

**Arieh Ben-Naim**



**El mito de la segunda ley de la termodinámica y el sentido común**

**Uno de los misterios mas insondables de la física moderna**

**2011**

## Reseña

Para los poco versados en ciencia, la «entropía» —término de origen griego que significa «transformación»— es un extraño concepto que tiene que ver, vagamente, con el calor y la energía, el paso del orden al desorden, el aumento de la incertidumbre y la irreversibilidad del caos. Sea como fuere, la entropía siempre parece estar creciendo.

Los científicos, por su parte, precisan que la célebre segunda ley de la termodinámica (la que enuncia la entropía) establece que, en cualquier proceso espontáneo, es imposible convertir completamente el calor en trabajo, pues se pierde parte del calor. Pero por qué la naturaleza se comporta de este modo sigue siendo objeto de polémica, hasta el punto de que, en más de una ocasión, se ha dicho que la ley de la entropía constituye uno de los misterios más profundos de la física moderna.

Escrito con el máximo rigor pero sin tecnicismos, este libro tiene como principal objetivo que el lector aplique sencillamente el sentido común y descubra que una de las leyes de mayor alcance en el universo es de una claridad meridiana.

Explica asimismo la fascinante evolución de la noción de entropía a partir de los trabajos de Sadi Carnot, Clausius, Lord Kelvin o el gran Ludwig Boltzmann. Además, BEN-NAIM, una autoridad mundial en el campo de la termodinámica, formula una sugestiva interpretación de la entropía apoyándose en la noción de pérdida de información.

## Índice

### [Agradecimientos](#)

### [Prefacio](#)

1. [Introducción, y una breve historia de la segunda ley de la termodinámica](#)
2. [Una breve introducción a la teoría de la probabilidad, la teoría de la información, y todo lo demás](#)
3. [Jugando con dados reales](#)
4. [Jugando con Dados simplificados, y una apreciación preliminar de la segunda ley](#)
5. [Cómo experimentar la segunda ley con los cinco sentidos](#)
6. [Por último, apliquemos el sentido común](#)
7. [Del mundo de los dados al mundo real](#)
8. [Reflexiones sobre el estatuto de la segunda ley de la termodinámica como ley física](#)

### [Autor](#)

## **Agradecimientos**

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento y aprecio a todos los que se han prestado a leer partes o la totalidad del manuscrito y me han ofrecido sus comentarios y críticas. En primer lugar, quiero dar las gracias a mis amigos y colegas Azriel Levy y Andrés Santos por su meticulosa lectura y examen del manuscrito entero. Me han ahorrado errores embarazosos que yo no había detectado o no podía detectar. Gracias también a Shalom Baer, Jacob Bekenstein, Art Henn, Jeffrey Gordon, Ken Harris, Marco Pretti, Samuel Sattath y Nico van der Vegt, quienes leyeron partes del manuscrito y me hicieron comentarios valiosos. Por último, quiero expresar mi sincero agradecimiento a mi compañera Ruby por su paciencia a la hora de pelearse con mi ilegible letra y corregir y re corregir el manuscrito. Sin su amable ayuda este libro no habría visto la luz de la publicación. El proyecto tuvo un largo periodo de incubación. La redacción del libro comenzó en Burgos y se completó en La Jolla, California.

Arieh Ben-Naim

Departamento de Química Física

Universidad Hebrea de Jerusalén, Israel.

## Prefacio

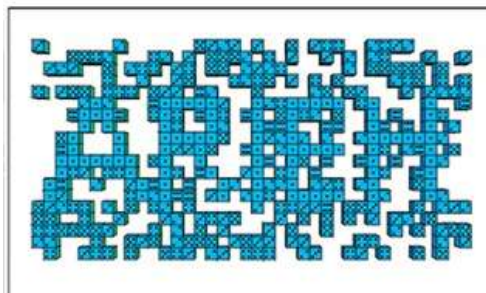
*Este libro está dedicado a Ludwig Boltzmann*



*Fotografía tomada por el autor en Viena, septiembre de 1978.*



Ordenado



Desordenado

Desde que escuché la palabra «entropía» por primera vez, me fascinó su naturaleza misteriosa. Recuerdo vívidamente mi primer encuentro con la entropía y con la segunda ley de la termodinámica. Fue hace más de cuarenta años. Recuerdo el aula, la profesora, incluso el lugar donde me sentaba: en primera fila, frente a la tarima donde ella estaba de pie.

Tras explicar el ciclo de Carnot, la eficiencia de los motores térmicos y las diversas formulaciones de la segunda ley, la profesora introdujo la intrigante y misteriosa magnitud conocida como *Entropía*. Me sentí confundido y desconcertado. Hasta entonces ella había expuesto conceptos con los que estábamos familiarizados: calor, trabajo, energía y temperatura. Pero ahora, de pronto, nos presentaba una palabra desconocida, nunca oída antes por nosotros, y que denotaba un concepto enteramente nuevo. Esperé pacientemente a poder preguntar algo, aunque no estaba seguro de cuál sería la pregunta. ¿Qué es esa cosa llamada entropía y por qué aumenta siempre? ¿Es algo que podamos ver, tocar o percibir con alguno de nuestros sentidos? Al acabar su exposición, la profesora exclamó: «Si no entienden la segunda ley, no se desanimen. Están en buena compañía. Por ahora no están capacitados para entenderla, pero lo estarán cuando estudien termodinámica estadística el próximo curso». Con este comentario final eludía cualquier demanda de aclaración. La atmósfera quedó cargada de misterio. Todos permanecimos en silencio, con nuestra ansia de comprender insatisfecha.

Años más tarde comprobé que la profesora tenía razón al decir que la mecánica estadística alberga las claves para comprender la entropía, y que sin ella no hay manera de entender lo que hay detrás del concepto de entropía y de la segunda ley. Pero en aquel momento todos sospechamos que la profesora había optado por una elegante escapatoria de preguntas embarazosas que no podía responder, así que aceptamos su consejo sin convencimiento.

Aquel año nos enseñaron a *calcular* los cambios de entropía en numerosos procesos, desde la expansión de un gas ideal hasta la mezcla de gases, la transferencia de calor de un cuerpo caliente a uno frío, y muchos otros procesos espontáneos. Nos ejercitamos en el *cálculo* de incrementos de entropía, pero de hecho nos quedamos sin captar su esencia. Hacíamos los cálculos con destreza profesional, tratando la entropía como una magnitud más, pero en lo más hondo sentíamos que el concepto quedaba envuelto en un denso aire de misterio.

¿Qué es esa cosa llamada entropía? Sabíamos que se definía sobre la base del calor transferido (reversiblemente) dividido por la temperatura absoluta, pero no era ni una cosa ni otra. ¿Por qué aumenta siempre y de qué combustible se sirve para propulsarse hacia arriba? Estábamos acostumbrados a las leyes de conservación, que se conciben como más «naturales». La materia y la energía no pueden generarse de la nada, pero la entropía parece desafiar el sentido común. ¿Cómo puede una magnitud física «producir» inexorablemente más de sí misma sin ninguna fuente de alimentación aparente?

Recuerdo haber oído en una de las lecciones de química física que la entropía de la disolución de argón en agua es grande y negativa<sup>1</sup>. La razón ofrecida era que el argón *incrementa* la *estructura* del agua. Un incremento de estructura equivalía a un incremento de orden, y la entropía se asociaba vagamente con el desorden, así que se suponía que eso explicaba el *decremento* de entropía. En aquella lección, nuestro profesor nos explicó que la entropía de un sistema *puede* disminuir cuando el sistema está acoplado a otro (como un termostato) y que la ley del aumento incesante de la entropía sólo vale para un sistema aislado (que no interactúa con su entorno). Este hecho no hacía más que aumentar el misterio. No sólo no conocemos la *fuentes* que alimenta el incremento de entropía, sino que, en principio, no hay fuente alguna, ningún mecanismo ni aporte externo. Además, ¿cómo se ha deslizado la idea de «estructura» u «orden» en la discusión de la entropía, un concepto definido en relación con *calor y temperatura*?

Al año siguiente aprendimos mecánica estadística, así como la relación entre la entropía y el número de estados, la famosa fórmula esculpida en la lápida de Ludwig Boltzmann en Viena<sup>2</sup>. La relación de Boltzmann proporcionaba una interpretación de la entropía sobre la base del desorden, y del aumento de la entropía como el proceder de la naturaleza del orden al desorden. Ahora bien, ¿por qué debería un sistema pasar del orden al desorden? Éstos son conceptos intangibles, mientras que la entropía se *definía* a partir del calor y la temperatura. El misterio del incremento perpetuo del desorden no resolvía el misterio de la entropía.



Enseñé termodinámica y mecánica estadística durante muchos años, a lo largo de los cuales me di cuenta de que el misterio que envuelve la segunda ley no puede disiparse dentro del marco de la termodinámica clásica (o, mejor, la formulación no atomista de la segunda ley; véase el capítulo 1). Por otro lado, al contemplar la segunda ley desde el punto de vista molecular, comprendí que no había misterio alguno.

