuera cual fuera, a 20 peniques el pie cúbico.

El caballero, deseoso de ahorrar todo coste innecesario, al consejo matemático recurrió.

Gracias al cual con satisfacción vio cuál de los tres el menor contenido tenía; acorde al cual la forma fijó: del mismo modo una cuenta justa desea la cual en libras esterlinas será.

(The Gentleman's Magazine, 1741)

Respuesta: un cubo; coste: 19 libras 18 chelines 2 peniques.

Capítulo 13

Problemas victorianos del siglo XIX

Fotografía del conocido autor victoriano Lewis Carroll, autor de Alicia en el país de las maravillas, realizada en 1863. Su nombre real era Charles Lutwidge Dodgson y era matemático de profesión. Dodgson escribió sobre lógica e incluyó rompecabezas lógicos en las historias de Alicia.

La Gran Bretaña del siglo XIX experimentó un período de espectaculares innovaciones matemáticas. A comienzos de siglo, un grupo de estudiantes de la Universidad de Cambridge fundó la Sociedad Analítica; la cual abogaba por la adopción del cálculo leibziniano en sustitución de los más incómodos sistemas de fluxión introducidos por Isaac Newton. Esta reforma acercó a la comunidad científica y matemática británica a sus pares continentales en el área del análisis matemático. Como si fuera una obra de teatro dickensiana, un grupo de curiosos y coloridos personajes matemáticos apareció entonces en escena.

George Peacock (1791-1858), miembro fundador de la Sociedad Analítica y activo reformador social, formalizó el álgebra, ganándose el apodo de «el Euclides del álgebra». De hecho, la mayoría de las obras victorianas sobre matemáticas se centraron en desarrollos de álgebra y lógica. George Boole (1815-1864), el hijo autodidacta de un zapatero remendón, formalizó el estudio de la lógica y concibió un álgebra de reglas. Estaba emparentado por matrimonio con el explorador sir George Everest, de quien toma su nombre la montaña. Los esfuerzos matemáticos de Boole se vieron completados por el trabajo de Augustus De Morgan (1806-1871) y John Venn (1834-1923). Charles Ludwidge Dodgson escribió sobre lógica y, con el seudónimo de Lewis Carroll, publicó una serie de cuentos para niños. El autor de Alicia en el país de las maravillas fue también un fotógrafo aficionado, conocido por sus imágenes de niñas con escasa ropa. En su obra sobre los cuaterniones (o cuaternos), el astrónomo real irlandés y niño prodigio lingüístico William Rowan Hamilton (1805-1865) desarrolló un álgebra no conmutativa. Charles Babbage (1791-1871), «el padre de la computación moderna», construyó máquinas analíticas a base de engranajes para realizar cálculos para la marina británica. Aunque bien fundadas en lo teórico y en el diseño, estas máquinas carecían de la necesaria precisión mecánica para cumplir las tareas asignadas, por lo que la marina retiró su apoyo al proyecto. Babbage fue ayudado en su trabajo por la encantadora joven cortesana e hija de lord Byron, Ada Lovelace (1815-1852). La condesa de Lovelace ha sido considerada la primera programadora informática y fue bautizada por su mentor como la «encantadora de números».

Estas contribuciones victorianas a las matemáticas proporcionaron nuevos puntos de vista a la disciplina, estimularon estudios posteriores y dieron como resultado emocionantes avances que tendrían efectos a largo plazo en el siglo XX.

Problemas

1. Deseando conocer la anchura de un río, medí una base de 500 yardas en línea recta cercana a una orilla y, en cada extremo de esta línea, encontré ángulos subtendidos por el otro extremo y por un árbol próximo a la otra orilla del río que eran 53° y 79° 12'. ¿Cuál es la anchura perpendicular de este río?

2. ¿Qué número al ser incrementado por 1/2, 1/3 y 1/4 de sí mismo da 75 como resultado?

3. ¿Cuál es la altura perpendicular de una nube cuando sus ángulos de elevación son 35° y 64° medidos a la vez por dos observadores, ambos en el mismo lado de la nube y en el mismo plano vertical, pero separados por una distancia de 880 yardas? Y ¿cuál es la distancia de la nube respecto a estos dos observadores?

4. ¿A qué altura sobre la tierra hay que elevar a una persona para que pueda ver un tercio de su superficie?
5. Halla el área del segmento elíptico cortado paralelo al eje corto cuando la altura del segmento es 10 y los ejes de la elipse son 25 y 35.
6. Tras una terrible batalla se comprueba que el 70% de los soldados ha perdido un ojo, el 75% una oreja, el 80% un brazo y el 85% una pierna. ¿Qué porcentaje de los combatientes debe haber perdido las cuatro cosas?
7. Dos viajeros, que parten al mismo tiempo del mismo sitio, viajan en direcciones opuestas en un ferrocarril circular. Los trenes salen en cada dirección cada 15 minutos, los que van hacia el este tardan en el recorrido 3 horas y los que van hacia el oeste 2. ¿Con cuántos trenes se cruza cada viajero durante su recorrido, sin contar con los trenes que se encuentran en la estación al final del trayecto?
8. Un jardín oblongo tiene media yarda más de longitud que de anchura y consiste por completo en un camino de grava dispuesto en una espiral de 1 yarda de anchura y 3.630 yardas de longitud. Calcula las dimensiones del jardín.
9. Dos círculos de radio 25 pies se intersecan de tal modo que la distancia entre sus centros es de 30 pies. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado mayor inscribible en el interior de sus arcos intersecados?
10. Un hombre de 5 pies de altura, de pie en la base de una pirámide cuadrada, ve salir el sol sobre uno de los bordes del

cuadrado en el punto medio del mismo. Demuestra que si a y b son las distancias desde las dos esquinas más cercanas, y θ es la altura del sol, la altura de la pirámide es

$$10 + \tan\theta \sqrt{\frac{5a^2 - 2ab + b}{2}} \text{ pies}$$

11. Un acantilado con una torre en el borde es observado desde un barco en el mar; la elevación de la cima de la torre es de 30°. Tras remar hacia la orilla una distancia de 500 yardas en el plano de la primera observación, las elevaciones de la base y la cima de la torre son 60° y 45°, respectivamente. Calcula la altura de la torre y del acantilado.

12. Dados dos círculos tangentes en el punto *P* con diámetros paralelos *AB* y *CD*, demuestra que *APD* y *BPC* son líneas rectas.

13. Se colocan tres postes verticales a intervalos de una milla a lo largo de un canal recto, cada uno de los cuales se eleva la misma altura sobre la superficie del agua. La línea de visión que une las puntas de los dos postes de los extremos corta el poste de en medio en un punto situado 8 pulgadas por debajo del extremo superior. Encuentra el radio de la tierra redondeando las millas.

14. Un hombre y dos chicos pueden hacer en 12 días una tarea que puede ser terminada en 6 días por tres hombres y un chico. ¿Cuánto tardará un hombre solo en terminarla?

15. Un terrateniente A distribuye 180 monedas en sumas iguales

entre un cierto número de trabajadores. El terrateniente B distribuye la misma suma, pero le da a cada uno de sus trabajadores 6 monedas más que A y tiene menos trabajadores que este. ¿Cuánto le da A a cada trabajador?

16. Dos hombres comienzan a caminar al mismo tiempo y viajan una distancia de 10 millas. Uno va dos millas por hora más rápido que el otro y completa el viaje 5/6 de hora antes. ¿A qué velocidad viaja cada hombre?

17. La suma de las edades del padre y el hijo es 100 años. Del mismo modo, 1/10 del producto de sus años, en años, excede a la edad del padre en 180. ¿Qué edad tienen?

18. Un número compuesto por tres dígitos en base 7 tiene los mismos dígitos en orden inverso cuando es expresado en base 9. ¿Cuál es el número?

19. Dos mensajeros, *A* y *B*, a 59 millas de distancia el uno del otro, salen por la mañana para encontrarse. *A* cabalga 7 millas en dos horas y *B* 8 millas en tres horas. *B* comienza el recorrido una hora después que *A*. Calcula el número de millas que cabalgará *A* antes de encontrarse con *B*.

20. Dados el perímetro y la perpendicular de un triángulo rectángulo, se pide encontrar el triángulo.

21. Un mercader incrementa anualmente el valor de sus bienes en una tercera parte; también se gasta 100 libras al año en su familia; después de tres años se da cuenta de que el valor de sus bienes se ha duplicado. ¿Cuál era el valor original de los mismos?

22. Si 20 hombres, 40 mujeres y 50 niños reciben 350 £ por siete semanas de trabajo, y dos hombres reciben tanto como tres mujeres o cinco niños, ¿cuánto recibe una mujer por una semana de trabajo?

23. El número de marineros disponibles en Portsmouth es de 800; en Plymouth, 756; y en Sheerness, 404. Se envía un barco; su dotación es de 490 marineros. ¿Cuántos deben reclutarse de cada puerto de tal modo que se haga en una misma proporción?

24. Si cinco bombas, cada una con un vuelo de manivela de 3 pies, vacían una mina trabajando 15 horas al día durante 5 días, ¿cuántas bombas con un vuelo de manivela de 2 1/2 pies, trabajando 10 horas al día durante 12 días, serán necesarias para vaciar la misma mina, teniendo en cuenta que el accionado de las manivelas del primer grupo de bombas se realiza 4 veces más rápido que el del segundo?

25. Si 12 caballos pueden arar 96 acres en seis días, ¿cuántos caballos pueden arar 64 acres en ocho días?

26. Si 44 cañones que realizan 30 disparos por hora durante tres horas al día consumen 300 barriles de pólvora en cinco días, ¿cuánto les durarán 400 barriles de pólvora a 66 cañones que disparan 40 veces por hora durante cinco horas al día?

27. A comienza un negocio con un capital de 2.400 £ el 19 de marzo, y el 17 de julio admite a un socio, B, con un capital de 1.800 £. El 31 de diciembre sus beneficios son de 943 £. ¿Cuál es la parte de cada uno?

28. Tenemos un triángulo con un lado de 20 y con una altura en ese lado de 6; se desconocen los lados restantes; pero uno es el doble de largo que el otro. ¿Cuáles son los lados desconocidos de este triángulo?

29. Dados tres círculos mutuamente tangentes con radios diferentes, si el área del triángulo formado al conectar sus centros es de 367,424 unidades cuadradas y el radio de dos de los círculos se sabe que es de 10 y 15 unidades, respectivamente, ¿cuál es el radio del tercer círculo?

¿Qué están haciendo?

Las ilustraciones para los primeros problemas

Los problemas matemáticos fueron unos de los primeros textos escritos o impresos que vinieron acompañados de ilustraciones. En muchos casos, estas ilustraciones eran meramente descriptivas, es decir, que mostraban la situación descrita en vez de ampliar las matemáticas implicadas. También poseían un impacto visual que atraía el interés del lector. La ilustración del libro *Pathway to knowledge* de Robert Recorde (1551) que se muestra en la figura 13.1 hace ambas cosas.

Las figuras 13.2 y 13.3 son ilustraciones de dos populares problemas históricos: el del «bambú roto» y el del «cruce del río». El primero aparece en *Standard arithmetic de Milne* (1892) como sigue:

Un árbol, roto a 21 pies desde el suelo, descansa sobre su tocón y toca el suelo a 28 pies de la base del mismo. ¿Cuál era la altura del árbol? (p. 133)

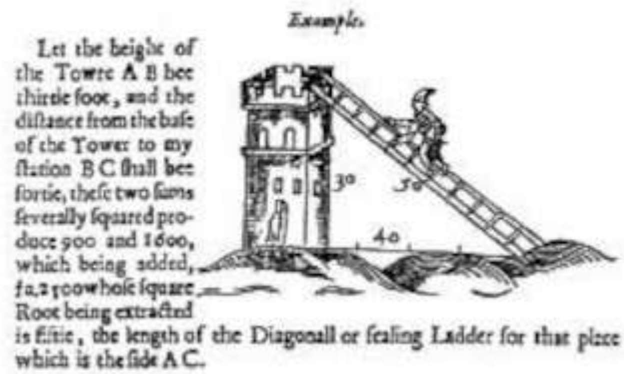


Figura 13.1. El asalto a una fortificación era un tema visual muy popular para la aplicación del teorema de Pitágoras.

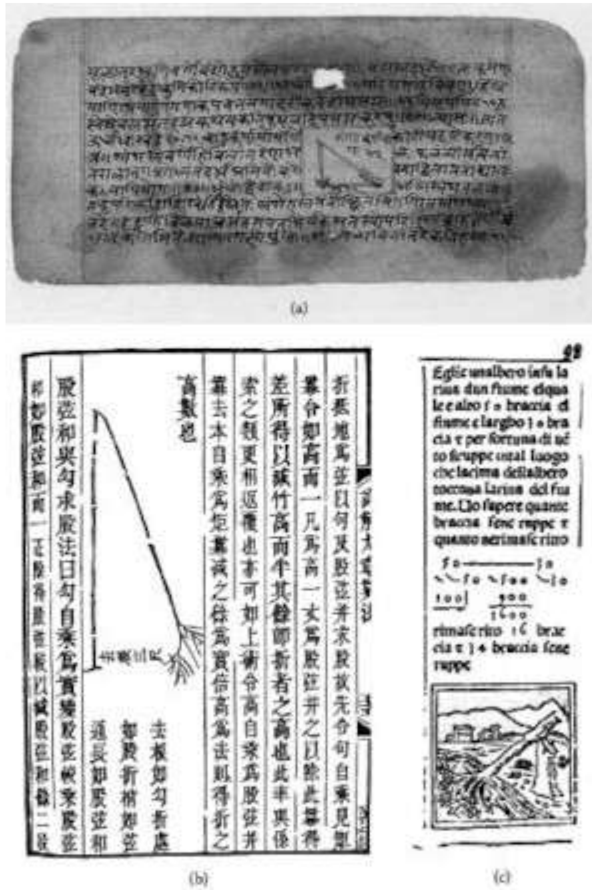


Figura 13.2. Tres ilustraciones del problema de la caña rota: a) del clásico indio Lilavati, de Bashkara (1150); b) del chino Jiuzhang suansu (c. 100); y c) de la Aritmética de Filippo Calandri (1491).

Figura 13.3. El barquero lleva a la oveja a la otra orilla mientras el lobo y la gavilla de trigo esperan su turno.

En la figura 13.3 encontramos reproducido el problema del cruce del río —en este caso con un lobo, una oveja y una gavilla de trigo— tal cual aparece ilustrado en un manuscrito del siglo XIII.

Capítulo 14

Problemas norteamericanos de los siglos XVIII y XIX

Grabado de un calendario del siglo XIX con una escena agrícola: la cosecha de otoño.

Dado que Estados Unidos fue fundada como una colonia británica, sus colegios siguieron la prácticas inglesas y los libros de aritmética populares en Gran Bretaña en ese momento. No obstante, tras la independencia en 1776, los autores norteamericanos empezaron a escribir libros sobre la cuestión adecuados a las necesidades de su emergente país. Muchos de los problemas de estos libros son «clásicos» —es decir, que pueden encontrarse en la mayoría de las obras de este período—; pero otros muchos reflejan la vida de la nueva nación, en el cual la agricultura era la ocupación principal y estaba comenzando a emerger una clase mercantil. Con la llegada del siglo xx, Estados Unidos se convirtió en una potencia industrial y los problemas matemáticos posteriores reflejan las necesidades de una sociedad diferente.