Creo que el punto decisivo en mi propia comprensión de la entropía (y, por ende, mi capacidad de explicar el concepto a mis alumnos) surgió al escribir un artículo sobre la entropía de mezcla y la entropía de asimilación. Sólo entonces comprobé que podía ver a través de la neblina que envolvía la entropía y la segunda ley. Mientras redactaba el artículo, se me revelaron dos rasgos clave de la teoría atómica de la materia que eran cruciales para dispersar las últimas brumas que rodeaban la entropía: los grandes (inimaginablemente grandes) números y la indistinguibilidad de las partículas que constituyen la materia.

Una vez disipada la niebla, todo resultaba claro, incluso obvio. El comportamiento de la entropía, antes tan difícil de comprender, quedaba reducido a una cuestión de simple sentido común.

Es más, de pronto comprendí que *no hace falta* estudiar mecánica estadística para comprender la segunda ley. Lo que descubrí es que *todo* lo que se necesita de la mecánica estadística es la *formulación atomística* de la entropía. Esta constatación fue una motivación poderosa para escribir este libro, que está dirigido a los que no saben nada de mecánica estadística.

Mientras lo escribía, me pregunté más de una vez en qué momento exacto decidí que valía la pena hacerlo. Pienso que hubo tres momentos clave.

El primero fue el reconocimiento de los hechos cruciales e indispensables de que la materia está constituida por un número gigantesco de partículas y de que dichas partículas son mutuamente indistinguibles. Estos hechos han sido bien conocidos y reconocidos desde hace al menos un siglo, pero creo que los autores que han escrito sobre la segunda ley no los han destacado lo bastante.

El segundo momento fue cuando, al leer los dos libros de Brian Greene<sup>3</sup>, me tropecé con estas palabras referidas a la entropía y la segunda ley<sup>4</sup>:

Entre las características de la experiencia común que se han resistido a la explicación completa está una que se enmarca en los misterios sin resolver más profundos de la física moderna.

No podía creer que un autor como Greene, capaz de explicar de manera tan brillante y sencilla tantos conceptos difíciles de la física moderna, hubiera escrito aquello.

El tercer momento tiene que ver más con la estética que con la sustancia. Después de todo, he estado enseñando termodinámica estadística durante muchos años, y a menudo he recurrido a juegos de dados para ilustrar lo que ocurre en un proceso espontáneo. Pero la correspondencia entre las caras cambiantes de los dados y las partículas que se apresuran a ocupar todo el espacio accesible durante un proceso de expansión siempre me pareció lógicamente, y

quizás estéticamente, insatisfactoria. Como veremos en el capítulo 7, se me ocurrió establecer una correspondencia entre dados y partículas, y entre los resultados de las tiradas de dados y las *localizaciones* de las partículas. Esta correspondencia es correcta. Siempre podemos atribuir la etiqueta «D» a las partículas situadas en el lado derecho y la etiqueta «I» a las situadas en el lado izquierdo. Pero hasta que no me puse a escribir el mencionado artículo sobre las entropías de mezcla y de asimilación no «descubrí» un proceso diferente para el que esta correspondencia puede hacerse más «natural» y satisfactoria. Es lo que se conoce como desasimilación. Se trata de un proceso espontáneo donde el cambio de entropía se debe únicamente a que las partículas adquieren una nueva identidad. Ahora la correspondencia era entre un dado y una partícula, y entre la *identidad* del resultado de la tirada de un dado y la *identidad* de la partícula. Esta correspondencia me parecía perfecta y más gratificante estéticamente, lo que la hacía digna de publicarse.

En este libro he evitado deliberadamente los tecnicismos. En vez de explicar lo que es la entropía, cómo varía y, lo más importante, por qué sólo lo hace en un sentido, simplemente guiaré a los lectores para que «descubran» la segunda ley y obtengan la satisfacción de desvelar por sí mismos el misterio que la rodea.

La mayor parte del tiempo estaremos jugando, o imaginando que jugamos, a los dados. Partiremos de un dado, luego dos, diez, cien, mil, etcétera, para ir ejercitando la capacidad de analizar lo que ocurre. Averiguaremos qué es eso que cambia con el tiempo (o con

el número de tiradas) y cómo y por qué cambia. Para entonces ya seremos capaces de extrapolar lo aprendido con un número pequeño de dados a sistemas constituidos por un número incontable de elementos.

Tras experimentar la expresión de la segunda ley en el mundo de los dados y haber comprendido plenamente lo que ocurre, queda un último paso que daremos en el capítulo 7. Ahí *traduciremos* lo aprendido con los dados al mundo experimental real. Una vez que los lectores hayan captado la evolución de los juegos de dados, estarán en condiciones de entender la segunda ley de la termodinámica.

He escrito este libro pensando en lectores que no saben nada de ciencia ni de matemáticas. El único prerrequisito para leer este libro es el mero sentido común, y la voluntad de aplicarlo.

Una advertencia antes de seguir leyendo: «sentido común» no significa fácil o elemental.

Hay dos «destrezas» que el lector debe adquirir. La primera es aprender a pensar números grandes, fantásticamente grandes, inconcebiblemente grandes y más allá. Nos aplicaremos a esto en el capítulo 2. La segunda es algo más sutil. Tendremos que aprender a distinguir entre un evento (o configuración, o estado) *específico* y un evento (o configuración, o estado) *inespecífico*. Aunque suenen técnicos, no hay que dejarse intimidar por estos términos<sup>5</sup>. Ofreceré ejemplos de sobra para familiarizarnos con ellos, porque son indispensables para comprender la segunda ley. Si el lector tiene

dudas de su capacidad para entender este libro, le sugiero un test simple.

Al final del capítulo 2 encontrará dos cuestionarios pensados para evaluar su comprensión de los conceptos «específico» e «inespecífico».

Si responde correctamente todas las preguntas, puedo asegurarle que entenderá todo el libro sin problemas.

Si se ve incapaz de contestarlas o da respuestas incorrectas, no se desanime. Consulte las respuestas que doy. Si le satisfacen aunque no las haya encontrado por sí mismo, creo que está en condiciones de leer y entender el libro, aunque le costará un poco más.

Si desconoce las respuestas y sigue perdido aun después de haberlas consultado, eso no significa que el libro esté más allá de su capacidad. Le sugiero que lea detenidamente el capítulo 2 y se ejercite en el pensamiento *probabilístico*. Si necesita más, le invito a escribirme y prometo ayudarle en lo que pueda.

Una vez más, no hay que dejarse intimidar por el término «probabilístico». Si al lector no le sorprende que nunca le haya tocado un premio grande de la lotería, aunque tenga por costumbre comprar décimos, entonces está pensando «probabilísticamente». Para sentirnos más cómodos con esta formidable palabra, permítaseme contar una pequeña historia.

Mi padre solía comprar lotería cada fin de semana; lo hizo durante casi sesenta años. Estaba seguro de que alguien «ahí arriba» le favorecería y haría que le tocara el premio gordo. Una y otra vez intenté explicarle que sus posibilidades de conseguir un premio

importante eran reducidas, de hecho menos del 0,01 por ciento. Pero él hacía oídos sordos. Si acertaba siete u ocho números (de diez) se mofaba de mí por no haber sido capaz de ver los «signos» claros e inequívocos que había recibido de Él. Estaba convencido de ir por buen camino. Una semana tras otra, sus esperanzas subían y bajaban según su número de aciertos o, aún mejor, según los signos que le había mostrado la Providencia. Poco antes de morir, a la edad de noventa y seis años, me dijo que estaba muy decepcionado y enfadado porque se sentía traicionado por la deidad en la que había creído toda su vida. Me entristeció comprobar que seguía sin querer o poder pensar probabilísticamente.

Quienes nunca hayan oído hablar de la entropía o la segunda ley de la termodinámica pueden leer la descripción breve y carente de matemáticas de las diversas formulaciones y manifestaciones de la segunda ley en el capítulo 1. En el capítulo 2 expongo los elementos básicos de la probabilidad y la teoría de la información que el lector podría necesitar para expresar sus hallazgos en términos probabilísticos. Quiero subrayar que los fundamentos tanto de la teoría de la probabilidad como de la teoría de la información se inspiran sólo en el mero sentido común. No hace falta saber nada de matemáticas, física o química. Sólo hay que saber contar (matemáticas), saber que la materia está hecha de átomos y moléculas (física y química) y que los átomos son indistinguibles (¡esto sí es física avanzada!). Todo esto se explica en el capítulo 2. En los capítulos 3-5 nos dedicaremos a jugar con un número variable de dados. Veremos lo que pasa y sacaremos conclusiones.

Tendremos numerosas ocasiones de «experimentar» la segunda ley con los cinco sentidos, un minúsculo reflejo de la inmensa variedad de manifestaciones de la segunda ley en el mundo físico real. En el capítulo 6 recapitularemos nuestros hallazgos de forma fácil de traducir al lenguaje de un experimento real. El capítulo 7 está dedicado a describir dos experimentos simples que tienen que ver con el incremento de entropía; todo lo que hay que hacer es establecer la correspondencia entre el número de dados y el número de partículas en una caja, entre los diferentes resultados de la tirada de un dado y los estados de las partículas. Una vez establecida esta correspondencia, es fácil aplicar lo aprendido a partir de los juegos de dados para entender la segunda ley en el mundo real.