Problemas

1. Dos comerciantes, A y B, fletan un barco con 500 hogshead de ron; el comerciante A carga 350 hogshead y B el resto. Durante una tormenta, los marineros se ven obligados a lanzar por la borda 100 hogshead. ¿Cuál es la pérdida que sufre cada uno de los comerciantes?
2. Si una bola de 6 pulgadas de diámetro pesa 32 libras, ¿cuál será el peso de una bola de 3 pulgadas de diámetro?
3. Supón que en lo alto de una roca se construye un faro. La distancia entre el lugar de observación y la parte de la roca al nivel de los ojos es de 620 yardas; la distancia entre la parte superior de la roca y el lugar de observación es de 846 yardas; y desde lo alto del faro, 900 yardas. Calcula la altura del faro.
4. En 6 meses, 45 hombres construyen un puente sobre un río. La corriente se lo lleva. Se pide saber el número de trabajadores necesarios para construir un puente del doble de valor en 4 meses.
5. El bronce de un cierto grado se compone de un 16% de estaño y un 84% de cobre. ¿Cuánto estaño hay que añadirle a 410 libras de este bronce para que en su composición haya un 18% de estaño?
6. Conociendo la base, b, y la altura, a, de un triángulo, encuentra la expresión de un lado del cuadrado inscrito.
7. Conociendo la longitud, a y b, de dos líneas rectas dibujadas

desde los ángulos agudos de un triángulo rectángulo hasta el punto medio de sus lados opuestos, determina la longitud de dichos lados.

8. Un granjero vende un tiro de caballo por 440 $, pero no recibe el pago por ellos hasta 1 año y 8 meses después de la venta. Mientras tanto, recibe una oferta de 410 $ por ellos. ¿Ganó o perdió con la venta y por cuánto, teniendo en cuenta que el dinero se revalorizaba un 6% al año?

9. Una señora tiene dos copas de plata y solo una funda para ellas. La primera copa pesa 16 onzas y, cuando está cubierta, pesa tres veces más que la segunda copa; pero cuando esta está cubierta, pesa cuatro veces más que la primera. ¿Cuál es el peso de la segunda copa y la funda?

10. Un especulador compra acciones a un 25% por debajo de su valor inicial y las vende a un 20% sobre ese mismo valor. Gana 1.560 $. ¿Cuánto ha invertido?

11. Un maestro accede a enseñar nueve meses por 562,50 $ más el alojamiento. Al final de este período, debido a una ausencia de dos meses causada por una enfermedad, recibe solo 409,50 $. ¿Cuánto costaba su alojamiento mensualmente?

12. Hay cuatro empresas, en una de las cuales hay 6 hombres, en otra 8 y en las dos restantes, 9. ¿De cuántos modos puede formarse un comité de 4 personas eligiendo a un hombre de cada empresa?

13. ¿Cuál es la suma de la siguiente serie continuada hasta el infinito: 11, 11/7, 11/49...?

14. Si un triángulo equilátero cuya área es igual a 10.000 pies

cuadrados es rodeado por un camino con una anchura uniforme y un área igual a la del círculo inscrito, ¿cuál es la anchura del camino?

15. Un cuadrado circunscrito a un círculo dado tiene el doble de área que un cuadrado inscrito en ese mismo círculo. ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

16. ¿Qué proporción de azúcar a 8 centavos, 10 centavos y 14 centavos por libra compondrá una mezcla con un valor de 12 centavos por libra?

17. Una persona dice que cuando contó sus avellanas de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco y de seis en seis le sobraba una; pero que cuando las contó de siete en siete no le sobraba ninguna. ¿Cuántas tenía?

18. Tenemos un triángulo rectángulo del que se conocen la longitud de la base y la suma del lado perpendicular y la hipotenusa. Encuentra una expresión para la longitud del lado perpendicular y de la hipotenusa.

19. Si unas provisiones con un precio de 80 $ alimentan a 20 hombres durante 25 días, ¿a cuántos hombres alimentará esa misma cantidad de provisiones durante 10 días?

20. Se coloca una escalera perpendicular al plano del horizonte y coincidiendo con el plano de un muro vertical. Si la base de la escalera se desplaza por el plano horizontal, en una dirección perpendicular al plano del muro, con el extremo superior de la escalera apoyado contra el muro, se pide hallar la ecuación de la

curva que es el lugar geométrico de un punto situado en cualquier lugar de la escalera.

21. La cima más alta de los Andes se encuentra a 4 millas por encima del nivel del mar. Si una línea recta desde este punto alcanza la superficie del agua [mar] a una distancia de 178,25 millas, ¿cuál es el diámetro de la Tierra?

22. Supongamos que una escalera de 60 pies se coloca en una calle de tal modo que alcanza una ventana situada a 37 pies de altura a un lado de la calle y, sin mover su base, alcanza una ventana situada a 23 pies de altura en el otro lado de la calle. ¿Qué anchura tiene la calle?

23. Se pide un número cuyo cuadrado sea igual a dos veces su cubo.

24. Un hombre llena su tienda con varios tipos de grano, de los cuales 1/2 es trigo, 1/4 centeno, 1/8 maíz indio y 1/10 avena; además tiene 8 barriles de cebada. ¿Cuánto tiene de cada grano y cuál es el total?

25. Supóngase que el área de un triángulo equilátero es 600. Se piden los lados.

26. Encuentra el diámetro de un contenedor con forma de cilindro de 60 pulgadas de altura y que contendrá 100 unidades más de vino que un contenedor cuadrado de la misma altura, la suma de cuyos lados es igual a la circunferencia del cilindro. [1 galón de vino = 231 pulgadas cúbicas].

27. Cuatro hombres poseen 90 £ entre todos, de tal modo que si al

dinero del primer hombre le sumas una cantidad Z, iguala a la cantidad del segundo hombre menos Z, al dinero del tercer hombre multiplicado por Z y al del cuarto hombre dividido por Z. ¿Cuál es la parte que posee cada uno de esas 90 £?

28. Existen dos números que están en la misma proporción en que 5 es a 6, y la suma de cuyos cuadrados es 2.196. ¿Cuáles son esos números?

29. Una tina de agua tiene 73 galones de capacidad; la tubería que la llena por lo general deja pasar 7 galones en 5 minutos; y el grifo deja caer 20 galones en 17 minutos. Imagina que por un descuido se dejan ambos abiertos y que el agua comienza a correr a las 4 de la mañana. A las 6 de la mañana un sirviente se da cuenta de que el agua está corriendo y cierra el grifo. ¿En cuánto tiempo desde el descuido se llenará la tina?

30. Tres circunferencias iguales con radio de 6 pulgadas son tangentes la una a la otra. Calcula el área encerrada entre ellas.

31. Un círculo, un cuadrado y un triángulo equilátero tienen el mismo perímetro, que es igual a 1 metro. Compara sus áreas.

32. Si un arco de 45º de una circunferencia es igual a un arco de 60º en otro círculo, ¿cuál es la relación entre las áreas de los círculos?

33. El vapor Katie deja el embarcadero de Nueva Orleans y navega a una velocidad media de 15 millas por hora. Cuando el Katie ha recorrido 25 millas, el vapor R. E. Lee abandona el muelle a una velocidad media de 18 millas por hora. ¿Cuánto camino recorrerá el

Lee antes de dar alcance al Katie?

34. Si 40 naranjas valen 60 manzanas, 75 manzanas valen 7 docenas de melocotones, 100 melocotones valen 1 caja de uvas y 3 cajas de uvas valen 40 libras de nueces de pacana, ¿cuántos melocotones se pueden comprar con 100 naranjas?

35. Dos personas se sientan a jugar por una cierta cantidad de dinero y el primero que gane tres juegos será el vencedor. Una de ellas gana dos juegos y la otra un juego; pero al no desear continuar, deciden dividirse el bote. ¿Cuánto recibirá cada persona?

36. Un hombre planta 4 granos de maíz, que una vez germinados producen 32 granos, que son lo que planta el segundo año. Supongamos que el incremento anual sigue siendo de ocho veces la cantidad inicial, ¿cuánto producirá en el 15.º año, suponiendo 1.000 granos por pinta? (Expresa la respuesta en fanegas). [1 fanega = 8 pintas].

37. Un hombre accede a pagar 13 valiosas casas, que cuestan 5.000 $ cada una. ¿Cuál será el precio de la última si calculamos 7 céntimos para la primera, cuatro veces 7 céntimos para la segunda, y así con las demás, incrementándose el precio de cada una cuatro veces hasta la última? ¿Gana o pierde con la transacción y cuánto?

38. Un caballero ha comprado un terreno rectangular cuyo perímetro es de 100 varas; y ha de pagar 1 $ por cada vara de longitud y 3 $ por cada vara de anchura del terreno. Se pide determinar la longitud y la anchura del terreno, de tal modo que lo pueda conseguir lo más barato posible.

39. Dos oficiales se encargan de una compañía cada uno; una tiene 40 hombres menos que la otra. Dividen entre sus hombre 1.200 coronas. ¿Cuántos hombres hay en cada compañía si el oficial que tiene menos hombres entrega 5 coronas más a cada uno de ellos que el oficial que tiene más?

40. Utiliza el álgebra para determinar el número de grados en un ángulo θ donde el cos θ = tan θ.

41. Si Xx = 100, ¿cuál es el valor de X?

42. Supón que el general [George] Washington tenía 800 hombres y que se le entregaron provisiones para 2 meses, pero necesitaba alimentar a su ejército durante 7 meses. ¿Cuántos hombres tendrían que abandonar el grupo para que los soldados restantes pudieran comer?

43. Los tres lados de un terreno triangular, tomados en orden, miden 15, 10 y 13 cadenas, respectivamente; se pide dividirlo en dos partes iguales mediante una línea trazada en paralelo al segundo lado. ¿Cuál será la longitud de la línea divisoria y la distancia desde el punto del comienzo, medida desde el primer lado?

44. Un hombre, su mujer y sus dos hijos desean cruzar el río. Tienen una barca que solo puede transportar 100 libras. El hombre pesa 100 libras, la mujer 100 libras y cada uno de los hijos 50 libras. ¿Cómo pueden cruzar el río utilizando la barca?

45. Se le preguntó a una dama qué edad tenía en el momento de casarse, a lo que respondió que la edad de su hijo mayor era 13 años, que este había nacido 2 años después de su matrimonio, que

cuando se casó la edad de su esposo era tres veces la suya y que ahora este es dos veces más viejo que ella. ¿Qué edad tenían ella y su esposo cuando se casaron?

46. Los perímetros de dos triángulos semejantes son 45 y 135 pulgadas, respectivamente. Un lado del primer triángulo tiene una longitud de 11 pulgadas y un segundo lado tiene 19 pulgadas. Encuentra las longitudes de los lados del segundo triángulo.

47. ¿A qué hora entre las 4 y las 5 en punto estarán juntas las agujas del reloj?

48. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 9. Si al número se le resta 45 el resultado quedará expresado por esos dígitos en orden inverso. Halla el número.

49. Dos ciclistas pedalean en direcciones opuestas por un camino circular de un cuarto de milla de longitud y se encuentran cada 22 segundos. Cuando viajan en la misma dirección por este mismo camino, el más rápido pasa al más lento una vez cada 3 minutos y 40 segundos. Calcula la velocidad de cada corredor.

50. Dos ruedas dentadas, una con 26 dientes y la otra con 20 dientes, se mueven juntas. ¿A cuántas revoluciones de la rueda grande corresponden 12 de la pequeña?

51. Un hombre compró un grupo de ovejas por 225 $; después de que murieran 10 vendió 4/5 de las restantes al coste inicial y recibió 150 $ por ellas. ¿Cuántas compró?

52. Le debo a un hombre las siguientes facturas: una de 800 $ que vence el 16 de mayo; una de 660 $ que vence el 1 de julio; y una de

940 $ que vence el 29 de septiembre. Él desea cambiarlas por dos facturas de 1.200 $ cada una y quiere que una venza el 1 de junio. ¿Cuándo debería vencer la otra?

53. En su herencia, un padre cede su heredad, valorada en 40.000 $, a sus tres hijos en las proporciones siguientes: John 1/3, Henry 1/4 y Katie 1/5. Antes de que se firmara el documento, Henry muere. ¿Cuánto deberían recibir John y Katie?

54. *X*, *Y* y *Z* alquilan un pasto para la temporada por 90 $. *X* pastorea 9 mulas durante 150 días, *Y* pastorea 11 mulas durante 110 días y *Z* pastorea 24 mulas durante 160 días. ¿Cuánto tiene que pagar cada uno?

55. Un hombre invirtió 100 $ en un rebaño de 100 cabezas formado por terneros, cabras y cerdos. El precio de cada uno de ellos es el siguiente: los terneros a 10 $ la pieza, las cabras a 1 $ la pieza y los cerdos a 0,12 1/2 $ la pieza. ¿Cuántos compró de cada uno? [Nota: la repuesta a este problema se consigue considerando una estrategia óptima; el granjero consigue el mejor trato posible. ¿Puedes adivinar cuál es la estrategia de la solución?].

56. Tres personas compran una carga de azúcar con forma de cono perfecto de 25 pulgadas de altura y acceden a dividirlo por igual en secciones cortadas en paralelo a la base. ¿Cuál es la altura de la pendiente de la parte de cada uno si la base tiene un diámetro de 12 pulgadas?

57. Un minero californiano tiene una bola esférica de oro de 2 pulgadas de diámetro, que quiere cambiar por bolas esféricas de 1

pulgada de diámetro. ¿Cuántas de estas bolas más pequeñas tendrá que recibir?

58. Un general forma a sus hombres en un cuadrado, es decir, con el mismo número de hombres por fila que por columna; pero se da cuenta de que le sobran 59 hombres. De modo que aumenta las filas y las columnas en una persona y se da cuenta de que al formar el cuadrado le faltan 84 hombres. ¿Cuántos soldados tiene a sus órdenes?

59. ¿Cuál será el diámetro de una esfera cuyo volumen y superficie se expresan con el mismo número?

60. ¿Cuáles son las dimensiones interiores que ha de tener una caja cúbica para que pueda contener 200 pelotas de 2 1/2 pulgadas de diámetro cada una?

61. Se pide hallar el lado del triángulo equilátero más grande que pueda extraerse de una pieza de madera redonda de 36 pulgadas de diámetro.

62. Si dos hombres o tres chicos pueden arar un acre de terreno en un sexto de día, ¿cuánto tardarán en ararlo tres hombres y dos chicos?

63. Si de un cargamento de 600 esclavos 200 mueren durante el pasaje de seis semanas desde África hasta las Indias Occidentales, ¿cuál hubo de ser la duración del pasaje si perece la mitad del cargamento? Se supone que el grado de mortalidad será el mismo durante todo el pasaje, es decir, que el número de muertes en un momento dado será proporcional al de vivos en ese mismo momento

dado.

64. Un boyero vende vacas y ovejas por 6.105 \$. Si recibe un 65% más por las vacas que por las ovejas, ¿cuánto recibe por las vacas?

65. Especulando, *A*, *B* y *C* compran un montón de mercancías por 3.000 \$. *A* paga 1.500 \$, *B* 900 \$ y *C* paga 600 \$. Acuerdan que el interés de cada uno en los bienes será proporcional a la cantidad de dinero invertida. Entonces le venden a *D* a un interés de 1/4 sobre los bienes por 1.800 \$ y *A*, *B* y *C* se ponen de acuerdo para que cada uno posea una tercera parte de los bienes que quedan. ¿Cuál era el acuerdo financiero entre *A*, *B* y *C*?

66. Tres jóvenes caballeros, *A*, *O* y *P*, contratan el uso de un carruaje durante 30 días por 100 \$, que acuerdan pagar en proporción al número de días que cada uno lo use. *A* lo usa durante 9 días, *O* lo utiliza durante 14 días y *P* durante 6 días. Hay un día durante el cual el carruaje no es utilizado. ¿Qué cantidad debe cada uno?

67. Cuando dos mensajeros, James y Henry, se sentaban para comer los pasteles que habían comprado, vieron cómo otro miembro de su fraternidad, Dick, les pedía permiso para cenar con ellos, a lo cual accedieron alegremente, y los tres se comieron los pasteles. Cuando hubieron terminado, Dick dejó sobre la mesa 0,40 \$ como pago de su parte de la cena. ¿Qué parte de esos 0,40 \$ recibirá James, que había contribuido con cinco pasteles a la cena, y cuánto deberá recibir Henry, que había contribuido con tres pasteles?