Después de acabar de leer el capítulo 7, entenderemos lo que es la entropía y cómo y por qué se comporta como lo hace. Veremos que no hay ningún misterio en su comportamiento: simplemente es de sentido común.

Tras haber entendido esos dos procesos concretos, veremos con claridad cómo funciona la segunda ley. Por supuesto, hay muchos más procesos «gobernados» por la segunda ley. Poner de manifiesto su intervención en tales procesos no siempre es algo tan simple y directo. Para ello hay que recurrir a las matemáticas. Hay muchos más procesos de gran complejidad donde *creemos* que interviene la segunda ley, pero hasta ahora no tenemos una demostración matemática de su papel. Los procesos biológicos son demasiado complejos para admitir un análisis molecular sistemático. Aunque

soy muy consciente de que muchos autores apelan a la segunda ley en conjunción con diversos aspectos de la vida, creo que, en la coyuntura actual, esto es muy prematuro. Estoy completamente de acuerdo con Morowitz<sup>6</sup> cuando escribió: «El empleo de la termodinámica en biología tiene una larga historia de confusión».

En el último capítulo he incluido algunas reflexiones y especulaciones personales. No son opiniones universalmente aceptadas, ni mucho menos, y las críticas serán bienvenidas (pongo mi dirección de correo electrónico a disposición de los lectores).

Mi objetivo general al escribir este libro es dar respuesta a dos cuestiones asociadas a la segunda ley: *qué* es la entropía y *por qué* cambia sólo en un sentido (desafiando en apariencia la simetría temporal de las otras leyes de la física).

La segunda cuestión es la más importante, y el meollo del misterio asociado a la segunda ley. Espero convencer al lector de que:

- 1. La segunda ley es básicamente una ley de probabilidad.*
- 2. Las leyes de probabilidad son básicamente leyes de sentido común.*
- 3. De (1) y (2) se sigue que la segunda ley es básicamente una ley de sentido común, y nada más.*

Por supuesto, admito que las proposiciones (1) y (2) han sido enunciadas muchas veces por muchos autores. La primera está implícita en la formulación de Boltzmann de la segunda ley. La segunda fue expresada por Laplace, uno de los padres de la teoría de la probabilidad. Desde luego, no puedo pretender que soy el



primero en enunciarlas. Pero quizá sí pueda reclamar la autoría de la idea de que la relación de «basicidad» que permite deducir (3) de (1) y (2) es una relación transitiva.

La primera cuestión tiene que ver con el *significado* de la entropía. Durante casi una centuria, los científicos han especulado sobre este asunto. La entropía se ha interpretado como una medida del desorden, la confusión, la desorganización, el caos, la incertidumbre, la ignorancia, la información perdida y cosas por el estilo. Hasta donde yo sé, el debate continúa. Incluso en libros recientes, científicos importantes expresan opiniones diametralmente opuestas. En el capítulo 8 expongo en detalle mi propia postura. Aquí me limitaré a adelantar que la entropía puede *identificarse*, formal y conceptualmente, con una medida específica de la información. Se trata de una idea que está lejos de ser universalmente aceptada. La esencia de la dificultad para admitir esta identidad es que la entropía es una magnitud físicamente medible que tiene unidades de energía dividida por temperatura y, por lo tanto, es una magnitud *objetiva*. La información, en cambio, se considera una magnitud adimensional y nebulosa que expresa algún atributo humano del estilo del conocimiento, la ignorancia o la incertidumbre, lo que la convierte en una magnitud altamente *subjetiva*<sup>7</sup>.

A pesar del carácter a primera vista irreconciliable entre una entidad objetiva y una entidad subjetiva, sostengo que la entropía es información. Su carácter objetivo o subjetivo es una cuestión que se adentra en la filosofía o la metafísica. Mi opinión es que ambas

magnitudes son objetivas. Pero si uno piensa que una es subjetiva, tendrá que admitir que la otra también debe serlo.

La identidad por la que abogo tiene una contrapartida, y es que hay que redefinir la temperatura a partir de la energía. Ello requerirá el sacrificio de la constante de Boltzmann, que debería haber sido erradicada del vocabulario de la física. Esta supresión reportará unos cuantos beneficios. Para los propósitos de este libro, la ausencia de la constante de Boltzmann convierte la entropía en una magnitud adimensional e *idéntica* a una medida de información. Esto «exorcizará», de una vez por todas, el misterio de la entropía.

Me atrevo a prometer lo siguiente:

- 1. A los lectores que tengan alguna noción de la entropía y les haya parecido misteriosa, les prometo desmitificarla.*
- 2. Los que nunca hayan oído hablar de la entropía, les prometo inmunidad ante cualquier mistificación futura del concepto.*
- 3. A los lectores que hayan oído hablar de la entropía pero no la hayan estudiado, les prometo que si después de haber leído este libro oyen a gente hablar del profundo misterio en torno a la entropía, deberían sentirse confusos e intrigados, no por la entropía ni la segunda ley, sino por todo el alboroto sobre el «misterio» de la entropía.*
- 4. Finalmente, quienes lean este libro de manera atenta y aplicada y hagan los pequeños deberes repartidos por todo el libro, experimentarán el gozo de descubrir y entender algo que durante muchos años ha eludido la comprensión. También*

*deberían sentirse profundamente satisfechos de entender «uno de los misterios sin resolver más profundos de la física moderna»<sup>8</sup>.*

Posdata. A quien se pregunte por el significado de las figuras al final de cada capítulo le diré que, ya que asumí la responsabilidad de explicarle la segunda ley, decidí hacer un pequeño seguimiento de su progreso. He colocado estos iconos para que el lector compare su estado de comprensión con lo que yo esperaría. Si no está de acuerdo, hágamelo saber y le prestaré toda la ayuda que pueda.

## Capítulo 1

### Introducción, y una breve historia de la segunda ley de la termodinámica

#### **Contenido:**

*§ La formulación no atomista de la segunda ley*

*§. La formulación atomista de la segunda ley.*

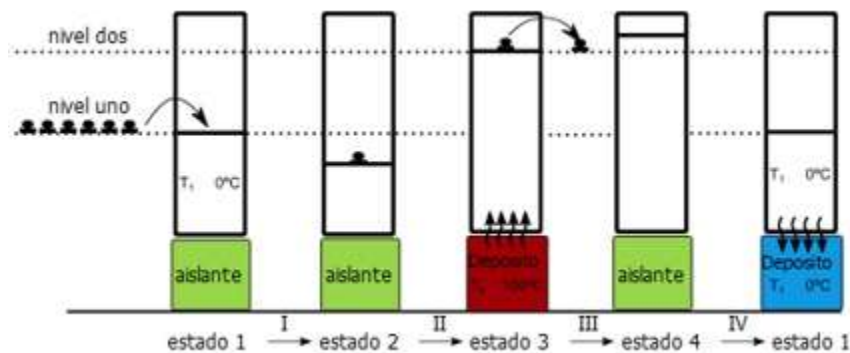
En este capítulo presento algunos hitos importantes en la historia de la segunda ley de la termodinámica. También presento unas cuantas formulaciones de la segunda ley de una manera descriptiva. Al hacerlo, necesariamente sacrifico la precisión. Lo importante aquí no es una discusión formal de la segunda ley, sino ofrecer una descripción cualitativa de los tipos de fenómenos que llevaron a los científicos decimonónicos a formularla.

Hay muchas formulaciones de la segunda ley de la termodinámica. Las agrupamos en dos clases conceptualmente distintas: no atomistas y atomistas.

#### ***§. La formulación no atomista de la segunda ley<sup>9</sup>***

Tradicionalmente, el nacimiento de la segunda ley se asocia al nombre de Sadi Carnot (1796-1832). Aunque no fue el propio Carnot quien formuló la segunda ley<sup>10</sup>, su obra estableció los cimientos sobre los que Clausius y Kelvin edificaron la segunda ley unos años más tarde.

Carnot estaba interesado en los motores térmicos, más concretamente en la eficiencia de los motores térmicos. Permítaseme describir el más simple de tales motores (figura 1.1). Supongamos que tenemos un recipiente de volumen  $V$  que contiene un fluido, gas o líquido. La parte superior del recipiente está sellada por un pistón móvil. Este sistema se denomina motor térmico.



*Figura 1.1. Motor térmico.*

El recipiente está inicialmente en el estado 1, térmicamente aislado, y está a una temperatura  $T_1$  digamos  $0^\circ\text{C}$ . En el primer paso del funcionamiento de este motor (paso I) colocamos un peso sobre el pistón, con lo que el gas se comprime un tanto y el sistema pasa al estado 2. Luego ponemos el recipiente en contacto con un reservorio de calor (paso II), que no es más que un cuerpo muy grande a temperatura constante, digamos  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ . Se establece así un flujo de energía térmica del reservorio de calor al motor. Para simplificar, suponemos que el reservorio de calor es inmenso en comparación con el tamaño del motor. En la figura 1.1, el reservorio de calor está debajo del motor, aunque en realidad debería rodearlo

por entero. De esta manera nos aseguramos de que, una vez alcanzado el equilibrio, el sistema estará a la misma temperatura que el reservorio,  $T_2$ , y aunque el reservorio haya «perdido» algo de energía, su temperatura no cambiará apreciablemente. A medida que el gas (o líquido) del motor se calienta, se expande, y al hacerlo levanta el pistón móvil. En este paso el motor hace un trabajo útil: levantar un peso colocado sobre el pistón del nivel 1 al nivel 2. El sistema se sitúa ahora en el estado 3. Hasta este punto, el motor ha absorbido cierta cantidad de energía en la forma de calor transferido del reservorio al gas, lo que le permite realizar un trabajo (en este caso, levantar un peso, que a su vez podría hacer girar las ruedas de un tren, producir electricidad, etcétera). Si se retira el peso (paso III) el gas se expande aún más. Llegamos así al estado 4 final.

Si queremos convertir este dispositivo en un motor que realice un trabajo útil de manera repetida, como levantar pesos del nivel 1 al nivel 2, tenemos que completar un ciclo. Para ello tenemos que devolver el sistema a su estado inicial, esto es, enfriar el motor hasta la temperatura  $T_1$  inicial (paso IV). Esto puede lograrse acoplando el recipiente a un reservorio de calor o termostato a  $0^\circ\text{C}$  (de nuevo suponemos que el reservorio de calor es mucho mayor que nuestro sistema, por lo que su temperatura prácticamente no se ve afectada por el calor robado al motor). Una vez enfriado el motor hasta su temperatura inicial  $T_1$ , habremos vuelto al estado inicial y el ciclo puede volver a comenzar.

Esto no es exactamente lo que se conoce como ciclo de Carnot, pero tiene todos los elementos de un motor térmico que realiza trabajo a base de operar entre dos temperaturas,  $T_1$  y  $T_2$ .

El efecto neto de los ciclos repetidos es que el calor, o energía térmica, es bombeado al interior del motor desde un cuerpo a temperatura elevada  $T_2 = 100\text{ °C}$ . Se hace trabajo al levantar un cuerpo, y otra cantidad de energía térmica es bombeada del motor a un cuerpo a baja temperatura  $T_1 = 0\text{ °C}$ . El auténtico ciclo de Carnot es diferente en algunos aspectos, siendo la diferencia más importante que todos los procesos se efectúan de manera sumamente lenta y gradual<sup>11</sup>. Pero estos detalles no nos incumben aquí.

Carnot estaba interesado en la *eficiencia* de un motor térmico en condiciones ideales (pistón de masa nula, fricción nula, sin pérdidas de calor, etcétera).

Cuando se publicó el trabajo de Carnot en 1824<sup>12</sup>, se creía que el calor era una suerte de fluido, conocido como *calórico*. El principal interés de Carnot era el límite de la eficiencia de los motores térmicos. Lo que encontró es que la eficiencia límite depende sólo de la diferencia de temperaturas, y no de la sustancia empleada en el motor (el gas o líquido concreto). Más tarde se demostró que la eficiencia del motor idealizado de Carnot no podía ser superada por ningún motor real. Esto puso la primera piedra de la formulación de la segunda ley y preparó el camino para la introducción de un nuevo término: «entropía».

El primero que formuló la segunda ley de la termodinámica fue William Thomson (1824-1907), después conocido como Lord Kelvin. Básicamente, la formulación de Kelvin establece que no puede haber ningún motor cíclico cuyo *único* efecto sea bombear energía de un reservorio de calor y convertirla completamente en trabajo.

Aunque tal motor no incumpliría la primera ley de la termodinámica (la ley de conservación de la energía total), la segunda ley imponía una limitación sobre la cantidad de trabajo que puede obtenerse de un motor que opera entre dos reservorios de calor a diferente temperatura.

En pocas palabras, reconociendo que el calor es una forma de energía, la segunda ley de la termodinámica establece que es imposible convertir del todo calor (energía térmica) en trabajo (aunque lo contrario sí es posible: el trabajo puede convertirse del todo en calor, como cuando se agita un fluido mediante un agitador magnético o haciendo girar unas palas mecánicamente). Esta imposibilidad se expresa a veces como la «imposibilidad del movimiento perpetuo de segunda especie». Si tal «movimiento perpetuo» fuera posible, se podría recurrir al enorme reservorio de energía térmica de los océanos para impulsar un barco, dejando sólo una estela de agua ligeramente más fría. Por desgracia, esto es imposible.

Otra formulación de la segunda ley de la termodinámica fue ofrecida posteriormente por Rudolf Clausius (1822-1888). Básicamente, la formulación de Clausius no es más que lo que todos hemos comprobado alguna vez: el calor siempre fluye de un cuerpo más



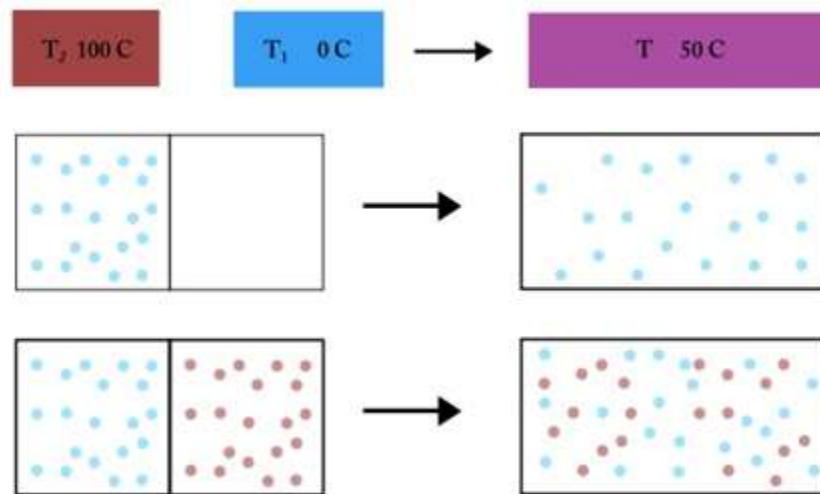
caliente (que se enfría en el proceso) a un cuerpo más frío (que se calienta). Nunca observamos que el proceso inverso tenga lugar de manera espontánea. La formulación de Clausius establece que no existe ningún proceso espontáneo cuyo efecto neto sea únicamente la transferencia de calor de un cuerpo frío a un cuerpo caliente. Por supuesto, podemos conseguir este flujo inverso de calor ejerciendo un trabajo sobre el fluido (que es como se consigue la refrigeración). Lo que Clausius afirmó es que el proceso de transferencia de calor de un cuerpo caliente a otro frío cuando se ponen en contacto, que es un proceso espontáneo, no puede observarse en sentido contrario. Esto se muestra esquemáticamente en la figura 1.2, donde dos cuerpos inicialmente aislados se ponen en contacto térmico.

Aunque las formulaciones de Kelvin y de Clausius son distintas, en realidad son equivalentes. Esto no es evidente de entrada, pero su equivalencia es fácil de demostrar mediante un argumento simple que puede encontrarse en cualquier *texto* elemental de termodinámica.

Hay muchas otras formulaciones o expresiones de la segunda ley de la termodinámica. Por ejemplo, si se deja que un gas confinado en un volumen  $V$  se expanda, siempre lo hará en una dirección (figura 1.3)<sup>13</sup>. El gas se expandirá hasta llenar por entero el nuevo volumen, digamos  $2V$ . Nunca veremos una inversión espontánea de este proceso, de manera que un gas que ocupe un volumen  $2V$  nunca convergerá en un volumen menor, digamos  $V$ .

Hay otros procesos con los que todos estamos familiarizados, que proceden en un sentido y nunca en el contrario, como los representados en las figuras 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5. El calor fluye de las temperaturas altas a las bajas; los materiales fluyen de las concentraciones altas a las bajas; dos gases se mezclan espontáneamente, y una gota de tinta que caiga en un vaso de agua se difuminará espontáneamente en el líquido hasta que el agua quede homogéneamente teñida (figura 1.5). Nunca veremos el proceso inverso.

Todos estos procesos tienen algo en común, y es que proceden en un sentido, y nunca en el contrario de manera *espontánea*. Pero no estaba ni mucho menos claro que todos obedecieran a una misma ley de la naturaleza. Fue Clausius quien apreció el principio general común a todos estos procesos.



De arriba abajo, figura 1.2, 1.3 y 1.4.