68. Un facineroso, una variante moderna de la raza humana, roba

una cesta de melocotones y los divide como sigue entre sus tres hermanos, también facinerosos, y él mismo: al primero le da un cuarto del número total y un cuarto de melocotón más; al segundo le da un tercio de lo que queda y un tercio de melocotón más; al tercero le da la mitad de lo que queda y medio melocotón más. El ladrón se queda con lo que queda para sí, que es la mitad de lo que le dio al primer facineroso. ¿Cuál era el número total de melocotones robados y cuántos recibió cada uno?

69. Un comerciante de vinos tiene caldos a 1,10 $ el galón, 1,80 $ el galón y 2,50 $ el galón. Quiere mezclar este vino con agua de tal modo que la mezcla valga 1,50 $ por galón. ¿Cuáles serán las cantidades proporcionales de vino y agua?

70. Un árbol de 100 pies de altura resulta roto por una tormenta y la cima del mismo toca el suelo a 40 pies de la raíz del árbol. ¿Cuál es la longitud de la porción rota?

71. Un granero lleno de mazorcas de maíz tiene 20 pies × 8 pies en la parte superior, 16 pies × 6 pies en la parte inferior, y 11 pies de altura. Si 2 fanegas de mazorcas de maíz equivalen a 1 fanega de maíz pelado, ¿cuántas fanegas de maíz pelado hay en el granero? [1 fanega = 35,24 dc^3].

72. Al preguntarle a un colono cuántas mulas tenía, este replicó que si tuviera tantas, una mitad de tantas y siete mulas y media tendría 100. ¿Cuántas mulas tenía?

73. Tres lacayos, *A*, *B* y *C*, comienzan a viajar a la vez en la misma dirección en torno a una isla que tiene 72 millas de circunferencia.

El lacayo *A* viaja 6 millas al día, *B* 8 millas al día y *C* 12 millas al día. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que vuelvan a encontrarse los tres a la vez?

74. Un tratante de ganado vende dos caballos por el mismo precio. En uno gana un 25% y en el otro pierde un 25%. Su pérdida neta en las ventas es de 12 $. ¿Cuánto cuesta cada caballo?

¿Qué están haciendo?

Las tareas del cuaderno de clase del siglo XIX

La página que se muestra en la figura 14.1 contiene varios ejemplos sobre el tema de las progresiones aritméticas. En los comienzos de Estados Unidos los libros de texto eran escasos y, cuando los había disponibles, bastante caros; en muchos casos solo los tenía el maestro, que dictaba la lección a sus alumnos, quienes la copiaban en un cuaderno. Si era de matemáticas, en Norteamérica recibía el nombre de *cipher book*. En ellos los alumnos se esforzaban por demostrar sus grandes progresos en el tema que se estudiaba y al mismo tiempo por dejar ejemplos de su excelente caligrafía. (Recuérdese que estamos todavía en la época de las plumas de ganso o metal y los tinteros). Estos *cipher book*s servían a menudo como diario personal o registro de las finanzas de la familia. Estudiar el contenido de uno de ellos proporciona una imagen tanto de las matemáticas de la época como de la vida de las personas relacionadas con el cuaderno. El lector puede intentar resolver los problemas propuestos.

Uno de los *cipher books* con mayor interés histórico que se conocen aparece en la figura 14.2; se trata de una página en la cual el estudiante puso en práctica sus conocimientos sobre el arte de la multiplicación. Primero, ¿puedes determinar el motivo de la importancia histórica de la página? Segundo, ¿puedes averiguar lo que significan las cruces con números que aparecen en ella?

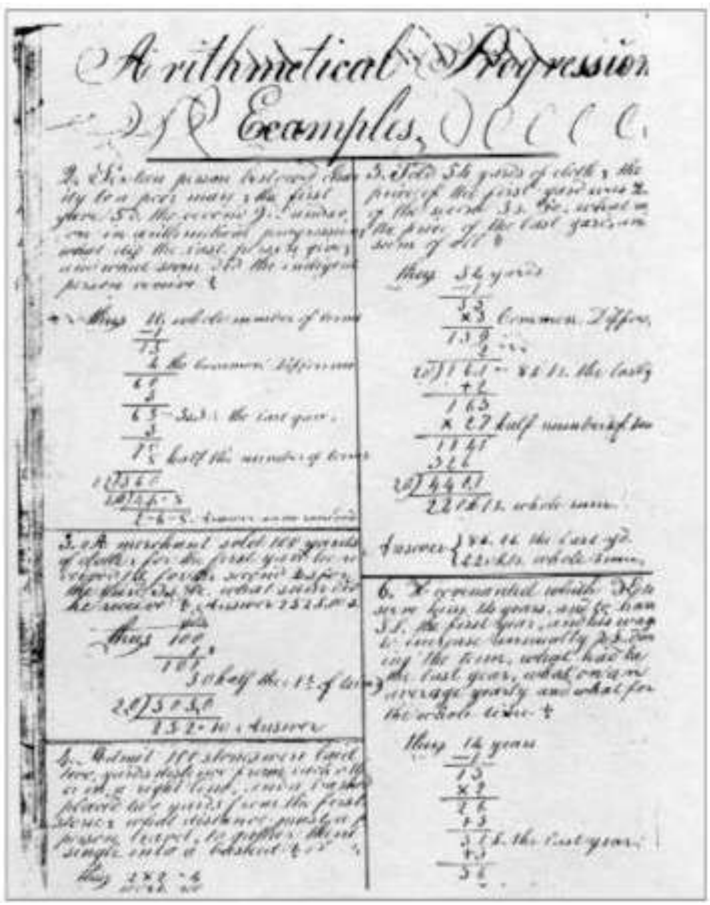


Figura 14.1. «Progresiones aritméticas», una página del cipher book de Daniel Danner, del condado de Manheim en Lancaster (Pensilvania), 29 de enero de 1819

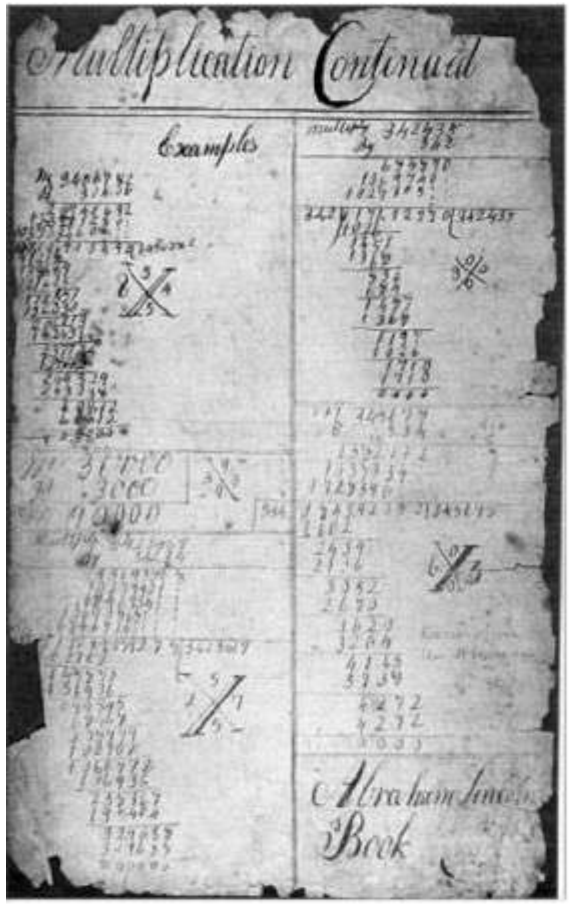


Figura 14.2. Material copiado de un texto de aritmética mientras el autor vivía en Indiana y trabajaba como abogado. Se trata de la más antigua muestra de la caligrafía de esta persona.

Capítulo 15
Problemas del Farmer's Almanac

La cubierta del primer número del Farmer's Almanac editado en Estados Unidos. Esta revista anual —fundada en Morristown (Nueva Jersey) por el editor David Young y el impresor Jacob Mann— lleva siendo publicada desde 1818.

El *Farmer's Almanac* fue una de las primeras publicaciones periódicas concebidas para el gran público editadas en ese nuevo país que era Estados Unidos de Norteamérica. Se trataba de una publicación anual que contenía información con base científica sobre el tiempo, los fenómenos astronómicos y las mareas, además de consejos sobre la plantación de cosechas, el mantenimiento de jardines, las conservas de alimentos y otras cuestiones que pudieran ser de interés para los colonos agricultores. Era un manual de información, pero también una fuente de educación y entretenimiento. De modo que no resulta muy sorprendente saber que contenía problemas matemáticos para que los resolvieran los lectores. Lo que sí resulta sorprendente es el nivel de sofisticación matemática que uno se encuentra en ellos. Durante el siglo xix hubo varios editores de estos almanaques para granjeros. Algunos de los giros de las frases pueden parecer extraños, pero intenta interpretarlos.

Problemas

1. Supóngase que el área de un triángulo equilátero es 600. Se piden los lados.
2. Se pide un número cuyo cuadrado sea igual a dos veces su cubo.
3. Se tienen dos números cuya suma es igual a la diferencia de sus cuadrados, y si la suma de los cuadrados de los dos números es sustraída del cuadrado de su suma, el resto será 60. ¿Cuáles son esos dos números?
4. Un hombre llena su tienda con varios tipos de grano, 1/2 de los cuales es de trigo, 1/4 de centeno, 1/8 de maíz indio y 1/10 de avena; además de tener 8 barriles de cebada. ¿Cuánto tiene de cada grano y cuál es el total?

5. Cuatro hombres tienen 90 $ entre todos, de tal modo que si añades una cantidad X igualas el dinero del segundo hombre menos X, el dinero del tercer hombre multiplicado por X y el dinero del cuarto hombre dividido por X. ¿Qué parte tiene cada hombre de esos 90 $?

6. Un caballero con un jardín de 960 pies de largo y 720 pies de ancho desea excavar en él una zanja de 5 pies de profundidad. ¿Qué anchura habrá de tener para que la tierra sacada de ella eleve el resto del jardín 1 pie?

7. Un hombre fue al mercado con 100 libras y compró bueyes, ovejas y gansos. Dio 5 libras por cada buey, 1 libra por cada oveja y un chelín por cada ganso. El número total de animales que compró fue 100. Se pide el número de cada uno de ellos.

8. El interés de 800 $ durante un año, y el interés del interés por otro año, es 62,205 $. ¿Cuál es el interés en porcentaje anual?

9. ¿Qué distancia recorre el punto que toca el raíl en la superficie de una rueda de tren de 2 pies de diámetro mientras la rueda recorre 62,832 millas?

10. La suma de 500 $ puesta al 5% de interés compuesto ha alcanzado la cantidad de 900 $. ¿Durante cuánto tiempo ha estado generando interés?

11. Dos hombres (A y B) compran un montón de calabazas (un total de 1.000) por 12 $, y cada uno paga 6 $. Al dividirlas acuerdan que A escogería sus calabazas y dejaría que se valorara cada una a nueve milésimas de dólar más que las de B. Se pide dividir las

calabazas atendiendo al antedicho acuerdo. ¿Cuántas calabazas recibe cada uno?

12. Tenemos un bloque cúbico de mármol cuya superficie es igual a 864 veces un número desconocido y su volumen igual a 570,6 veces el cuadrado de dicho número. Se piden las dimensiones.

13. Tres hombres (A, B y C) tienen cada uno una cierta cantidad de dólares. A dice: «Si tuviera 121 dólares más tendría tantos como B y C juntos». B dice: «Si tuviera 121 dólares más, tendría el doble que A y C juntos». C dice: «Si tuviera 121 dólares más, tendría tres veces más que A y B juntos». ¿Cuántos dólares tiene cada uno?

14. Un hombre tiene 10 ovejas, que conserva hasta que tienen 10 años de edad. Estas producen un cordero cada año y cada uno de esos corderos y su progenie producen un cordero cuando tienen un año de edad. ¿Cuál es la progenie de los corderos cuando tienen 10 años de edad?

15. Un caballero guardaba un cierto número de guineas en su bolsillo, pero por accidente perdió 70 de ellas; sin embargo, siguiendo su camino tuvo la buena fortuna de encontrarse una bolsa con dólares, que contenía tantos de estos como guineas tenía cuando salió de casa. Al final de su viaje calculó que si hubiera encontrado la mitad de tantas guineas como había perdido, además de esos dólares mencionados anteriormente, y seguidamente hubiera perdido un cuarto de todas las guineas con las que se encontró, tendría tantas como tenía cuando partió de viaje. Se pide el primer número. [Supón una tasa de cambio de 4 $ = 1 guinea].

16. Tenemos un campo liso y triangular rectangular
el cual un acre y medio exactamente tiene.
Su cuadrado inscrito se ha encontrado, del mismo modo,
que es solo 10/16 de un acre del terreno.
Desde aquí, mediante una simple ecuación, calcula
la base, el cateto y la hipotenusa.

17. Dos mozos se ponen de acuerdo para beber un cuarto de cerveza fuerte entre ambos de dos sorbos, o un trago, cada uno. Ahora bien, habiendo el primero dado lo que se suele llamar «un ojo morado», o bebido hasta que la superficie del líquido tocó el borde contrario del fondo del recipiente, le dio el resto al otro. ¿Cuál es la diferencia de sus partes, suponiendo que la jarra fuera un cono truncado de 5,7 pulgadas de profundidad, con un diámetro superior de 3,7 pulgadas y uno inferior de 4,23 pulgadas?

18. Las acciones de A eran a las de B lo que 3 es a 4. El dinero de cada uno de ellos estuvo en uso tantos días como su número en dólares. A salió con 330 $ y B con 480 $. Calcula la inversión en acciones de cada uno de ellos mediante análisis aritmético.

19. Un cubo pequeño, lleno hasta un tercio de su capacidad, tiene 8 pulgadas de altura, siendo su diámetro superior e inferior de 7 pulgadas y 6 pulgadas, respectivamente. ¿Qué tamaño tiene la rana que, al saltar dentro del cubo, hace que el agua ascienda 3 pulgadas?

20. Un chico subido en lo alto de una torre, cuya altura es de 60 pies, observa a otro chico corriendo hacia el pie de la torre a una

velocidad de 5 millas por hora en el plano horizontal. ¿A qué velocidad se está acercando al primero cuando se encuentra a 80 pies de la base de la torre?

21. En el taller de un mecánico vi dos ruedas de 4 pies de diámetro colocadas de tal modo que la primera estaba en contacto con un poste vertical y la segunda a nivel con ella, a una distancia tal que la línea trazada desde el extremo superior del poste hasta el suelo y que pasa por encima de una y por debajo de otra formaba una tangente a ambas; por otro lado, una segunda línea desde el mismo punto superior que pasara sobre la segunda rueda y tocara su periferia alcanzaría el suelo a 10 pies de la primera línea. Se pide al altura del poste.

¿Qué están haciendo?

Situaciones populares para los problemas

Algunos problemas descriptivos han alcanzado fama, en el sentido de que se usan una y otra vez en diferentes épocas y lugares. Tales problemas se han convertido en una conveniente plantilla para concebir otros nuevos. El contexto social se cambia para ajustarse al entorno adecuado, pero por lo general se considera que el contenido matemático es el mismo.

A continuación tenemos una serie de problemas, todos ellos emanados de la situación matemática descrita como «el problema de las 100 aves». El problema implica una situación indeterminada que ha de ser resuelta. Se trata de uno de los primeros problemas de este tipo en la historia de las matemáticas. Si bien el problema existe desde hace miles de años, el nombre de «100 aves» le fue dado por el historiador y traductor de libros chinos de matemáticas Louis van Hee (1873-1951) a principios del siglo XX.

Del Manual de matemáticas de Zhang Qiujian, China, circa siglo V a. C.:

Un gallo vale 5 monedas; una gallina, 3 monedas; y tres pollitos, 1 moneda. Con 100 monedas compramos 100 de ellos. ¿Cuántos gallos, gallinas y pollitos tenemos?