Recordemos que la formulación de Clausius de la segunda ley no es más que un enunciado de algo con lo que todos estamos familiarizados. La grandeza del logro de Clausius reside en su portentosa intuición de que todos los procesos espontáneos descritos están gobernados por una misma ley, y de que hay una magnitud que rige el curso de los hechos, una magnitud que, en los procesos espontáneos, siempre cambia en el mismo sentido. Esto se ligó a una flecha o vector orientado en un sentido del eje temporal. Fue Clausius quien introdujo el término «entropía», cuya elección justificó así<sup>14</sup>:

*Prefiero acudir a las lenguas muertas para los nombres de magnitudes científicas importantes, para que tengan el mismo significado en todas las lenguas vivas. En consecuencia, propongo llamar a  $S$  la entropía de un cuerpo, que en griego significa «transformación». He acuñado deliberadamente la palabra entropía por su similitud con energía, porque ambas magnitudes son tan análogas en su significado físico que una analogía terminológica me parece útil.*

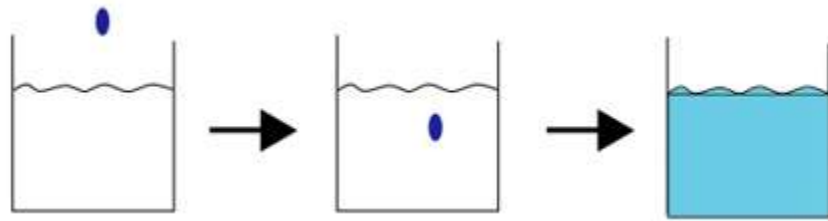


Figura 1.5

En el Merriam-Webster's Collegiate Dictionary (2003), el vocablo «entropía» se define como:

*«Cambio, giro literario, medida de la energía no utilizable en un sistema termodinámico cerrado... medida del grado de orden del sistema...».*

Como discutiremos en el capítulo 8, el término «entropía» en el sentido de Clausius es inadecuado. Pero cuando fue acuñado, el significado molecular de la entropía no se conocía ni entendía. De hecho, como veremos más adelante, la entropía no es la «transformación» (ni el «cambio» o «giro»): es algo que se *transforma o cambia o evoluciona* en el tiempo.

Con la introducción del nuevo concepto de entropía, ya se podía proclamar la formulación general de la segunda ley. En cualquier proceso espontáneo que tiene lugar en un sistema aislado, la entropía nunca disminuye. Esta formulación, que es muy general y abarca multitud de procesos, sembró la semilla del misterio asociado al concepto de entropía, el misterio de una magnitud que no se rige por una ley de conservación.

En física estamos acostumbrados a las leyes de conservación, lo cual tiene sentido<sup>15</sup>: ni la materia se crea de la nada, ni la energía es gratis. Tendemos a concebir una ley de conservación como algo «comprensible», algo que «tiene sentido». Ahora bien, ¿cómo puede una magnitud aumentar indefinidamente, y por qué? ¿Qué es lo que impulsa esa subida inexorable? No es sorprendente que la segunda ley estuviera cubierta por un velo de misterio. De hecho, en el

contexto de la teoría macroscópica de la materia, la segunda ley de la termodinámica es inexplicable. Y podría haber permanecido en el misterio de no ser por el descubrimiento de la teoría atómica de la materia y su aceptación por parte de la comunidad científica. Así, con la formulación macroscópica llegamos a un callejón sin salida en nuestra comprensión de la segunda ley de la termodinámica.

### **§. La formulación atomista de la segunda ley.**

Antes del desarrollo de la teoría cinética del calor (que se basaba en el reconocimiento de la teoría atómica de la materia), la termodinámica se aplicaba sin referencia alguna a la composición de la materia, como si ésta fuera un continuo. En este contexto la entropía no admitía más interpretación. En sí mismo, esto no es inusual. Cualquier ley física acaba en un callejón sin salida que debemos aceptar como tal, sin pretender mayor comprensión. Además, la segunda ley se formuló como una ley absoluta: la entropía *siempre* aumenta en cualquier proceso espontáneo en un sistema aislado. Esto no es diferente de cualquier otra ley; por ejemplo, las leyes de Newton se cumplen *siempre*, sin excepción<sup>16</sup>.

Un paso de gigante en nuestra comprensión de la entropía y de la segunda ley de la termodinámica lo dio Boltzmann con su interpretación estadística de la entropía, la famosa relación entre la entropía y el número total de micro estados de un sistema caracterizado macroscópicamente por una energía, un volumen y un número de partículas dados. Ludwig Boltzmann (1844-1906)<sup>17</sup>, junto con Maxwell y muchos otros, construyeron lo que hoy se

conoce como la teoría cinética de gases, o la teoría cinética del calor. Esto no sólo condujo a la identificación de la temperatura, que podemos percibir con nuestro sentido del tacto, con el movimiento de las partículas que constituyen la materia, sino también a la interpretación de la entropía sobre la base del número de estados accesibles al sistema.

Boltzmann introdujo la formulación atomista de la entropía en dos pasos. Primero definió una magnitud que denotó como  $H$ , y demostró que, como resultado de las colisiones moleculares y unos cuantos supuestos, siempre disminuye y alcanza un mínimo en el equilibrio. Es lo que Boltzmann llamó «teorema del mínimo», más adelante conocido como el *teorema H* de Boltzmann (publicado en 1872). Además, Boltzmann demostró que un sistema de partículas con cualquier distribución inicial de velocidades moleculares alcanzará el equilibrio térmico. En ese punto,  $H$  alcanza su valor mínimo, y la distribución de velocidades resultante será necesariamente la llamada distribución de Maxwell (véase el capítulo 7).

En aquella época, la teoría atómica de la materia aún no estaba establecida ni contaba con una aceptación universal. Aunque la idea de «átomo» llevaba más de dos mil años rondando en la mente de los científicos, no había evidencias convincentes de su existencia. No obstante, la teoría cinética del calor podía explicar la presión y la temperatura de un gas. ¿Y la entropía, la magnitud introducida por Clausius sin ninguna referencia a la composición molecular de la materia?

Boltzmann advirtió que su magnitud  $H$  tenía un comportamiento similar al de la entropía. Para obtener una magnitud que siempre *aumente* con el tiempo y permanezca constante una vez que el sistema haya alcanzado el equilibrio térmico no hay más que redefinir la entropía como el negativo de  $H$ .

El teorema  $H$  de Boltzmann fue criticado no sólo por científicos como Ernst Mach (1838-1916) y Wilhelm Ostwald (1853-1932), quienes no creían en la existencia de los átomos, sino también por sus colegas y amigos<sup>18</sup>.

La esencia de las críticas (lo que se conoce como objeción o paradoja de la reversibilidad) es el conflicto aparente entre la simetría temporal<sup>19</sup> de las ecuaciones newtonianas del movimiento y la asimetría temporal del comportamiento de la  $H$  de Boltzmann. Este conflicto entre la reversibilidad del movimiento molecular y la irreversibilidad de la magnitud  $H$  era profundo e irreconciliable. ¿Cómo puede derivarse una magnitud que diferencia el pasado del futuro (porque siempre aumenta con el paso del tiempo) de unas ecuaciones del movimiento que no distinguen en absoluto entre pasado y futuro? Las ecuaciones de Newton pueden emplearse para predecir la evolución de las partículas tanto hacia atrás como hacia delante en el tiempo. En el teorema  $H$  se entretrejan argumentos tanto mecánicos como probabilísticos. Pero el dominio de la mecánica es determinista y simétrico, mientras que el de la probabilidad es estocástico y asimétrico. Este conflicto se tomó como un defecto fatal del resultado de Boltzmann. Se sospechaba que tenía que haber algún error de razonamiento, o incluso que el

error estaba en admitir la naturaleza atómica de la materia. Esto supuso un revés para el teorema de Boltzmann, y quizás una victoria (provisional) para los anti atomistas.

La réplica de Boltzmann a la objeción de la reversibilidad fue que su teorema se cumplía casi siempre, pero que en algunos casos muy raros podía ocurrir que  $H$  aumentara, o la entropía disminuyera, con el tiempo.

Esto era insostenible. La segunda ley de la termodinámica, como cualquier otra ley de la física, se concebía y proclamaba como absoluta: no cabían las excepciones, por infrecuentes que fueran. Nadie había observado nunca una violación de la segunda ley. Al igual que no hay excepciones de las ecuaciones newtonianas del movimiento<sup>20</sup>, no debería haber excepciones de la segunda ley, ni siquiera en casos raros. La segunda ley debe ser absoluta e inviolable. En esta fase había dos visiones aparentemente distintas de la segunda ley. Por un lado estaba la ley clásica, no atomista y absoluta, formulada por Clausius y Kelvin, sintetizada en la aserción de que la entropía nunca disminuye en un sistema aislado. Por otro lado estaba la formulación atomista de Boltzmann, que afirmaba que la entropía aumenta «casi siempre», pero que hay excepciones, aunque son muy raras. Boltzmann proclamaba que la entropía podía disminuir, que esto no era *imposible*, sino sólo *improbable*<sup>21</sup>. Sin embargo, en vista de que todas las observaciones aparentemente sustentaban el carácter *absoluto* de la segunda ley, parecía que Boltzmann saldría derrotado, y con él la visión atomista de la materia.



A pesar de las críticas, Boltzmann no cedió, sino que reformuló su concepción de la entropía. En vez del teorema  $H$ , que tenía una columna en el campo de la mecánica y otra en el de la probabilidad, Boltzmann afianzó firmemente ambas columnas en los cimientos de la probabilidad. Ésta era una manera de razonar radicalmente nueva y ajena a la física. Por aquel entonces, la probabilidad no formaba parte de la física (y ni siquiera de las matemáticas). Boltzmann proclamó que la entropía (en su interpretación atomista) es igual al logaritmo del número total de configuraciones de un sistema. En esta nueva y osada formulación no había rastro de las ecuaciones del movimiento de las partículas. Parecía una definición *ad hoc* de una magnitud desprovista de física, una mera cuestión de contar el número de posibilidades, el número de estados o el número de configuraciones. Ésta entropía atomista entrañaba la previsión de excepciones, de manera que podía disminuir, si bien con una probabilidad extremadamente baja. En aquel momento, el que la formulación de Boltzmann dejara abierta la posibilidad de excepciones parecía *debilitar* su validez en comparación con la formulación no atomista, absoluta e inviolable, de la segunda ley. En el capítulo 8 volveremos sobre este punto y veremos que, de hecho, la posibilidad intrínseca de excepciones refuerza más que debilita la formulación atomista.

Las dos visiones irreconciliables de la segunda ley parecían haber conducido a un estado de estancamiento. La formulación de Boltzmann sólo se impuso después de que la teoría atómica de la

materia contara con una aceptación plena. Por desgracia para Boltzmann, esto no ocurrió hasta después de su muerte en 1906.

Un año antes, un artículo teórico decisivo de Einstein sobre el movimiento browniano abrió el camino de la victoria para la visión atomista de la materia. A primera vista, este asunto no parecía tener nada que ver con la segunda ley.

El movimiento browniano fue descrito por el botánico inglés Robert Brown (1773-1858). El fenómeno es muy simple: si se observa al microscopio una suspensión de partículas diminutas, como granos de polen, en agua, se observa que se mueven de manera aparentemente aleatoria. Inicialmente se pensó que este movimiento incesante era causado por microorganismos. Pero Brown y otros mostraron que el mismo fenómeno se daba con partículas inorgánicas dispersas en el líquido.

Albert Einstein (1879-1955) fue el primero en proponer una teoría del movimiento browniano<sup>22</sup>. Einstein creía en la constitución atómica de la materia, y también era un partidario incondicional de Boltzmann<sup>23</sup>. Lo que Einstein propuso es que, si tenemos un número enorme de átomos o moléculas agitándose aleatoriamente en un líquido, es de esperar que haya fluctuaciones. Si en el líquido se introducen partículas minúsculas (a escala macroscópica, pero todavía grandes en comparación con las dimensiones de las moléculas del líquido), estas sufrirán un «bombardeo» molecular aleatorio. De vez en cuando se darán asimetrías en este bombardeo de moléculas de líquido sobre las partículas suspendidas, y el resultado será un movimiento zigzagueante.

En 1905, Einstein publicó una teoría de este movimiento aleatorio como parte de su tesis doctoral<sup>24</sup>. En cuanto su teoría fue corroborada por los experimentadores —en particular Jean Perrin (1870-1942) —, la aceptación de la visión atomista se hizo inevitable. La termodinámica clásica, basada en la naturaleza *continua* de la materia, no deja lugar a las fluctuaciones. Lo cierto es que en un sistema macroscópico las fluctuaciones son extremadamente pequeñas. Por eso no las observamos a escala macroscópica. Pero a la escala de las diminutas partículas brownianas, las fluctuaciones se magnifican y se hacen observables. La aceptación de la constitución atómica de la materia conllevó la aceptación de la expresión de Boltzmann de la entropía. Hay que decir que esta formulación de la entropía se implantó rápidamente y no quedó afectada ni modificada por las dos grandes revoluciones de la física a principios del siglo XX: la mecánica cuántica y la relatividad<sup>25</sup>. La puerta para la comprensión de la entropía estaba ahora abierta de par en par.

La asociación de la entropía con el número de configuraciones y sus probabilidades era ahora incuestionable desde el punto de vista de la dinámica de las partículas. Pero esto no era fácil de comprender y aceptar en una época en la que la probabilidad aún no formaba parte de la física.

Casi al mismo tiempo que Boltzmann publicaba su interpretación de la segunda ley, Willard Gibbs (1839-1903) concibió la teoría mecano-estadística de la materia, aplicando un enfoque puramente probabilístico y estadístico. El éxito aplastante del enfoque de

Gibbs, basado en postulados probabilísticos<sup>26</sup>, nos ha dado la seguridad de que un sistema de una enormidad de partículas, aunque en última instancia esté gobernado por las leyes del movimiento, se comportará de manera aleatoria y caótica, y que prevalecerán las leyes probabilísticas.

La relación de la entropía con el número de estados de un sistema no basta para explicar su comportamiento. Debemos suplementar dicha relación con tres hechos y supuestos fundamentales. Primero, que el número de partículas, y aún más el de micro estados, es enorme. Segundo, que todos estos estados son igualmente probables y, por ende, tienen las mismas posibilidades de ser visitados por el sistema. Tercero, y principal, que en el equilibrio el número de *micro estados* consistentes con (o pertenecientes a) el *macro estado* observado es casi igual al número *total* de micro estados posibles. Volveremos sobre estos aspectos de un sistema físico en los capítulos 6 y 7.

Con estos supuestos suplementarios, que cristalizarían en una teoría firme de la termodinámica estadística, la formulación atomista de la entropía obtuvo una victoria decisiva. La formulación no atomista de la segunda ley todavía se enseña y se aplica con éxito. No hay nada erróneo en ella, salvo que no revela, ni puede revelar, el secreto que esconde el concepto de entropía.

La relación heurística de Boltzmann entre la entropía y el logaritmo del número total de estados<sup>27</sup> abrió la puerta al desciframiento del significado de la entropía. Pero aún tenemos que dar unos cuantos

pasos más para atravesar la niebla y disipar el misterio que rodea la entropía.

Podemos llegar a esta meta a través de varias rutas. Expondré las dos principales. Una se basa en la interpretación de la entropía a partir de la extensión del desorden en un sistema<sup>28</sup>, mientras que la otra tiene que ver con la interpretación de la entropía a partir de la información perdida en el sistema<sup>29</sup>.

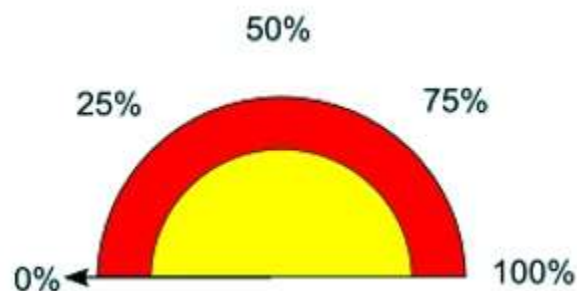
La primera ruta, la más clásica y popular, parte de la propia interpretación de Boltzmann de la entropía: un gran número de estados concebiblemente implica gran cantidad de desorden. Esto ha llevado a la lectura corriente de la segunda ley de la termodinámica como que «la Naturaleza procede del orden al desorden».

En mi opinión, aunque esta interpretación de la entropía según el orden-desorden resulta intuitivamente clara en muchos casos, no siempre es válida. Desde un punto de vista cualitativo, puede decirnos *qué* es lo que cambia en algunos procesos espontáneos (aunque no en todos), pero no da respuesta a la cuestión de *por qué* la entropía siempre aumenta.

La segunda ruta, aunque menos popular entre los científicos, es la que considero la mejor. En primer lugar, porque *la información* es una magnitud mejor *definida*, cuantitativa y objetivamente, mientras que el orden y el desorden son conceptos no tan bien definidos. En segundo lugar, la información, o más bien la información perdida, puede usarse para dar respuesta a la pregunta de qué es lo que cambia en *cualquier* proceso espontáneo.

«Información» es una palabra familiar; como los términos «energía», «fuerza» o «trabajo», no suscita ningún misterio. Su medida se define con precisión en el marco de la teoría de la información. Esta magnitud retiene el significado básico de información con el que estamos familiarizados. No ocurre así cuando apelamos al «desorden» para describir lo que cambia. Discutimos esto en los capítulos 7 y 8. La información en sí misma no da respuesta a la cuestión de *por qué* la entropía cambia como lo hace. Pero, a diferencia del desorden, se define a partir de probabilidades y, como veremos, ahí está la clave de la respuesta que buscamos.

Por las razones expuestas, dedicamos el próximo capítulo a familiarizarnos con unas cuantas nociones básicas de probabilidad e información. Lo hacemos de manera muy cualitativa, para que todos los lectores, con formación científica o sin ella, puedan seguir los argumentos. Todo lo que se requiere es sentido común. Tan pronto como nos hayamos familiarizado con estos conceptos, el misterio que rodea a la entropía y la segunda ley se desvanecerá, y estaremos en condiciones de responder ambas preguntas: qué es lo que cambia y por qué cambia como lo hace.