Procedente de Mahavira, en India, circa 850 d. C.:

Los pichones se venden a razón de 5 por 3 panas, los pájaros sarasa a razón de 7 por 5 panas y los pavos reales a razón de 3 por 9 panas. A un hombre se le dijo que trajera a esos precios 100 pájaros por 100 panas para que fueran una diversión para el hijo del rey, y fue enviado a hacerlo. ¿Qué cantidad entrega por cada una de las variedades de pájaro que compra?

En la Europa medieval, circa 880:

Un mercader quería comprar 100 cerdos por 100 peniques. Por un verraco pagó 10 peniques y por una puerca 5 peniques, mientras que pagó 1 penique por una pareja de lechones. ¿Cuántos verracos, puercas y lechones tiene que haber para que pueda haber pagado exactamente 100 peniques por 100 animales?

En el mundo islámico medieval:

Un baño turco tiene 30 visitantes al día. La entrada para los judíos cuesta 3 dírhams, para los cristianos 2 dírhams y para los musulmanes 1/2 dírham. Los baños ganan 30 dírhams. ¿Cuántos cristianos, judíos y musulmanes los utilizaron?

En la Alemania del siglo XVI:

Veinte personas —hombres, mujeres y niñas— se beben 20 peniques de vino. Cada hombre paga 3 peniques, cada mujer 2 peniques y cada niña medio penique. Se pide el número de cada uno.

En la Inglaterra victoriana, 1880:

Si 20 hombres, 40 mujeres y 50 niños reciben 350 £ por siete semanas de trabajo, y dos hombres reciben tanto como tres mujeres o cinco niños, ¿cuánto recibe una mujer por una semana de trabajo?

Una versión que se ha repetido en los libros ingleses de matemáticas desde la época de Alcuino, a finales del siglo viii:

Un total de 100 fanegas se distribuyen entre 100 personas, de tal modo que cada hombre recibe 3 fanegas, cada mujer 2 fanegas y cada niño 1/2 fanega. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay?

Como ejercicio complementario, el diligente lector puede buscar otras variaciones de este problema en los libros de matemáticas.

Capítulo 16
Problemas de cálculo del siglo XIX

Los visitantes de la Exposición del Centenario de Estados Unidos, celebrada en Filadelfia en 1876, observan el futuro. Este grabado de la época los muestra maravillándose ante el colosal motor de vapor Corliss de 700 toneladas, que podía generar una potencia de 1.600 caballos de fuerza.

Si bien durante el siglos XIX Estados Unidos y Gran Bretaña se encontraban inmersos en la era industrial, los problemas de cálculo aplicado eran más bien académicos y no parecían reflejar las necesidades sociales de la época. No obstante, dos de los problemas seleccionados que aparecen más abajo tratan sobre el uso del vapor de agua, una concesión a la nueva era.

Problemas

1. Determina las dimensiones del triángulo ACD que sea menos isósceles y pueda circunscribir un círculo dado.

2. Determina el cilindro más grande que pueda inscribirse en un cono dado.

3. Encuentra el valor mayor de y en la ecuación $a^4x^2 = (x^2 + y^2)^3$.

4. Determina los diferentes valores de x cuando en $3x^4 - 28a^3 + 84a^2x^2 - 96a^3x + 48b^4$ se convierte en un máximo o un mínimo.

5. Tenemos la fracción $ax/(a - x)$; conviértela en una serie infinita.

6. Demuestra geométricamente que un hipocicloide es una línea recta cuando el radio del círculo que gira es la mitad del radio del círculo fijo.

7. Un ferrocarril que va a una velocidad de 30 millas por hora embiste un montón de nieve dejado por una ventisca y se detiene al cabo de 200 yardas. Asume que el montón de nieve ofrece una resistencia constante al paso del tren y calcula durante cuánto tiempo el tren se mantiene en movimiento. [1 milla = 5.280 pies; 1 yarda = 3 pies].

8. Hay que fabricar un depósito de agua de cobre con forma de paralelepípedo rectangular. Si su longitud ha de ser a veces su anchura, ¿cómo ha de ser de alto para que dada una capacidad cueste lo menos posible construirlo?

9. Demuestra que las curvas $x - y = a$ y $2xy = b$ se cruzan en ángulo recto.

10. Un hombre camina por un puente a una velocidad de 4 millas por hora cuando un barco pasa justo por debajo de él navegando a 8 millas por hora. El puente está a 20 pies por encima del barco. ¿A qué velocidad se están separando el barco y el peatón 5 minutos después de que el barco pase por debajo del puente?

11. Se ha de fabricar una lata cilíndrica de tomate con una capacidad dada. Encuentra cuál ha de ser la relación entre la altura y el radio de la base para que se utilice la menor cantidad posible de hojalata.

12. El coste por hora de mantener navegando un determinado barco de vapor es proporcional al cubo de su velocidad en aguas tranquilas. ¿A qué velocidad debe navegar para realizar con el menor gasto posible un viaje río arriba contra una corriente de 4 millas por hora?

13. Una bala de rifle es disparada contra una plancha de 3 pulgadas de grosor, cuya resistencia origina un frenado constante pero desconocido de su velocidad. Su velocidad al entrar en la plancha es de 1.000 pies por segundo y al dejarla atrás es de 500 pies por segundo. ¿Cuánto tarda la bala en atravesar la plancha?

14. Un leñador comienza a cortar un árbol de 4 pies de diámetro hasta alcanzar la mitad. Una cara del corte es horizontal y la otra se inclina hacia la horizontal en un ángulo de 45°. Encuentra el volumen de la madera que ha cortado.

15. Una serie de círculos tienen sus centros sobre una hipérbola equilátera que los atraviesa. Demuestra que quedan envueltos en

una lemniscata.

¿Qué están haciendo?

Generar gráficamente una sección cónica, la parábola

La ilustración de la figura 16.1 pertenece a De la medida, de Alberto Durero, publicado en 1525. Durero (1471-1528) fue un artista y grabador alemán, pero también era matemático y fabricante de instrumentos. Estaba especialmente interesado en la relación entre el arte y las matemáticas. Utilizó técnicas de proyección, prefigurando así la geometría descriptiva, para explorar la intersección de planos y sólidos. En la página 33 de su obra demuestra que la intersección de un plano con un cono recto en un ángulo agudo con respecto al eje del cono produce una parábola. Un error de impresión desplaza la parábola resultante, que está torcida; ha de ser girada 90º en el sentido de las agujas del reloj para que los puntos h y f que se proyectan desde la imagen de la izquierda apunten hacia los puntos h y f de la imagen de la derecha.

Hoy día, estas técnicas gráficas se siguen usando en ocasiones para explorar y resolver cuestiones matemáticas.

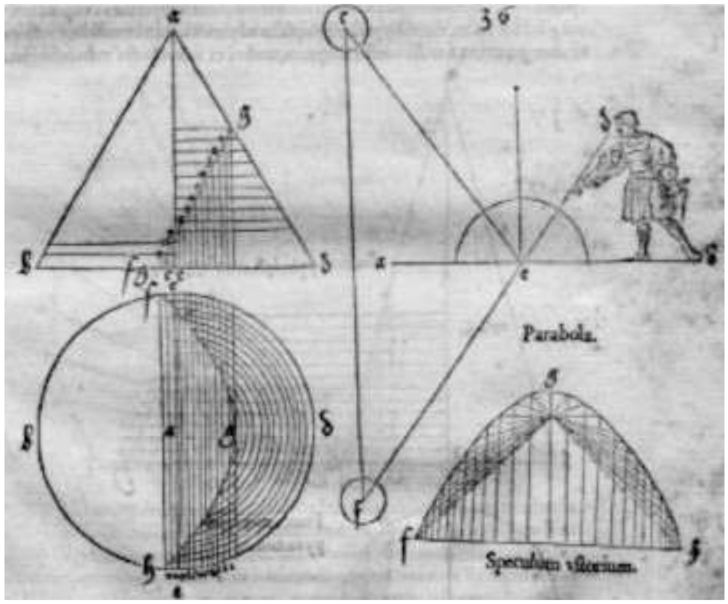


Figura 16.1. La proyección de una parábola como una sección cónica según Alberto Durero en 1525

Capítulo 17
Una muestra de los métodos utilizados para solucionar los problemas

Xilografía del libro de Johann Böschenstein, Rechenbiechlin (Augsburgo, 1514). La escena muestra a una persona utilizando un pizarrín para resolver un problema usando los «nuevos» numerales arábigos.

Es probable que mientras leías los capítulos anteriores te hayas preguntado: «¿Cómo lo hicieron los lectores originales?». En los siguientes ejemplos se muestra el modo en que se pudieron haber resuelto en su época estos problemas históricos con los métodos disponibles entonces y también cómo los resolvería ahora un estudiante. Recuerda que con anterioridad al siglo xvii los problemas matemáticos se planteaban descritos con palabras. El uso de los símbolos algebraicos apareció posteriormente. Por lo tanto, los métodos utilizados para resolver problemas en los siglos anteriores no necesariamente contienen el simbolismo algebraico tal cual lo conocemos.

En el caso de los ejemplos siguientes, cuando los resultados sean tan complejos que requerirían una extensa explicación escrita, he utilizado algunos símbolos o abreviaturas adecuados. En algunos casos he proporcionado una breve explicación referente al método utilizado; no obstante, en otros he dejado los cálculos para que el lector los descifre matemáticamente. También hay algunas cuestiones pertinentes para que el lector las considere.

Caso 1: la antigua Babilonia (c. 2000-1600 a. C.)

El problema se encuentra en la tablilla VAT 6598 del Museo de Berlín:

¿Cuál es la longitud de la diagonal de una puerta de 40 de altura y 10 de anchura?

Solución histórica

Los cálculos babilónicos se realizaban utilizando el sistema sexagesimal (en base 60). Para facilitar su comprensión, nosotros resolveremos el problema utilizando el más familiar sistema de notación decimal.

Dándose cuenta de que la altura y la anchura forman un triángulo rectángulo, el escriba utilizaría el razonamiento que más tarde sería conocido como «teorema de Pitágoras»:

Como el escriba sabe que > 40 (todos los escribas del mundo antiguo eran hombres), supone que la solución es 41 y luego realiza el cálculo:

1.700/41 = 41,463; (41 + 41,463)/2 = 41,23; 41,23 × 41,23 = 1.699,9.

Y llega a la conclusión de que = 41,23.

Solución moderna

Hoy día un estudiante dibujaría la puerta, señalaría en ella los datos y las incógnitas, reconocería que se trata de una aplicación del teorema de Pitágoras y calcularía (40)2 + (10)2 = 1.700 utilizando su calculadora. La diagonal resulta tener una longitud de 41,2311.

Caso 2: el antiguo Egipto

Los problemas del 24 al 27 del Papiro matemático Rhind (1650 a. C.) tratan de lo que hoy reconoceríamos como hallar la solución de sencillas ecuaciones lineales. Presentamos más abajo el problema 26 y su solución histórica mediante la «posición falsa». En este caso, el escriba supone cuál podría ser el valor de la solución. Su suposición se sustituye en el problema y se obtiene una respuesta. Si la solución no es correcta, la suposición se manipula matemáticamente para que sí lo sea.

Una cantidad y su cuarta parte se convierten en 15.

Solución histórica

Dado: Objetivo:

Una cantidad y su cuarta parte. 15

Suposición: 4; por lo que $4 + 4/4 = 5$; $5 \neq 15$.

5 no es correcto, pero $5 \times 3 = 15$.

5 es 1/3 de la solución; por lo tanto,

$(4 \times 3) + ([4 \times 3]/4) = 15$. 15

La cantidad deseada debe de ser 4×3, o 12.

$12 + 12/4 = 15$. ¡Objetivo conseguido!

Solución moderna

Si x es la cantidad desconocida, entonces $x + x/4 = 15$.

Simplificando haciendo uso del álgebra: $4x + x = 60 \Rightarrow 5x = 60$, $x = 12$.

Si bien «suponer» la solución a un problema puede parecer algo inusual, ¿lo es verdaderamente? ¿Puedes proporcionar ejemplos donde la suposición o aproximación a una respuesta formaría parte del proceso de solución de un problema?

Caso 3: la antigua China

El séptimo problema del capítulo 8 del Jiuzhang suanshu (c. 100 a. C.) dice lo siguiente:

Tenemos cinco vacas y dos ovejas que cuestan 10 liang de plata. Dos vacas y cinco ovejas cuestan 8 liang de plata. ¿Cuánto cuestan una vaca y una oveja, respectivamente?

Solución histórica

El escriba chino dispondría sus tablillas de cálculo de bambú sobre la mesa de calcular del siguiente modo:

$$\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 5 & 2 \\ 8 & 10 \end{array}$$

Seguidamente multiplicaría la primera columna por 5 y la segunda columna por 2:

$$\begin{array}{cc} 2(5) & 5(2) \\ 5(5) & 2(2) \\ 8(5) & 10(2) \end{array} = \begin{array}{cc} 10 & 10 \\ 25 & 4 \\ 40 & 20 \end{array}$$

Luego sustraería los términos de la segunda columna a la primera y obtendría la siguiente configuración:

$$\begin{array}{cc} 0 & 10 \\ 21 & 4 \\ 20 & 20 \end{array}$$

De lo cual leería que 21 ovejas = 20 liang de plata, o que una oveja cuesta 20/21 de liang de plata. Sustituyendo este precio en la disposición de la segunda columna, el escriba encuentra que:

10 vacas + (20/21)(4) liang = 20 liang

10 vacas cuestan 20 - 4,05 liang o 1 vaca cuesta 1,52 liang

¿Comprendes cómo lo ha hecho?

Solución moderna

Hacemos que el coste de una vaca sea *x* y el coste de una oveja *y*:

$$5x + 2y = 10$$
$$2x + 5y = 8$$

Resolviendo el sistema de forma simultánea:

$$2(5x + 2y = 10) \Longrightarrow 10x + 4y = 20$$
$$-5(2x + 5y = 8) \Longrightarrow -10x - 25y = -40$$

Sumando las dos ecuaciones tenemos -21y = -20, o y = 20/21 de liang. Si sustituimos el valor de y en cualquiera de ambas ecuaciones y resolvemos x, tenemos que x = 1,52 liang. Por lo tanto, una oveja cuesta 20/21 de liang y una vaca 1,52 liang.

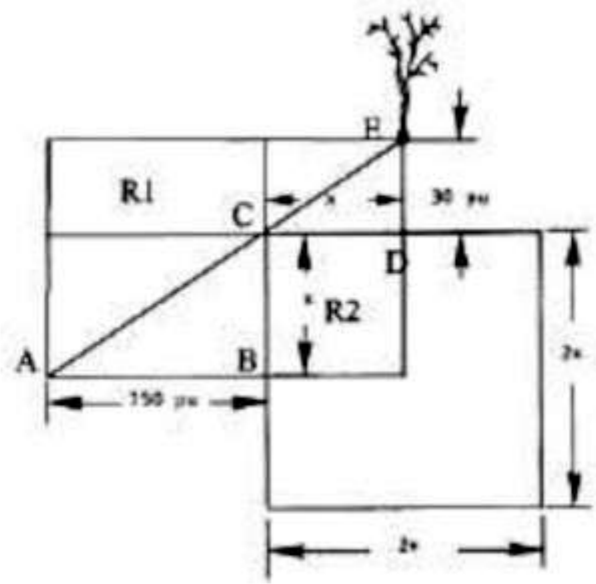
Caso 4: la antigua China

El problema 19 del Jiuzhang suanshu (c. 100 a. C.) dice lo siguiente:

Una ciudad cuadrada amurallada de dimensiones desconocidas tiene puertas en el centro de cada lado. Se sabe que hay un árbol a 30 bu de la puerta norte y uno puede ver el árbol si se encuentra a 750 bu de la puerta oeste. ¿Cuáles son las dimensiones de la ciudad?

Solución histórica

Los chinos visualizaban la situación tal cual se muestra debajo y obtenían la solución utilizando el álgebra geométrica:



Un escriba que estuviera trabajando en este problema buscaría rectángulos que contuvieran incógnitas y datos. R1 y R2 satisfacen esta condición y tienen la misma área. Por lo tanto (750) (30) = x2, de donde:

$$2x = \sqrt{(4)(30)(750)} \Rightarrow 2x = 300\ bu, \text{una milla china}$$

Solución moderna

Un estudiante dibujaría el diagrama anterior y se fijaría en los triángulos que contuvieran los datos y la incógnita. El triángulo *ABC* = triángulo *CDE*. Entonces, de la relación de sus lados se obtiene:

$$\frac{750}{x} = \frac{x}{30} \Rightarrow x^2 = 30 \times 750$$
$$x = 150,\ \ 3x = 300\ bu$$

Caso 5: el mundo islámico

Se trata de un problema sacado del Álgebra de al-Khwarizmi (c. 830):

Un cuadrado y diez veces su raíz equivalen a 39 dírhams. ¿Cuál es el valor de la raíz?

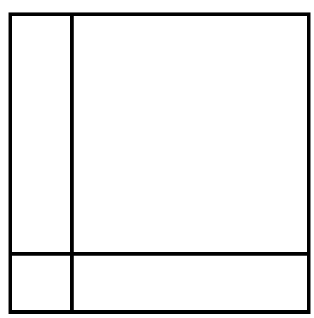
Solución histórica

Al-Khwarizmi describe la solución técnica tal y como se muestra a continuación. (Para comodidad del lector, la raíz deseada se representa por x).

Construye un cuadrado que represente el término cuadrado.

Divide 10 entre 2, obteniendo 5; añade al cuadrado dos rectángulos $5 \times x$.

Extiende sus lados hasta completar el cuadrado mayor que resulta.



Se sabe que las áreas del cuadrado mayor y de los rectángulos equivalen a 39 dírhams. Dado que el cuadrado pequeño tiene un área de 25, el área del cuadrado grande es:

25 + 39 = 64 y su lado (5 + x) = 8

Por lo tanto, x = 3 dírhams.

Solución moderna

El estudiante reconocería que se las tiene que ver con una ecuación cuadrática, $x^2 + 10x - 39 = 0$. Compararía esto con la fórmula general de las ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ y aplicaría la fórmula para las raíces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 39}}{2} \Rightarrow \frac{-10 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$x = \frac{-10 \pm 16}{2} \Rightarrow x = (3, -13)$$

La respuesta encuentra ambas raíces. Recuerda que antes del siglo XVII las raíces negativas no se comprendían del todo y se ignoraban.

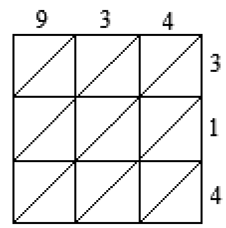
Caso 6: la Italia renacentista

En la Aritmética de Treviso (1478), el primer libro sobre la cuestión impreso en Europa, el autor muestra a los jóvenes mercaderes en formación cómo multiplicar dos números de múltiples dígitos.

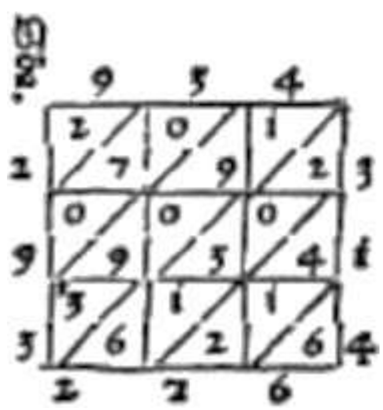
Halla el producto de 934 y 314.

Solución histórica

En esa época se utilizaban siete algoritmos diferentes para realizar una multiplicación. El que se muestra a continuación, llamado método de multiplicación de la gelosia, es quizá el más sencillo de seguir. El estudiante dibujaba una cuadrícula de 3 × 3 celdas partidas por la mitad, como se muestra en la imagen, y escribía un factor de la multiplicación en la parte superior y el otro factor en el lado derecho de la misma.



De este modo, cada fila y cada columna correspondían a un solo número. Seguidamente se calculaba el producto de la intersección de cada fila y cada columna, y se escribía en la casilla correspondiente, con los dígitos de las unidades por debajo de la diagonal bisectriz y los dígitos de las decenas por encima.



Luego se sumaban las entradas a lo largo de cada diagonal, comenzando desde la esquina inferior derecha. Los resultados se escribían por fuera del cuadrado grande, en el extremo inferior de las diagonales.

El producto se leía comenzando desde la parte superior del lado izquierdo hacia abajo y luego por la parte inferior, con lo que tenemos que

$$934 \times 314 = 293.276$$

¿Puedes seguir y comprender los pasos? Si es así, plantea tu propio problema de multiplicación y resuélvelo con este método.

Solución moderna

Hoy día un estudiante utilizaría su calculadora para conseguir el resultado deseado; pero de no ser así, lo más probable es que utilizara el método de multiplicación «hacia abajo».

$$\begin{array}{r} 934 \\ \times\, 314 \\ \hline 3736 \\ 9340 \\ 280200 \\ \hline 293276 \end{array}$$

Este sistema también se conocía durante el Renacimiento, pero era menos popular entre las personas que realizaban los cálculos. ¿Por qué un algoritmo para una operación matemática era más popular que otro?

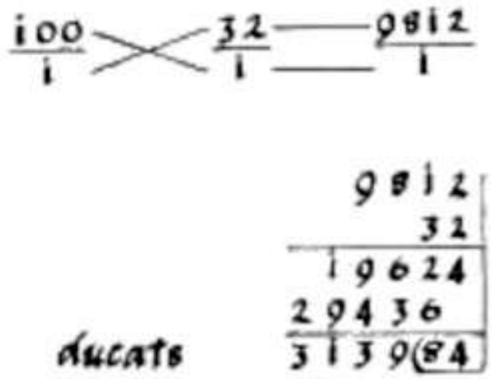
Caso 7: la Europa renacentista

El siguiente es un problema del siglo XV que requiere del uso de una regla de tres:

> *Si 100 libras de azúcar valen 32 ducados, ¿cuánto valdrán 9.812 libras?*

Solución histórica

Aplicando una regla de tres:



Solución moderna

Si 100 libras valen 32 ducados, entonces 32/100 = 0,32 ducados/libra. A partir de aquí, utilizando bien el sistema de multiplicación visto en el caso 6 o una calculadora, obtenemos que 9.812 × 0,32 = 3.139,84 ducados.

¿Qué método es mejor?

La Historia demuestra que todas las civilizaciones estuvieron interesadas en resolver problemas matemáticos. Los problemas sobre los cuales cavilaban nuestros antepasados tenían que ver frecuentemente con su propia supervivencia, aseguraban la armonía social y preparaban el camino hacia el futuro. Nuestros antecesores crearon técnicas y diversos esquemas para resolver estos problemas. Ya fuera asistidos por un ábaco, una cuerda con nudos o un grupo de varillas de contar, conseguían sus respuestas, las aplicaban y seguían andando el camino. La resolución de problemas matemáticos tiene una larga y fructífera tradición. No estamos solos en nuestros esfuerzos.

¿Qué están haciendo?

Problemas de sociedades del Renacimiento

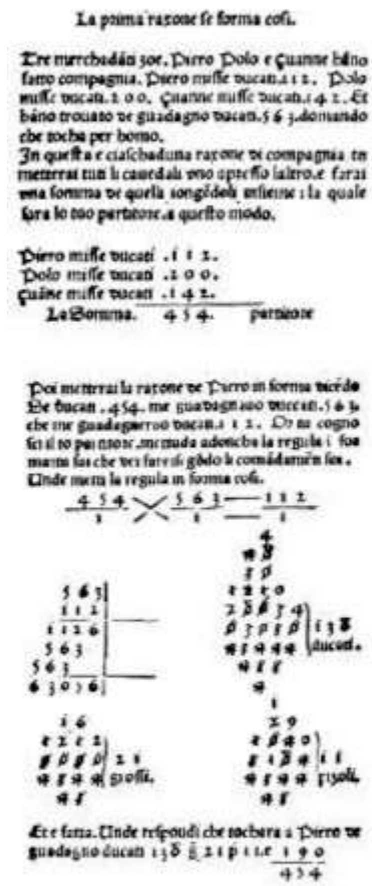
El problema de dos páginas que se muestra en la figura 17.1 está sacado de la Aritmética de Treviso (1478), el primer libro sobre la cuestión impreso en Europa. Está escrito en italiano. El problema trata sobre una sociedad: la distribución de costes y beneficios. Era una cuestión importante en los primeros libros de aritmética, que se centraban en las necesidades del comercio. El problema se enuncia como sigue:

> *Tres mercaderes, a saber, Piero, Polo y Zuanne, forman una sociedad. Piero pone 112 ducados, Polo 200 ducados y Zuanne 142 ducados. Se dan cuenta de que han ganado 563 ducados. Se pide la parte de cada uno.*

Seguidamente el autor da indicaciones de cómo resolver el problema. Primero se escribe la contribución de cada miembro y se suma, consiguiéndose la cantidad de 454 ducados; un número al que llama el divisor. Luego considera el caso de Piero, diciendo: «Si 454 ducados me hicieron ganar 563 ducados, ¿cuánto me harán ganar 112 ducados?». Resuelve esta proporción mediante una regla de tres utilizando el primer diagrama. El producto de 563 por 112 se halla mediante el «método del tablero de ajedrez», un algoritmo de multiplicación que reconocemos como el utilizado actualmente. Se obtiene el producto: 63.056.

A continuación este número es dividido utilizando el «método de la galera». El cociente hallado es 138 ducados, con un resto de 404. En este período de la historia, 1 ducado = 24 grossi y 1 grossi = 32 picoli. El resto, 404, es cambiado a 9.696 grossi y luego dividido entre 454. El resultado de la segunda división da 21 grossi y un resto de 162. Los 162 grossi se cambian a 5.184 picoli, y este número se divide entre 454. El resultado de los cálculos es que las ganancias de Piero son de 138 ducados, 21 grossi y 11 190/454 picoli.

Para obtener las parte de los demás socios se realizan cálculos semejantes.



La prima ratone se forma cosi.

Tre merchadàn sor, Piero Polo e Zuanne hano fatto compagnia. Piero misse ducati 112. Polo misse ducati 100. Zuanne misse ducati 142. Et hano trouato de guadagno ducati 563, domando che tocha per homo.

In questa e ciaschaduna ratone de compagnia tu metterai tutti li cauedali uno apresso laltro, e farai una summa de quelli songiondoli insieme: la quale sara lo tuo partitore, a questo modo.

Piero misse ducati .112.
Polo misse ducati .100.
Zuane misse ducati .142.
La Somma. 454. partitore

Figura 17.1. Reparto de beneficios en el siglo XV, un ejemplo de problemas de sociedades.

Capítulo 18

Y desde aquí, ¿hacia dónde? ¿A dónde quieres llegar?

Xilografía de la Introductio geographia de Petrus Apiano (1533/1534), el primer libro que consideró el uso de aplicaciones trigonométricas en el estudio de la geografía.

El objetivo de este libro es muy específico y limitado: fomentar el uso de los problemas matemáticos históricos en el aula. No obstante, los problemas descriptivos en sí mismos —su atractivo, interpretación, comprensión y el proceso que lleva a su resolución— son un tema amplio y complejo que afecta al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Existen dificultades concretas a la hora de enseñar el proceso de resolución de un problema mediante los problemas descriptivos, desde la capacidad lectora de los alumnos a sus habilidades organizativas, pasando por la relevancia cultural y económica de las situaciones discutidas. Cada una de estas cuestiones merece atención. Un ejemplo personal: una vez entregué a un grupo de alumnos una serie de problemas adaptados a los consumidores que trataban sobre la compra de gasóleo, solo para darme cuenta después, para mi disgusto, de que se trataba de estudiantes de familias pobres que no podían permitirse comprar gasóleo: calentaban sus casas con carbón.

Afortunadamente, existe una amplia y variada literatura que trata estas cuestiones y va desde obras básicas sobre la resolución de problemas como el clásico de George Polya *How to solve it* (1971), o *Creative problem solving in school mathematics* (2005), de George Lenchner, pensada más para los profesores, pasando por recopilaciones más modernas y completas de los diferentes puntos de vista y la investigación, como *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (2009), de Lieven Verschaffel y sus colegas. Los artículos de las revistas de profesores tratan con frecuencia la cuestión de la resolución de problemas.

Los problemas que a modo de ejemplo aparecen reunidos en este libro están destinados a la enseñanza general; por lo tanto, la dificultad que podía tener la resolución de los mismos se encontraba limitada. No obstante, resulta sencillo hallar colecciones de problemas más complicados, de esos que suponen un verdadero desafío —en especial los utilizados en los concursos y competiciones internacionales de matemáticas—. Los estudiantes especialmente dotados para ello deberían tener la posibilidad de intentar resolver esos problemas. Animo a los lectores a familiarizarse con este tipo de literatura, para así mejorar su comprensión general sobre el proceso de resolución de problemas. Y ahora retornemos a la cuestión de utilizar problemas históricos en la enseñanza en las aulas.

Los problemas seleccionados y ofrecidos en este libro no son sino una muestra de los miles de ejercicios para estudiantes que han sido planteados desde los comienzos de la instrucción matemática formalizada. A los lectores que deseen encontrar colecciones más amplias de problemas les animo a explorar el contenido de las referencias que se ofrecen en la bibliografía final. Las bibliotecas grandes, como las asociadas a las instituciones universitarias, contienen muchos textos antiguos sobre matemáticas de los que se pueden entresacar problemas. De vez en cuando, en las librerías especializadas en libros usados se encuentran libros de matemáticas a la venta. En mi caso, he llegado a encontrar antiguos libros de texto norteamericanos de matemáticas en mercadillos. Internet resulta también un fructífero y sencillo sistema para conseguir problemas antiguos de matemáticas; en especial, páginas web como MathDL (la biblioteca digital de la *Mathematics Association of America*; www.mathdl.maa.org) y The Math Forum (www.mathforum.org), que contienen colecciones de problemas adecuados para su uso en la enseñanza primaria y secundaria, así como a nivel universitario.

Además, la versatilidad y capacidad de enseñanza de los problemas matemáticos históricos ha de ser explorada mediante debates y trabajos de clase, incluidos proyectos de estudio. Por ejemplo, después de que los estudiantes hayan considerado y resuelto problemas de un período histórico o una región geográfica concretos, podemos dirigir su atención hacia cuestiones como: «¿Qué se puede decir de la vida de estas personas?», «¿En qué trabajaban?», «¿Cuál era su sistema monetario?», sobre las que se puede debatir en clase. De los problemas más antiguos se puede aprender sobre la dependencia humana respecto a la agricultura: el cultivo, almacenamiento, transporte y distribución del grano. En los problemas de épocas posteriores nos encontramos con el auge del comercio y el desarrollo de unas sofisticadas matemáticas mercantiles, en las cuales aparecen conceptos como porcentajes, beneficios, pérdidas, comisiones, tasas de aduana e impuestos. El crecimiento del comercio europeo a partir de la Edad Media produjo viajes de exploración, lo que llevaría a indagar sobre el modo en que las situaciones descritas en los problemas nos hablan sobre ello: «¿Qué productos se importaban?», «¿Cuáles se exportaban?», «¿Cómo influyó el comercio de la pimienta en el comercio europeo?», «¿Por qué tenían tanta importancia las especias en esa época?», «¿De dónde procedían las especias?», «¿Quién controlaba el comercio de las especias?»... Una expedición por el mundo del conocimiento que podría seguir y seguir. Otra cuestión histórica sobre la que se puede profundizar sería: «¿Cómo aparece representada la guerra en los problemas?», «¿La guerra afectó a las matemáticas?», «¿Lo sigue haciendo en la actualidad?». Gran parte de lo que se conoce sobre las propiedades de la parábola se debe a la investigación realizada durante el Renacimiento sobre las trayectorias de la artillería (Swetz 1989).