*Fin del capítulo 1*



## Capítulo 2

### Una breve introducción a la teoría de la probabilidad, la teoría de la información, y todo lo demás

#### Contenido:

- §. *La definición clásica.*
- §. *La definición de frecuencia relativa.*
- §. *Sucesos independientes y probabilidad condicionada.*
- §. *Tres advertencias.*
- §. *Probabilidad condicionada y causa-efecto.*
- §. *Probabilidad condicionada y probabilidad conjunta.*
- §. *Una cucharada de teoría de la información.*
- §. *Una pizca de matemáticas, física y química.*
- §. *Un problema de lotería.*
- §. *Un problema en el orden-desorden.*
- §. *Un desafío.*
- §. *Respuestas a los problemas.*

La teoría de la probabilidad es una rama de las matemáticas. Tiene usos en todos los campos de la ciencia, desde la física y la química hasta la biología y la sociología, la economía y la psicología; en resumen, en todos los aspectos de nuestras vidas.

Hacemos «cálculos» probabilísticos de manera consciente o inconsciente en muchas de las decisiones que tomamos, sea cruzar la calle, tomar un taxi, comer algo que no hemos probado nunca antes, ir a la guerra, negociar un tratado de paz, etcétera. En



muchas actividades intentamos estimar las posibilidades de éxito o fracaso.

Sin un pensamiento probabilístico de esta índole, un médico no podría diagnosticar una enfermedad a partir de los síntomas, ni podría prescribir la mejor medicación para la enfermedad diagnosticada. Ni las aseguradoras podrían ajustar el coste del seguro de automóvil a la medida de clientes con perfiles personales diferentes.

La teoría de la probabilidad se derivó de las cuestiones que los jugadores plantearon a los matemáticos, quienes presumiblemente tenían un mejor *conocimiento* de cómo estimar las posibilidades de ganar en un juego. Puede que algunos jugadores incluso creyeran que ciertas personas tenían un don «divino» que les permitía *predecir* el resultado de un juego<sup>30</sup>.

Básicamente, la probabilidad es una magnitud subjetiva que mide el grado o extensión de la creencia de que ocurrirá cierto suceso<sup>31</sup>. Por ejemplo, yo puedo estimar que las posibilidades de que un sospechoso haya cometido el crimen del que se le acusa son sólo de un 10%, por lo que debería ser absuelto. El juez, en cambio, puede llegar a la conclusión bien diferente de que el sospechoso es culpable con una probabilidad elevada. La razón de una discrepancia tan extrema es que cada uno tiene su propia información sobre las evidencias y evalúa dicha información a su manera. Aunque dos personas tengan la misma información, cada una podría procesarla de modo que le condujese a una estimación

diferente de las posibilidades, o la probabilidad de un suceso (o la plausibilidad de cierta proposición).

De esta noción tan vaga, cualitativa y subjetiva se ha derivado una teoría de la probabilidad refinada que es cuantitativa y constituye una rama *objetiva*<sup>32</sup> de las matemáticas. Aunque no es aplicable a todos los sucesos posibles, se puede aplicar a un cuerpo de sucesos muy grande, como es el caso de los juegos de azar y muchos «sucesos» que constituyen resultados de experimentos en física.

Así pues, si uno afirma que la probabilidad de que el Mesías aparezca el próximo lunes es del 90%, y otro afirma que no pasa del 1%, no hay manera de decidir quién tiene razón. De hecho, aunque esperemos al próximo lunes y veamos que no ocurre nada, seguiríamos sin poder decir cuál de las probabilidades estimadas era la correcta<sup>33</sup>. No obstante, para algunas clases de experimentos bien definidos existe una probabilidad «pertenciente» al suceso, y que es aceptada por todos.

Por ejemplo, si lanzamos una moneda de la que no tenemos por qué sospechar que está desequilibrada o «trucada», las posibilidades de los resultados «cara» o «cruz» son 50% y 50% respectivamente. En esencia, no puede demostrarse que éstas sean las probabilidades «correctas». Podemos aceptar una demostración práctica basada en lanzar muchas veces una moneda y luego contar las frecuencias de los resultados. Si lanzamos una moneda mil veces, hay muchas posibilidades de que alrededor de 500 veces salga cara y otras 500 veces salga cruz. Pero también puede ocurrir que salgan 590 caras y 410 cruces. De hecho, podemos obtener cualquier secuencia de cara

y cruz. No hay manera de *derivar* o extraer las probabilidades de tales experimentos. En éste y otros experimentos similares con monedas o dados, debemos aceptar su existencia axiomáticamente. Las posibilidades de 50:50, o mitad y mitad de cara y cruz, deben aceptarse como algo perteneciente al suceso, igual que la cantidad de masa perteneciente a una porción de materia. Hoy la probabilidad se considera un concepto primitivo que no puede definirse a partir de conceptos más primitivos.

Volvamos a la época pre probabilística de los siglos XVI y XVII, cuando el concepto de probabilidad sólo había comenzado a emerger.

A modo de ejemplo, se dice que a Galileo Galilei (1564-1642) le plantearon el siguiente problema:

Supongamos que jugamos con tres dados y apostamos sobre la *suma* de los resultados de lanzarlos todos juntos. Intuimos con claridad que no sería juicioso apostar al 3 o al 18. Nuestra impresión es correcta (en el sentido antes discutido). La razón es que tanto el 3 como el 18 sólo pueden darse de una manera: que salga 1-1-1 o 6-6-6, respectivamente, e intuitivamente estimamos que ambas posibilidades son relativamente raras. Sin duda, es mejor apostar al 7. ¿Por qué? Porque hay más *particiones* del número 7 en tres números (entre 1 y 6). En otras palabras, se puede obtener 7 de cuatro maneras posibles: 1-1-5, 1-2-4, 1-3-3 y 2-2-3. También *intuimos* que el número de particiones es mayor cuanto mayor es la suma, hasta cierto punto más o menos a medio camino entre el mínimo de 3 y el máximo de 18. Ahora bien, ¿cómo

decidimos si apostar al 9 o al 10? Si hacemos cuentas, veremos que ambos resultados tienen el mismo número de particiones, es decir, el mismo número de combinaciones de enteros (de 1 a 6) cuya suma es 9 o 10. Éstas son todas las particiones posibles:

Para 9: 1-2-6      1-3-5      1-4-4      2-2-5      2-3-4      3-3-3  
 Para 10: 1-3-6      1-4-5      2-2-6      2-3-5      2-4-4      3-3-4

A primera vista, puesto que el 9 y el 10 tienen el mismo número de particiones, podríamos concluir que también tienen las mismas posibilidades de salir. Pero nos equivocariamos. En realidad, 10 es mejor apuesta que 9. La razón es que, aunque el número de particiones es el mismo en ambos casos, el número total de resultados de los tres dados que suman 9 es algo menor que el número de resultados que suman 10. En otras palabras, el número de particiones es el mismo, pero cada partición tiene un «peso» diferente. Por ejemplo, la partición 1-4-4 puede darse de tres maneras:

1-4-4, 4-1-4, 4-4-1

Esto se ve fácilmente si usamos tres dados de distintos colores, digamos azul, rojo y blanco; entonces las tres posibilidades para 1-4-4 son:

azul 1, rojo 4, blanco 4

azul 4, rojo 1, blanco 4

azul 4, rojo 4, blanco 1

Cuando contamos todas las particiones posibles con sus pesos respectivos, obtenemos los resultados que se muestran a continuación.

Resultados posibles del lanzamiento de tres dados para  $\text{suma} = 9$ :

	1-2-6	1-3-5	1-4-4	2-2-5	2-3-4	3-3-3
	1-6-2	1-5-3	4-1-4	2-5-2	2-4-3	
	2-1-6	3-1-5	4-4-1	5-2-2	3-2-4	
	2-6-1	3-5-1			3-4-2	
	6-1-2	5-1-3			4-2-3	
	6-2-1	5-3-1			4-3-2	
Pesos:	6	6	3	3	6	1

El número total de resultados para 9 es 25.

Resultados posibles del lanzamiento de tres dados para  $\text{suma} = 10$ :

	1-3-6	1-4-5	2-2-6	2-3-5	2-4-4	3-3-4
	1-6-3	1-5-4	2-6-2	2-5-3	4-2-4	3-4-3
	3-1-6	4-1-5	6-2-2	3-2-5	4-4-2	4-3-3
	3-6-1	4-5-1		3-5-2		
	6-1-2	5-1-3		5-2-3		
	6-2-1	5-3-1		5-3-2		
Pesos:	6	6	3	6	3	3

El número total de resultados para 10 es 27.

Hay 25 resultados distinguibles que suman 9, mientras que hay 27 que suman 10. Por lo tanto, las posibilidades relativas de 9 y de 10 son 25:27, así que es preferible apostar por el 10, como presumiblemente aconsejaría Galileo.