Estudiando el contenido de los problemas matemáticos históricos se abren ventanas a la historia humana que permiten obtener una perspectiva más amplia, clara y perceptiva del paisaje general. La evolución de los estándares de medidas y el desarrollo de los sistemas monetarios quedan expuestos. Los problemas matemáticos históricos proporcionan una importante vía de conexión con la enseñanza interdisciplinar. Las cuestiones tratadas en las clases de historia universal pueden coordinarse con los apropiados problemas históricos. Un proyecto de clase con el que personalmente he tenido éxito en varias ocasiones es, tras estudiar los problemas egipcios que tratan sobre la construcción de pirámides, hacer que los estudiantes investiguen las pirámides en otras sociedades: «¿Sabías que los babilonios tenían estructuras con forma de pirámide llamadas zigurates, al igual que los chinos, los incas y los aztecas?», «¿Qué similitudes o diferencias matemáticas tienen sus pirámides?», «¿Los montículos de tierra construidos por la cultura del Misisipi eran realmente pirámides de tierra?», etc. Y la exploración podría continuar. Aventuras de descubrimiento que, sinceramente, espero que tengan lugar en las aulas de los profesores que hayan leído este libro.

Agradecimientos

Todos los libros reciben contribuciones e influencias de muchas fuentes. Me gustaría destacar a las personas e instituciones que me han sido especialmente útiles a la hora de redactar esta obra. Material histórico como los grabados y xilografías con más de cien años de antigüedad pertenecen al dominio público, a menos que se den circunstancias especiales relacionadas con su existencia y uso. Si tales condiciones se dan, he intentado respetarlas. Siempre que ha sido posible, he identificado los orígenes históricos de los objetos utilizados. Debo un agradecimiento especial por la consecución de los permisos para reproducir:

Página 4, frontispicio, escena de naufragio: John Heilbron, Geometry civilized.

Página 12, frontispicio de Euler: Mathematical treasures, tomada de la sección «Convergence» de Loci, Mathematical Association of America (MAA) Mathematical Sciences Digital Library website, http://mathdl.maa.org/mathDL, y la Colección Plimpton-Smith, Bibliotecas de la Universidad de Columbia.

Capítulo 1. Me gustaría agradecer a Michel Lokhorst y Sense Publishers (Rotterdam) su permiso para volver a publicar aquí el capítulo «Word Problems: footprints from the history of mathematics», mi contribución al libro Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations, L. Verschaffel et al. (eds.) (2009), pp. 73-93.

Capítulo 1, ilustración de Kepler: «Astronomia Nova, de Johann Kepler», tomada de la sección «Convergence» de Loci, marzo de 2010, página web de la MAA Mathematical Sciences Digital Library, http://mathdl.maa.org/mathDL.

Capítulo 2, figura 2.4: Colección Plimpton-Smith, Bibliotecas de la Universidad de Columbia.

Capítulo 3, p. 65, YBC 7289: foto cortesía de Ulla Kasten, Colección babilónica de Yale, Universidad de Yale.

Capítulo 3, figura 3.1a, dibujo de YBC 7289: ©Mathematical Association of America 2011. Todos los derechos reservados.

Capítulo 4, p. 75, escena egipcia: fotografía del archivo de Jon Bodsworth.

Capítulo 7, p. 112, ilustraciones de Lilavata para los problemas 19 y 20: Colección Plimpton-Smith, Bibliotecas de la Universidad de Columbia.

Capítulo 8, p. 116, sabios árabes: Aramco World.

Capítulo 9, problemas 30-38: traducción de Levi ben Gershon, Maaseh hoshev [El arte del cálculo], realizada por Shai Simonson, Stonehill College, MA.

Capítulo 11, problemas 18, 19, 22, 30: tomados de Sacred mathematics: Japanese temple geometry, de Fukagawa Hidetoshi y Tony Rothman (Princeton University Press, 2008), con permiso de los autores y de Princeton University Press.

Capítulo 11, pp. 146, 149, 150, 152 y 156, ilustraciones de la compra de aceite, hallar los números que faltan, los ratones que se reproducen, la división de la tela bajo el puente y la colocación de barriles: colección personal de Fukagawa Hidetoshi.

Capítulo 13, p. 167, retrato de Lewis Carroll: Colección Plimpton-Smith, Bibliotecas de la Universidad de Columbia.

Capítulo 14, figura 14.1, página del libro de cifras de Danner: imagen cortesía del museo The Hershey Story, en Chocolate Avenue.

Capítulo 14, figura 14.2, página de Lincoln: Colección Plimpton, Biblioteca de Libros Raros y Manuscritos, Bibliotecas de la Universidad de Columbia.

Capítulo 16, figura 16.1, ilustración de Durero: Colección Plimpton-Smith, Bibliotecas de la Universidad de Columbia.

Soluciones a los problemas numerados

3. La antigua Babilonia

1: 18 unidades. 2: 11,7 unidades. 3: 3,05 unidades. 4: 30 y 25 unidades. 5: 31,25 unidades. 6: 32 y 24 unidades. 7: 13 codos. 8: 4,375 shekel y 4,125 shekel. 9: 171,428 unidades cuadradas y 128,57 unidades cuadradas. 10: 2.500 trabajadores; 833 1/3 cestas de cebada. 11: Nivel superior, 1/6 de día; nivel medio, 1/3 de día; nivel inferior, 1/2 día. 12: El granero pagará 16,4571 días de trabajo. 13: 1/2 unidad. 14: 180 unidades. 15: 1,6 shekel. 16: 4,5 unidades cúbicas. 17: 4 meses, 24 días. 18: 12 varas. 19: 1/2 unidad. 20: 30 unidades. 21: 30 unidades y 25 unidades. 22: 1/6 de unidad. 23: 30 unidades y 20 unidades. 24: 30 unidades y 20 unidades. 25: Longitud, 5 varas; anchura, 1,5 varas; profundidad, 6 varas. 26: Área, 7,5 varas cuadradas; volumen, 3,7 varas cúbicas; trabajadores, 22,5 o 23; salarios, 138 sila. 27: 1.944 sar. 28: Se utiliza un trapezoide como aproximación. 29: 900 codos cuadrados. 30: 773 codos cuadrados.

4. El antiguo Egipto

1: 14,28 unidades. 3: La ración normal, 7 9/13 hogazas; la ración especial, 15 5/13 hogazas. 4: 315. 5: 40 hekat, 26 2/3 hekat, 20 hekat y 13 1/3 hekat. 6: 29,02 unidades cuadradas. 7: 340,34 codos cúbicos. 8: 12 codos y 5 codos. 9: 8 codos y 2 codos. 10: 25,82 codos. 11: 16 5/8. 12: 9. 13: 16,0206. 14: 6 codos y 8 codos. 15: Las raciones son como siguen: 7/16, 9/16, 11/16, 13/16, 15/16, 1 1/16, 1 3/16, 1 5/16, 1 7/16 y 1 9/16. 16: 1 + 1/2 + 16, 10 + 1/2 + 1/3, 20, 29 + 16 y 38a + 1/3. 17: 785,4 codos cúbicos. 18: El área del círculo se aproxima elevando al cuadrado 8/9, que es su diámetro; = 3,24. 19: 1.050, 1.200, 2.550, 5.100. 20: 390,5 codos. 21: 94,23 codos. 22: 5/6 de codos. 23: 5 1/25 palmos. 24: 3 1/3 pares al día. 25: 20 jarras.

5. La antigua Grecia

1: 8 y 12. 2: 4, 7, 9, 11. 5: 13 y 3. 6: 0,48 días. 7: 2 6/7 y 4 2/7. 8: 60 años de edad. 9: 2/5 de día. 10: 3 5/7 y 4 6/7. 11: 45, 37 1/2, 22 1/2. 12: 120 manzanas. 13: Su infancia, 14 años; su juventud, 7 años; su matrimonio, a la edad de 33 años; el nacimiento de su hijo, a la edad de 38 años; muerte de su hijo, a la edad de 80 años; su período de duelo, 4 años; la edad de Diofanto en el momento de su muerte, 84 años. 14: Cada gracia tiene 4k manzanas, deja 3k manzanas y se queda con k. Si hacemos que k = 1, entonces cada gracia y cada musa tuvo una manzana. 15: 144/37 horas. 16: 960. 17: 289/4 y 4 9/4 cuando k = 5. 21: Tienen una relación de 1:2:3. 24: 8,944 unidades cuadradas. 29: Una posibilidad: 9, 328 y 73.

6. La antigua China

1: 26 pulgadas. 2: El que paga 5 monedas recibe de vuelta 2 monedas; el que paga 3 monedas recibe 1,2 monedas, y el último pagador, 0,8 monedas. 3: Sabueso, 15,857 monedas; mapache, 31,714 monedas; zorro, 63,429 monedas. 4: 12. 5: Plata, 1,828 unidades; oro, 2,234 unidades. 6: 2 2/17 días. 7: 6 pies × 8 pies. 8: 12 pies 1 pulgada. 9: El caballo militar, 22,857 dan; el caballo normal, 17,143 dan; el caballo inferior, 5,714 dan. 10: 15,7068 días; el caballo bueno, 4.534,2408 li; el caballo inferior; 1.465, 7592 li. 11: Cuadrado, 239,682 bu; estanque, 60,318 bu. 12: No; área = 759,57 pasos cuadrados. 13: Un posible valor: 233. 14: 12 conejos y 23 faisanes. 15: 8 animales y 7 pájaros. 16: 60 días. 17: El primer día, 352,755 millas; el segundo día, 176,777; el tercero, 88,188; el cuarto, 44,094; el quinto, 22,047; el sexto, 11,023; el séptimo, 5,512. 18: 780 li. 19: 60 huéspedes. 20: Cada lado tiene 252 bu de largo. 21: 332, 253, 253 y 162, respectivamente. 22: 1,78125 dou. 23: El estanque tiene 5,6 pies de profundidad; las cañas tienen 8,6 pies y 6,6 pies de largo, respectivamente. 24: 2,5 días. 25: El que camina lento, 10,5 bu; el que camina rápido, 24,5 bu. 26: 28,142 pulgadas. 27: 29 pies. 28: Vaca, 2 6/7 cestas; caballo, 1 3/7 cestas; cabra, 5/7 de cesta. 29: La altura de la isla es de 4 li 55 bu. Se encuentra a 102 li 150 bu de distancia del poste delantero. 30: 238 pies. 31: 4 11/20 chi. 32: Profundidad del agua, 12 chi; longitud de la planta, 13 chi.

7. India

1: 59. 2: Una respuesta: caballos asavas, 42; caballos hayas, 28; camellos, 24; valor total, 262. 3: 3 1/7 yojana. 4: 5. 5: 45 perlas. 6: 10 unidades. 7: 89,94 pulgadas o 7,5 pies. 8: 7/2. 9: 540 monedas. 10: Altura, 8; área, 36. 11: 18 mangos. 12: 16 o 48. 13: 3 1/2 pies y 22 1/2 pies. 14: 4,38 días. 15: limones, 8; limonias, 5. 16: 72 abejas. 17: 317. 18: 100 panas. 19: Se encuentran a 12 hastas de distancia del pilar. 20: 50. 21: Altura, 12; segmentos de la base, 5 y

9; área, 84 unidades cuadradas. 22: 50 monedas. 23: rubí, 47/24; esmeralda, 47/30; perla, 47/300. 24: Lado vertical, 80; base, 60. 25: Área del campo, 108 unidades cuadradas; altura, 12; diagonal, 15,24. 26: 50 o 5. 27: 100 flechas.

8. El mundo islámico

1: 2,57066; 3,26993; 4,15941. 2: 5. 3: Una división: 6,345 y 3,655. 4: 4,26 y 5,74. 5: 6,0842 y 3,91577. 6: 6 y 4. 7: 5,0903. 8: 4,8 yardas. 9: 4 dírhams y 2 dírhams. 10: El marido, 1/4; el hijo, 3/10; las hijas, 3/20 cada una. 11: El marido, 0,183036; el hijo, 0,219644; las hijas, 0,10982 cada una. 12: 12. 13: 2 y 8. 14: 3. 15: 3,464. 16: 7 y 3. 17: 24. 18: 1 1/14. 19: 2 dírhams. 20: 3,0306 y 6,9694. 21: 6,0842 y 3,9158.

9. La Europa medieval

1: ¡No se puede! 2: 1,572 días. 3: 1002 nidos, 1003 huevos, 1004 pájaros. 4: Sobresaldrán 3 pies por encima del poste más pequeño. 5: 1, 3, 9 y 27. 6: 246 años y 210 días. 7: La respuesta es incorrecta. El valor del área delimitada es 523 de las áreas de las casas, pero se trata de un problema de «rellenar». Hay que acomodar las casas en el espacio disponible. La mejor distribución geométrica permite 519 casas. 8: 28. 9: 1 verraco, 9 puercas y 90 lechones. 10: 9 onzas de oro; 2 libras 3 onzas de plata; 6 libras 9 onzas de bronce; y 20 libras 3 onzas de plomo. 11: 3.600 sextarios corren por el primer tubo, 2.400 por el segundo y 1.200 por el tercero. 12: 400. 13: Da al primer hijo 10 frascas medio llenas y al segundo y al tercero 5 frascas llenas y cinco vacías. 14:

1.073.741.824 hombres. 15: Ninguna: dado que el buey va tirando de un arado, cubre sus propias huellas. 16: El hombre que habló primero tenía 4 bueyes y el que habló después, 8. 17: Tenemos que asumir algunas cosas:

1. Cada hermano se siente atraído solo por una de las mujeres del grupo.

2. Para que tenga lugar una transgresión, cada pareja «de riesgo» ha de quedarse a solas.

Las parejas hermano-hermana se representan por B1,S1; B2,S2; y B3,S3. Hagamos que las atracciones sean B1 S2; B2 S3; y B3 S1. Entonces B1B2 cruzan. B2 regresa y cruza con S1, dejando a S1 con B1. B2 regresa y cruza con su hermana S2. B2 se queda con S2 y S1, mientras que B1 cruza con S3. Ahora B1,S1 y B2,S2 están juntos, de modo que S3 va a buscar a su hermano y cruza con él. Hay otros modos de resolver el problema. 18: Los dos hijos cruzan el río y uno retrocede con la barca. El padre cruza con la barca y su hijo se la lleva de vuelta. El niño monta a su hermano y vuelven cruzar juntos. Entonces uno de ellos regresa para buscar a la madre, quien cruza a su vez. Con sus padres ya cruzados, el hermano que está con ellos vuelve con la barca para recoger a su hermano y reunirse ambos con sus padres en la otra orilla. 19: 1.000. 20: 7 acres. 21: 210 barriles. 22: 3 hombres, 5 mujeres y 22 niños. 23: Cada maestro albañil, 4,54 peniques; el aprendiz, 2,27 peniques. 24: 19 camellos, 1 asno y 80 ovejas. 25: 1 32/100 besantes. 26: 6,78 y 8,37 libras, respectivamente. 27: Trabajó 13

7/11 días; no trabajó 16 4/11 días. 28: Trigo, 26 7/10; cebada, 26 7/10; mijo, 12 2/10; judías, 12 2/10; lentejas, 12 2/10. 29: El primer caballo, 12 besantes; el segundo caballo, 14 besantes; el primer hombre, 8 besantes; el segundo hombre, 12 besantes. 30: 13,483. 31: 64 17/131. 32: 9 6/11 dinares. 33: Aproximadamente 6 horas 25 minutos 43 segundos. 34: 2/7 de la medicina cara y 5/7 de la medicina barata. 35: Ganó, obteniendo un beneficio de 103,366 dinares. 36: 11,5 y 1,5. 37: El primer número, 14,34; el segundo número, 14,26. 38: 178,3166 y 58,8.

10. La Europa renacentista

1: 18 unidades. 2: 9,615 y 0,385. 3: 35,09 días. 4: 47 piezas; las partes son 33, 13 y 7. 5: precio, 120 francos; impuestos, 10 francos.

7: 0,344 escudos/libra. 8: 2 unidades cuadradas. 9: R2 (- 2). 10: 28 mendigos; 220 peniques. 11: 10. 12: 301. 13: Tasa, 7,74 denarios; precio por pescado, 21,82 denarios. 14: Base, 12; hipotenusa, 13. 15: 5 y 8. 16: 6,8756. 17: 8 lotes al día. 18: 7 días. 19: El primer hombre, 33 denarios; el segundo hombre, 76 denarios; el tercer hombre, 65 denarios; el cuarto hombre, 46 denarios; en la bolsa 119 denarios. 20: Se necesitarán cuatro viajes, y llegarán 20 medidas de grano. 21: 9,8235 y 7,1176 denarios. 22: 0,833 braccia. 23: Porcentaje/proporciones, 0,307, 0,269, 0,242, 0,181; partes, 254,81, 223,27, 200,86, 150,23. 24: 62,6 días, 7,8 braccia, y 46,956 braccia. 25: 4,615, 12,308, 6,154. 26: No; el hombre que puso tres hogazas de pan tendría que haber recibido 4 besantes, y el otro, 1 besante. 27: 1,62 horas. 28: 12% de beneficio.

29: Cinco medidas de vino barato con dos medidas de vino caro. 30: 10 1/2 denarios. 31: 12 denarios en cada feria. 32: 1.048.576 denarios. 33: 800 ducados, 2,76 grossi. 34: 9, 16 y 13 denarios, respectivamente. 35: Tomasso, 1.052 ducados, 11,273 grossi; Domenego, 942 ducados, 3,674 grossi; Nicolo, 1.173 ducados, 22,55 grossi. 36: 16% más. 37: 15,34 florines/hundredweight. 38: 44,3 liras y 55,7 liras, respectivamente. 39: 6 meses. 40: 7,966 y 15,93 unidades. 41: 20 unidades.

11. Problemas de los templos japoneses

1: Diámetro, 9 unidades, y lado, 4 unidades; o diámetro, 7,8242, y lado, 0,6793. 2: n = 537. 3: 7.789. 4: n = 4; precio = 60 yenes. 5: 59 años de edad.

6: $$r = \frac{ab}{2c + 3(a+b)}$$

7: Utilizando la fórmula de Herón $$r = \sqrt{\frac{(AD)(BE)(CF)}{AD + BE + CF}}$$

9: R es igual al radio de la esfera y r el radio de los círculos que la cubren. Consideremos los polígonos y poliedros regulares Pn que pueden ser inscritos en una esfera y cumplen las siguientes condiciones:

1. Los vértices de *Pn* determinarán los centros de los círculos $O_i(r)$ que cubren la superficie de la esfera.
2. Cada cara de *Pn* es un triángulo equilátero.

Los siguientes valores de *n* demuestran ser las soluciones deseadas:

$n = 3$: P_n es un triángulo equilátero y $r = \frac{\sqrt{3}}{2} R$

$n = 4$: P_n es un tetraedro y $r = \frac{2}{\sqrt{6}} R$

$n = 6$: P_n es un octaedro y $r = \frac{\sqrt{2}}{2} R$

$n = 12$: P_n es un icosaedro y $r = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} R$

10: Área del pentágono, $3{,}847a^2$; área del n-gono: $\frac{na^2}{4}\cot\frac{180}{n}$

12: 3,932 y 5,796.

13: $a = \frac{BC(AC-2b)}{2(AC-b)}$

14: 10,1 veces. 15: 2,43 medidas. 16: Si hacemos que el recipiente sea T, la damajuana pequeña l_1 y la damajuana grande l_2, entonces:

1. Con l_1 saca aceite tres veces de T y llena l_2. Entonces en T queda 1 sho de aceite, con 7 sho en l_2 y 2 sho en l_1.
2. Seguidamente vierte el contenido de l_2 en T, de tal modo que en T haya 8 sho de aceite, 2 sho en l_1 y nada en l_2.
3. Vierte el contenido de l_1 en l_2. Ahora hay 8 sho en T, l_1 está vacío y en l_2 hay 2 sho.
4. Utiliza l_1 para sacar 3 sho de aceite de T y verterlos en l_2, con lo que en T quedan 5 sho de aceite y otros 5 sho de aceite en l_2 y el cliente puede ser servido.

17: a) 27.682.574.402; b) 2 × 712 × 12 cm (¡siete veces la distancia de la Tierra a la Luna!). 21: 15 ladrones, 113 tan. 22: Área, 84,87 unidades cuadradas; lado aproximado, 4. 23: 60 días. 24: R = 3. 25: 5 5/17 días. 26: 24 días.

27: $R = \left(1 + \sqrt{8}\right) r$

28: [(120 + 84)/2] × 6.

29: $t = \dfrac{\sqrt{2r}}{\sqrt{2} + 1} = 0{,}585785r$

30: La casa de primera categoría, 2,5 koku de arroz, y todas las casas de primera categoría, 10; la casa de segunda categoría, 2 koku, y todas las casas de segunda categoría, 16; la casa de tercera categoría, 1,6 koku, y todas las casas de tercera categoría, 24; la casa de cuarta categoría, 1,28 koku, y todas las casas de cuarta categoría, 52,48; la casa de quinta categoría. 1,024 koku, y todas las casas de quinta categoría, 122,88. 31: N = 2.060. 32: La profundidad del estanque es de 12 syaku. 33: Una posible solución es la siguiente:

2	1	3
3	2	1
1	3	2

34: t = 0,464r. 35: 1.073.741.823 mon. 36: 238,24 ri. 37: 25. 38: Usa la fórmula del sumatorio de una progresión aritmética: hay 468 barriles.

12. The Ladies Diary

1: Aproximadamente 31 acres. 2: 5 libras 13 chelines 2 1/4 peniques (donde 12 peniques = 1 chelín; 20 chelines = 1 libra). 3: La parte desgastada por cada hombre del radio original de la rueda es la siguiente: el primer hombre, 2,225 pulgadas; el segundo, 2,439 pulgadas; el tercero, 2,658 pulgadas; el cuarto, 3,038 pulgadas; el quinto, 3,604 pulgadas; y al sexto le queda una piedra de moler de aproximadamente 4 pies 3 pulgadas de diámetro. 5: $2\pi h$ 6: 1,5 yardas. 7: 17,02 pies. 8: 163.350 pies cuadrados. 9: 17.310.309.456.440 farthings (cuartos de penique). 10: 1.743 yardas, o casi una milla. 12: 10 yardas.

13: anchura $= \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$

15: 3 libras 1 chelín 3/2 de penique. 16: Aproximadamente 189 galones 17: Agua. 20: Una de las posibles respuestas: 13 gansos a 1 chelín 8 peniques cada uno, 11 patos a 10 peniques cada uno y 6 pollos a 5 peniques cada una. 22: Una herradura.

13. Problemas victorianos del siglo XIX

1: 529,48 yardas. 2: 36. 3: Altura vertical, 850 yardas; distancia desde el primer observador, 1.482 yardas; distancia desde el segundo observador, 946,5 yardas. 4: Hasta la altura de su diámetro. 5: 162,03 unidades cuadradas. 6: 10%. 7: 19. 8: 60 yardas × 60,5 yardas. 9: 17,02 pies. 11: Acantilado, 250 pies; torre, 183 pies. 13: 7.381 millas; pero ¡hay un error! Para obtener la respuesta correcta, la altura del poste de en medio debería ser 15,987 pulgadas, para un radio de 3.963 millas. 14: 20 días. 15: 3 monedas. 16: 4 y 6 millas por hora. 17: 60 años y 40 años. 18: 503 en base 7. 19: 35 millas. 20: Sean los lados del triángulo rectángulo a, b y c, donde a es el lado perpendicular, b es la base y c es la hipotenusa. El perímetro será p. Entonces se puede hallar que:

c = [(p – a)2 + a2]/2 (p – a) y

c = [(p – a)2 – a2]/2 (p – a).

21: 1.480 libras. 22: 0,5 libras por semana. 23: Portsmouth, 200; Plymouth, 189; Sheerness, 101. 24: 65 bombas. 25: 6 caballos. 26: 2 días. 27: 659,29 libras y 283,71 libras. 28: 7,966 y 15,93. 29: 20 unidades.

14. Problemas norteamericanos de los siglos XVIII y XIX

1: A, 70 hogshead; B, 30 hogshead. 2: 3,999 libras. 3: 76,78 yardas o ≈230 pies. 4: 135. 5: 8,2 libras. 6: S = ab/(a + b). 7: S_1= 2(4b^2 - a^2/15)1/2; S_2 = 2(b^2 - 4a^2/15)1/2. 8: Perdió 14 \$. 9: Copa = 16 onzas, funda = 32 onzas. 10: 2.600 \$. 11: 14 \$. 12: 3.888. 13: 12 5/6. 14: 11,701 pies. 15: Verdadero. 16: 2 libras del azúcar de 8 centavos, 2 libras del azúcar de 10 centavos y 6 libras del azúcar de 14 centavos. 17: 301. 18: Si la base del triángulo viene representada por b y la suma del lado perpendicular, a, y la hipotenusa, c, por k; entonces:

c = (b^2 + k^2)/2k y

a = (k^2 - b^2)/2k.

19: 50. 20: Una elipse. 21: 7.939,265 millas. 22: 102,64 pies. 23: 0 o 1/2. 24: 160 barriles de trigo, 80 barriles de centeno, 40 barriles de maíz, 32 barriles de avena, más los 8 barriles de cebada, para un total de 320 barriles de grano. 25: 37,22. 26: 47,79 pulgadas. 27: 18 £, 22 £, 10 £ y 40 £. 28: 30 y 36. 29: Aproximadamente 33 minutos. 30: 5,805 pulgadas cuadradas. 31: Círculo, 0,07958 metros cuadrados; cuadrado, 0,0626 metros cuadrados; triángulo, 0,04810 metros cuadrados. 32: 9:4. 33: 150 millas. 34: 22,4 libras. 35: 3/4 y 1/4. 36: 314.146.179 fanegas. 37: Gana 1.500.873 $. 38: Longitud, 49 varas; anchura, 1 vara. 39: 80.120. 40: 38,1727º. 41: 3,5972845. 42: 572. 43: Línea, 7,07 cadenas; distancia desde el primer lado, 10,61 cadenas. 44: Véase la respuesta para el problema 18 en el capítulo 9. 45: 15 y 45 años. 46: 33, 57 y 45 pulgadas. 47: 4:21,49. 48: 72. 49: 22,5 millas por hora y 18,409 millas por hora. 50: 40. 51: 60. 52: 9 de septiembre. 53: John, 25.000 $; Katie, 15.000 $. 54: X, 18,98 $; Y, 17,02 $; Z, 54,00 $. 55: 7 terneros, 21 cabras y 72 cerdos. 56: Sección superior, 17,826 pulgadas; sección central, 4,633 pulgadas; sección inferior, 3,250 pulgadas. 57: 8. 58: 5.100. 59: 6 unidades. 60: 15 × 15 × 15 pulgadas. 61: Lado = 31,1769 pulgadas. 62: 1/60 de día. 63: 9 semanas. 64: 3.700 $. 65: C paga 360 $, A recibe 1.800 $ y B recibe 360 $. 66: A paga 31,03 $; O, 48,28 $ y P, 20,69 $. 67: James, 0,35 $ y Henry, 0,05 $. 68: Robaron 7 melocotones. El primer facineroso recibe 2; el segundo facineroso recibe 2; el tercer facineroso recibe 2; y el ladrón original recibe 1. 69: 3 galones de vino de 1,10 $, 4 galones de vino de 1,80 $, 15 galones de vino de 2,50 $ y 10 galones de agua. 70: 58 pies. 71: 696 2/3 fanegas. 72: 37. 73: 36 días. 74: El primer caballo, 72 $; el segundo caballo, 120 $.

15. Problemas del Farmer’s Almanac

1: 37,22. 2: 0 o 1/2. 3: 30,5 y 29,5. 4: 160 barriles de trigo, 80 barriles de centeno, 40 barriles de maíz, 32 barriles de avena, más los 8 barriles de cebada, para un total de 320 barriles de grano. 5: 18 \$, 22 \$, 10 \$ y 40 \$. 6: 1,95 pies. 7: 19 bueyes, 1 oveja y 80 gansos. 8: 7,24%. 9: 193,39 millas. 10: 12,05 años. 11: A, 345 calabazas; B, 655 calabazas. 12: Un cubo con un lado de 4 unidades. 13: A, 11 \$; B, 55 \$; C, 77 \$. 14: 10 (210-1) corderos. 15: 175 guineas. 16: 1.115,3 pies, 117,2 pies y 1.121,44 pies, respectivamente. 17: 7,05 pulgadas cúbicas. 18: A, 202,50 \$; B, 270 \$. 19: Aproximadamente 4,05 libras. 20: 6,25 millas por hora. 21: 23,43 pies.

16. Problemas de cálculo del siglo XIX

1: Si el radio del círculo es r, encontramos que los lados del triángulo son $r\sqrt{3}$. El triángulo es equilátero. 2: Si a es la altura del cono, la altura del cilindro es $a/3$ ay el diámetro de su base $2a$.

3: $$\gamma = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$$

4: a, $2a$, $4a$. 5: $x + x^2/a + x^3/a2 + \ldots + x^n/a(n - 1)$. 7: 273/11 segundos. 8: Anchura a: $a + 1$ si el depósito es abierto; $2a$: $a + 1$ si el depósito tiene tapa. 10: 8,9 millas por hora. 11: h = $2r$. 12: 6 millas por hora. 13: 0,00033 segundos. 14: 5,33 pies cúbicos.

Glosario de términos raros y exóticos

Medidas, unidades monetarias y palabras culturalmente relevantes

En la lista que sigue a estas líneas se describen y explican términos que pueden resultar poco familiares para el lector moderno. Están agrupados según la civilización en la que fueron utilizados y, por lo tanto, siguen el orden de los capítulos del libro. Sirven para dar una dimensión nueva al aprendizaje en el aula, al hacer que los estudiantes investiguen el significado de estas palabras desconocidas utilizadas en los problemas matemáticos históricos. Hay que tener en cuenta que a lo largo de la Historia, el significado y el valor de muchos términos varió y difirió según la cultura. Por ejemplo, una yarda en el sistema inglés es 0,9144 metros o 3 pies, el paso medio de un hombre europeo, mientras que en la China tradicional, una yarda o bu era el doble del paso medio de un hombre chino, o 5 pies chinos, chi. Cuando ha sido posible, se han proporcionado equivalentes modernos a las unidades de medida, pero se trata de aproximaciones.

Babilonia

- ban: medida de capacidad; 10 l
- cable: medida de área; 360 m2
- gin: medida de área; 1 m2
- gin: medida de peso; 1/60 de un manna
- gur: medida de capacidad; 3.000 l o 0,3 m3
- kus: codo babilónico; 0,497 m

- manna: unidad básica de peso; 1/2 kg
- mina: moneda. Véase talento
- sar: medida de área, por lo general el tamaño de un jardín; 36 m2
- shekel: moneda. Véase talento
- sila: medida de capacidad; 1 l
- talento: unidad monetaria básica; 1 talento = 60 minas = 60 shekel

Antiguo Egipto

- codo: unidad básica de medición lineal; codo = 0,4 m; codo real = 0,525 m
- espelta: variedad primitiva de trigo
- hekat: medida de capacidad para grano o pan, que varió dependiendo de la dinastía; por lo general 1/30 de un codo real; 4,782 l
- pesu: unidad que mide la fuerza de la cerveza
- seqt o seket: medida de inclinación (longitud horizontal / elevación vertical); equivale a la función de la cotangente en la trigonometría moderna

Antigua Grecia

- mina: moneda de plata. Véase talento, más abajo
- talento: medida de plata que determinaba los valores del sistema monetario; 1 talento = 60 minas = 6.000 dracmas

Antigua China

- bu: medida de longitud equivalente a dos pasos, o 5 pies chinos, chi
- dan: medida de peso; 60 kg
- dou: medida de capacidad; 10 l
- hu: medida de capacidad; 1 hu = 10 dou = 100 l
- li: «milla» china; 1 li = 180 zhang = 360 bu = 1.500 chi
- mu: medida de área; 1 mu = 240 bu^2

India

- angula: unidad de medida lineal; anchura de un dedo, 1 3/8 de pulgada
- hasta: medida de longitud; 1 hasta = 24 angula = 45 cm
- pala: medida de cantidad
- panas: moneda de cobre
- yojana: medida de distancia; variaba entre los 5 y los 10 km

Mundo islámico

- dírham: unidad monetaria. Véase dinar
- dinar: moneda de oro acuñada en los primeros tiempos del islam. El nombre deriva del denario romano, una moneda que inicialmente equivalía a diez ases. Debido a su valor reconocido, se convirtió en la moneda estándar en Europa entre los siglos X y XII

Europa medieval

- besante: nombre popular de cualquier moneda de oro, como por ejemplo, un dinar
- leuca: legua; la distancia que una persona podía recorrer caminando en una hora; 1,5 millas romanas o 2 km
- libra: la unidad monetaria básica establecida por Carlomagno. Una libra de plata pura se acuñaba en 240 peniques; 1 penique = 1,7 g. La moneda existente, el sueldo, recibió entonces un valor de 20 peniques. De este modo, se estableció un estándar: 1 libra = 20 sueldos o chelines = 240 peniques
- metreta: medida de capacidad; 1 metreta = 72 sextarios = 3,4 l
- modio: unidad de medida de grano
- palmo: unidad de longitud, la anchura de cuatro dedos; 7,6 cm
- percha: unidad de longitud de los agrimensores; 5,029 m
- sextario: véase metreta, más arriba

Europa renacentista

- besante: véase más arriba, bajo «Europa medieval»
- braccio, plural braccia: unidad italiana de medida determinada por la longitud de un brazo; 66-68 cm
- dinar, denario: véase más arriba, bajo «Mundo islámico»
- ducado: moneda de oro acuñada en Venecia en 1284; 1 ducado = 3,59 g
- escudo: una moneda grande de plata acuñada en Milán en

1551. Con el paso del tiempo, la palabra escudo se convirtió en un nombre popular para todas las monedas de plata

- florín: moneda de oro acuñada en Florencia, 1252-1525; 1 florín = 3,5 g
- grossi: moneda veneciana; 24 grossi = 1 ducado
- guilden: florín holandés
- leuca: véase más arriba, bajo «Europa medieval»
- lira: unidad monetaria; libra italiana
- livre: unidad monetaria; libra francesa, utilizada hasta 1795

Problemas de los templos japoneses

- hiki: unidad monetaria; 1 hiki = 10 mon
- ken: medida de longitud; 1,82 m
- koku: medida de capacidad; 20 l
- mon: unidad monetaria. Véase hiki, arriba
- ri: «milla» japonesa; 414 m
- sho: medida de capacidad; 0,2 l
- sun: medida de longitud; 2,3 cm
- syaku: medida de longitud; 1 syaku = 10 sun = 23 cm
- tan: medida de área; 991,7 m2
- yen: unidad monetaria moderna

Inglaterra y la Norteamérica colonial

- cateto: el lado de un triángulo rectángulo perpendicular a la base

- corona: moneda de plata británica; 1 corona = 5 chelines
- farthing: antigua unidad monetaria británica; 1 farthing = 1/4 de penique
- guinea: moneda de oro acuñada en Inglaterra, 1666-1813; 1 guinea = 1 libra 1 chelín
- hogshead: un barril grande con capacidad para 63-140 galones
- libra: unidad monetaria básica de Inglaterra; 1 libra (£) = 20 chelines = 240 peniques
- quintal: unidad de peso; 1 quintal = 100 kg

Otras

- alabarderos: militares armados con alabardas, una combinación de hacha de combate y pica montada en el extremo de un bastón de unos dos metros de longitud, que fue un arma popular en Europa en los siglos XV y XVI
- caván: unidad de medida de arroz establecida por los ocupantes españoles en Filipinas durante el siglo xix; 1 cavan = 75 l
- Gausthause (alemán moderno: Gasthaus): casa de huéspedes u hostal
- Reichsmark (RM): moneda utilizada en Alemania entre 1924 y 1948
- rubii: unidad de medida utilizada para el grano
- sagitta: «flecha» en latín. En un contexto matemático, una sagitta es la altura del segmento de un círculo

Bibliografía

Las obras señaladas con un asterisco (*) contienen amplias colecciones de problemas de las civilizaciones de las que se trata en este libro.

- Adams, D. (1821), The scholar's arithmetic o Federal accountant, John Prentiss, Keene, NH.
- Ahmes (c. 1650 a. C.), Rhind mathematical papyrus, traducido al inglés en Chace, 1979.
- Alcuino de York (c. 800), Propositiones ad acuendos juvenes, traducido al inglés en Hadley y Singmaster, 1992.
- Aritmética de Treviso [Arte del ábaco] (1478), Treviso, traducido al inglés en Swetz, 1987.
- Ascher, M. (1991), Ethnomathematics, Brooks/Cole Publishing, Pacific Grove, CA.
- Baker, H. (1562), The well-spring of sciences, Londres.
- Ball, W. (1987), Mathematical recreations and essays, Dover, Nueva York.
- Barrow, I. (1665), Euclid's «Elements», Londres.
- Bonsall, M. (1905), Primary arithmetic, World Book Co., Manila.
- Borghi, P. (1484), Qui comenza la nobel opera de arithmethica […], Venecia.
- Brooks, E. (1863), The normal written arithmetic, Sower, Potts & Co., Filadelfia; (1873), The normal elementary algebra,

Christopher Sower Co., Filadelfia.

- Buteo, J. (1559), Logistica quae arithetica vulgò in libros quinque digesta, Lyon.
- Calandri, F. (1491), Arithmetic, Florencia.
- Cardano, G. (1539), Practica arithmetica et mensurandi singularis.
- *Chace, A. B. (1979), The Rhind mathematical papyrus, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, DC.
- Clavius, C. (1583), Arithmetica prattica, Roma.
- *Colebrooke, H. T. (1817), Algebra, with arithmetic and mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara, John Murray, Londres.
- *Cooke, R. (1997), The history of mathematics: A brief course, John Wiley & Sons, Nueva York.
- Diggs, T. (1572), An arithmeticall militare treatise named Stratioticas, Londres.
- Douglas, W. (1814), «Question 2», The Analyst, marzo, 1, p. 21.
- *Eves, H. (1990), An introduction to the history of mathematics, Saunders College Publishing, Filadelfia.
- *Fukagawa, H. y Pedoe, D. (1989), Japanese temple geometry problems, Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, Canadá; *— y Rigby, D. (2002), Traditional Japanese mathematics problems of the 18th and 19th centuries, Science Culture Technology Press, Singapur. *— y Rothman, T. (2008), Sacred mathematics: Japanese temple geometry, Princeton

University Press, Princeton.

- Ghaligai, F. (1521), Practica d'arithmetica, Florencia.
- *Hadley, J. y Singmaster, D. (1992), «Problems to sharpen the young», Mathematical Gazette, pp. 76 (475), 102-126.
- *Heilbron, J. L. (2000), Geometry civilized, Oxford University Press, Oxford.
- Hermelink, H. (1976), «Arabic recreational mathematics as a mirror of age-old cultural relations between eastern and western civilizations», en Proceedings of the First International Symposium for the History of Arabic Science, abril 5-12, 1976, pp. 44-92, Universidad de Aleppo, Aleppo.
- Hodder, J. (1683), Hodder's arithmetic, The Rose and Crown, Londres.
- Hogan, E. R. (1977), «George Baron and the Mathematical Correspondent», Historia Mathematica, 4, pp. 157-172.
- Høyrup, J. (1985), «Varieties of mathematical discourse in pre-modern socio-cultural contexts: Mesopotamia, Greece and the Latin Middle Ages», Science and Society, 69 (1), pp. 4-41.
- Jiuzhang suanshu (c. 100), traducido al inglés en Shen, Crossley y Lun, 1999.
- *Katz, V. (2003), A history of mathematics, Addison-Wesley, Nueva York. (ed.) (2007), The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A sourcebook, Princeton University Press, Princeton.
- Köbel, J. (1514), Rechenbuck aff linen and ziffern, Augsburgo.

- *Lam, L. Y. y Ang, T. S. (1992), Tracing the conception of arithmetic and algebra in ancient China: Fleeting footsteps, World Scientific, Singapur.
- *Lenchner, G. (1983), Creative problem solving in school mathematics, Houghton Mifflin, Boston.
- Leonardo Pisano [Fibonacci] (1202), Liber abaci [Libro de los cálculos], traducido al inglés en Sigler, 2002.
- *Libbrecht, U. (1973), Chinese mathematics in the thirteenth century: The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao, MIT Press, Cambridge.
- Lieske, S. (1985), «Right triangles II», Mathematics Teacher, 78, pp. 498-499.
- Li Zhi (1248), Ceyuan haijing [Espejo marino de las medidas del círculo], Pekín.
- Loci (sección «Convergencia»), revista electrónica de la Mathematical Association of America (MAA), Mathematical Sciences, Washington, DC. Página web de la biblioteca digital: http://mathdl.maa.org/ mathDL.
- Martzloff, J. C. (1997), A history of Chinese mathematics, Springer, Nueva York.
- Melville, D. (2004), «Poles and walls in Mesopotamia and Egypt», Historia Mathematica, 31, pp. 148-162.
- Metrodorus (c. 500), Palatine collection, o Greek anthology, traducido al inglés en Page et al. 1916.
- Milne, W. (1892), Standard arithmetic, American Book Co.,

Nueva York.

- Nahin, P. J. (2007), Chases and escapes: The mathematics of pursuit and evasion, Princeton University Press, Princeton.
- Nemet-Nejat, K. R. (1988), «Cuneiform mathematical texts as training for scribal professions», en Leichty, E. (ed.), A scientific humanist: Studies in memory of Abraham Sachs, pp. 285-300, University of Pennsylvania Press, Filadelfia. (1993), Cuneiform mathematical texts as a reflection of everyday life in Mesopotamia, CT, American Oriental Society, New Haven, CT.
- *Neugebauer, O. y Sachs, A. (1945), Mathematical cuneiform texts, American Oriental Society, New Haven.
- Nissen, H. J., Damerow, P. y Englund, R. K. (1993), Archaic bookkeeping: Early writing and techniques of economic administration in the ancient Near East, University of Chicago Press, Chicago.
- Page, T. E. et al. (eds.) (1916), The greek anthology, Loeb Classical Library, vol. 5, Harvard University Press, Cambridge.
- Perl, T. (1979), «The Ladies Diary o el Woman's Almanack, 1704-1841», Historia Mathematica, 6, pp. 36-53.
- Pike, N. (1788), A new and complete system of arithmetic composed for the use of citizens of the United States, Newbury-port, MA.
- Pine, L. (1997), «Nazism in the classroom», History Today, 47, pp. 22-27.
- *Plofker, K. (2009), Mathematics in India, Princeton University

Press, Princeton.

- Polya, G. (1971), How to solve it: A new aspect of mathematical method, Princeton University Press, Princeton.
- Powell, M. A. (1988), «Evidence for agriculture and waterworks in Babylonian mathematical texts», Bulletin on Sumerian Agriculture, 4, pp. 161-172.
- Pressman, I. y Singmaster, D. (1989), «The jealous husbands and the missionaries and cannibals», Mathematical Gazette, 73, pp. 73-81.
- Rebstock, U. (2007), «Mathematics in the service of the Islamic communit. Paper presented at the Fifth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education», pp. 19-24, Praga, República Checa.
- Recorde, R. (1551), Pathway to knowledge, Londres;(1557), The whetstone of witte, Londres.
- Riese, A. (1522), Rechnung auff der linien and federn, Erfurt.
- *Robson, E. (2007), «Mesopotamian mathematics», en Katz, V. (ed.), The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam, pp. 58-181, Princeton University Press, Princeton.
- Rudolff, C. (1526), Kunstliche rechnung mit der ziffern and mit den zal pfenninge, Viena.
- *Sanford, V. (1927), The history and significance of certain standard problems in algebra, Teachers College, Columbia University, Nueva York.
- Schmandt-Besserat, D. (1992), Before writing: From counting

to cuneiform, University of Texas Press, Austin.
- *Shen, K. S., Crossley, J. N. y Lun, A. (1999), The nine chapters on the mathematical art, Science Press, Pekín.
- Sigler, L. E. (2002), Fibonacci's Liber abaci, Springer, Nueva York.
- *Simonson, S. (2000), «The missing problems of Gersonides: A critical edition», Historia Mathematica, 27, pp. 243-302 (pt. I), pp. 384-431 (pt. II).
- Smith, D. E. (1917), «On the origin of certain typical problems», American Mathematical Monthly, 24, pp. 64-71; (1918), «Mathematical problems in relation to the history of economics and commerce», American Mathematical Monthly, 25, pp. 221-223.; (1958), History of mathematics, 2 vols., Dover, Nueva York.
- Smith, J. H. (1880), A treatise on arithmetic, Rivingtons, Londres.
- Sun Zi (c. 400), Sun Zi suanjing [Manual de matemáticas del maestro Sun], traducido al inglés en Lam y Ang, 1992.; *Swetz, F. J. (1987), Capitalism and arithmetic: The new math of the 15th century, Open Court, Chicago.; (1989), «An historical example of mathematical modeling: The trajectory of a cannonball», International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 20, pp. 731-741.; (1993), «Back to the present: Ruminations on an old arithmetic text», Mathematics Teacher, 86, pp. 491-496.; *— (1994), Learning

activities from the history of mathematics, J. Weston Walch, Portland, ME.; (1995), «To know and to teach: Mathematical pedagogy from an historical context», Educational Studies in Mathematics, 29, pp. 73-88.; (1996), «Enigmas of Chinese mathematics», en Calinger, R. (ed.), Vita Mathematica, Mathematical Association of America, pp. 87-97, Washington, DC.; (1999), «Mathematics for social change: United States experience in the Philippines, 1898-1925», Bulletin of the American Historical Collection Foundation, 27, pp. 61-80.

- *Swetz, F. J. y Kao, T. I. (1977), Was Pythagoras Chinese?, University Park, PA, Pennsylvania State University Press.
- The Ladies Diary (1704-1841), revista para mujeres de periodicidad anual, Londres.
- The New York Times (1969), «China's new math and old problems», 9 de marzo, p. 18.
- Ticknor, A. (1845), The Columbian calculator, Kay & Troutman, Filadelfia.
- Trenchant, I. (1566), L'Arithmétique de Ian Trenchant, departie en trois libres, Lyon.; (1578), L'Arithmétique, Lyon.
- *Van der Waerden, B. L. (1983), Geometry and algebra in ancient civilizations, Springer, Nueva York.
- Verschaffel, L., Greer, B. y Van Dooren, W. (eds.) (2009), Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations, Sense Publishers, Róterdam.
- Vogel, K. (1983), «Ein Vermessungsproblem Reist von China

nach Paris», Historia Mathematica, 10, pp. 360-367.

- Watson, E. (1777), Connecticut Almanack, Eben Watson, Hartford, CT.
- Wikenfield, M. (1985), «Right triangle relationships», Mathematics Teacher, 78, p. 12.
- Wittfogel, K. A. (1957), Oriental despotism: A comparative study of total power, Yale University Press, New Haven, CT.
- Yung-lo ta-tien [Enciclopedia Yung-lo] (1407), edición facsímil, 1960, Chung-hwa Book Co, Hong Kong.