Pero ¿qué significa que 10 es la «mejor» elección, y que éste es el número ganador «correcto»? Es evidente que yo podría apostar por el 10 y el lector por el 3, y yo podría perder y el lector ganar. ¿Garantizan nuestras cuentas que si apostamos por el 10 siempre ganaremos? Obviamente no. ¿Qué significa, entonces, la razón 25:27?

La teoría de la probabilidad nos da una respuesta. No es una respuesta precisa ni plenamente satisfactoria, ni garantiza el triunfo; sólo nos dice que si jugamos muchas veces, la probabilidad de que salga 9 es  $25/216$ , mientras que la probabilidad de que salga 10 es algo mayor,  $27/216$  (donde 216 es el número de resultados posibles,  $6^3 = 216$ ). ¿Cuántas veces tendremos que jugar para tener la seguridad de acertar? Sobre este asunto, la teoría permanece muda. Sólo dice que en el límite de un número infinito de lanzamientos, la frecuencia del 9 debería ser  $25/216$ , y la frecuencia del 10 debería ser  $27/216$ . Pero no podemos lanzar los dados infinitamente, así que ¿cuál es el sentido de estas probabilidades? Por el momento, lo único que podemos decir es que la razón 27:25 refleja nuestra *creencia* o nuestra confianza en que el 10 tiene mayor probabilidad de salir que el 9<sup>34</sup>.

Dejemos ahora nuestro juego. Más adelante volveremos sobre éste y otros juegos similares con más dados.

En la discusión anterior hemos empleado la palabra «probabilidad» sin definirla. De hecho, ha habido varias propuestas de *definición* de la probabilidad. Cada una tiene sus limitaciones. Pero lo más importante es que cada definición introduce el concepto de probabilidad en la propia definición, lo que quiere decir que todas las definiciones de probabilidad son circulares. La versión actual de la teoría matemática de la probabilidad tiene una base axiomática, igual que la geometría euclídea o cualquier otra rama de las matemáticas.

El enfoque axiomático es muy simple y no requiere conocimientos matemáticos. Fue desarrollado principalmente por Kolmogorov en los años treinta, y consiste en los tres conceptos básicos siguientes:

1) *El espacio muestral*. Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento específico bien definido. Ejemplos: el espacio muestral del lanzamiento de un dado consiste en seis resultados posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}; el lanzamiento de una moneda tiene un espacio muestral consistente en dos resultados {cara, cruz}. Estos resultados se denominan sucesos elementales. Obviamente, no siempre se puede determinar el espacio muestral de un experimento. En algunos casos el número de elementos es infinito (como en el lanzamiento de un dardo hacia una diana circular) y en otros ni siquiera puede describirse. Nos interesan los espacios

simples donde los resultados, o sucesos elementales, son fáciles de contar.

2) *Una colección de sucesos*. Un suceso se define como la unión o suma de sucesos elementales. Ejemplos:

- El resultado de lanzar un dado es «par». Este suceso consiste en los sucesos elementales {2, 4, 6}, es decir, en si ha salido o saldrá 2, 4 o 6 en el experimento de lanzar un dado<sup>35</sup>.
- El resultado de lanzar un dado es «mayor o igual que 5». Este suceso consiste en los sucesos elementales {5, 6}, es decir, en si ha salido 5 o 6.

En términos matemáticos, la colección de sucesos consiste en todos los subconjuntos del espacio muestral<sup>36</sup>.

3) *Probabilidad*. A cada suceso le asignamos un número que llamaremos la probabilidad de ese suceso, con las siguientes propiedades:

- La probabilidad de cada suceso es un número entre cero y uno.
- La probabilidad del suceso seguro (es decir, la ocurrencia de cualquier resultado) es uno.
- La probabilidad del suceso imposible es cero.
- Si dos sucesos son disjuntos o mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de la suma (o unión) de ambos sucesos no es más que la suma de las probabilidades de cada suceso.



La condición (a) simplemente proporciona la escala de la función de probabilidad. En la vida diaria podríamos usar el rango 0-100% para describir las posibilidades de, por ejemplo, que llueva mañana. En la teoría de la probabilidad se emplea el rango (0, 1). La condición (b) simplemente establece que si llevamos a cabo un experimento, debe darse alguno de los resultados posibles. A este suceso, denominado suceso seguro, se le asigna la probabilidad uno. Similarmente, asignamos una probabilidad nula al suceso imposible. La condición (d) es intuitivamente autoevidente. La exclusión mutua significa que la ocurrencia de un suceso excluye la posibilidad de la ocurrencia del otro. En términos matemáticos, decimos que la intersección de ambos sucesos es *vacía* (esto es, no contiene sucesos elementales).

Por ejemplo, los sucesos:

$A = \{\text{el resultado del lanzamiento de un dado es } \textit{par}\}.$

$B = \{\text{el resultado del lanzamiento de un dado es } \textit{impar}\}$

son claramente disjuntos, porque la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro. Si definimos el suceso:

$C = \{\text{el resultado del lanzamiento de un dado es mayor o igual que } 5\}$

es evidente que  $A$  y  $C$  o  $B$  y  $C$  no son disjuntos.  $A$  y  $C$  contienen el suceso elemental 6, mientras que  $B$  y  $C$  contienen el suceso elemental 5.

Los sucesos «mayor o igual que 4» y «menor o igual que 2» son claramente disjuntos. Adelantándonos a la discusión que sigue, podemos calcular que la probabilidad del primer suceso {4, 5, 6} es  $3/6$ , y la probabilidad del segundo suceso {1, 2} es  $2/6$ , de manera que la probabilidad del suceso combinado (o la unión) {1, 2, 4, 5, 6} es  $5/6$ , que es la suma de  $2/6$  y  $3/6$ .

Una manera muy útil de ilustrar el concepto de probabilidad y la regla de la suma es el diagrama de Venn. Imaginemos que, con los ojos tapados, lanzamos un dardo hacia un tablero rectangular con un área total  $S = A \times B$ . Supondremos que el dardo *debe* incidir obligatoriamente en algún punto del tablero (figura 2.1).



*Figura 2.1*

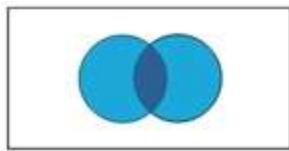
Ahora tracemos un círculo dentro del tablero, y preguntémonos cuál es la probabilidad de que el dardo se clave dentro del círculo<sup>37</sup>. Por puro sentido común, suponemos que la probabilidad del suceso «clavarse dentro del círculo» es igual a la razón entre el área del círculo y el área total del tablero<sup>38</sup>.

Decimos que dos regiones del tablero son disjuntas si no se superponen (figura 2.2). Sin duda, la probabilidad de que el dardo se clave en una u otra región es la razón entre el área de ambas regiones y el área total del tablero.



*Figura 2.2*

Esto nos lleva directamente a los axiomas de suma antes enunciados. La probabilidad de que el dardo se clave en cualquiera de las dos regiones es la suma de las probabilidades de cada región. Esta ley de aditividad no se cumple cuando las regiones se superponen, es decir, cuando hay puntos del tablero que pertenecen a ambas regiones, tal como se muestra en la figura 2.3.



*Figura 2.3*

En este caso resulta evidente que la probabilidad de que el dardo se clave en alguna de las regiones es la suma de las probabilidades correspondientes a cada región menos la probabilidad del sector superpuesto. Piénsese simplemente en el área cubierta por ambas regiones: es la suma de las áreas respectivas menos el área de la intersección.

El edificio entero de la teoría matemática de la probabilidad se erige sobre este fundamento axiomático relativamente simple. No sólo es sumamente útil, sino también una herramienta esencial en todas

las ciencias y más allá. Como el lector habrá notado, los principios básicos de la teoría son simples, intuitivos y sólo requieren sentido común.

En la estructura axiomática de la teoría de la probabilidad, se dice que las probabilidades se *asignan* a cada suceso<sup>39</sup>. Estas probabilidades deben cumplir las cuatro condiciones *a*, *b*, *c* y *d*. La teoría no *define* la probabilidad, ni proporciona un método para calcularla o medirla<sup>40</sup>. De hecho, no hay manera de calcular la probabilidad de ningún suceso general. La probabilidad sigue siendo una medida de nuestra fe en la ocurrencia de ciertos sucesos, y como tal es una magnitud altamente subjetiva. Sin embargo, para algunos experimentos simples, como lanzar una moneda o un dado, o encontrar el número de átomos en cierta región del espacio, disponemos de métodos de cálculo muy útiles. Aunque tienen sus limitaciones y se aplican a casos «ideales», las probabilidades así estimadas resultan sumamente útiles. Y lo que es más importante, puesto que se basan en razonamientos de sentido común, *todos* deberíamos convenir en que son las probabilidades «correctas», esto es, que dejan de ser subjetivas para considerarse objetivas. Describiremos dos «definiciones» muy útiles que se han sugerido para este concepto.

### **§. La definición clásica.**

Comencemos por la definición clásica, también conocida como la definición *a priori*<sup>41</sup>. Sea  $N(\text{total})$  el número total de resultados posibles de un experimento concreto. Por ejemplo, para el

lanzamiento de un dado,  $N(\text{total})$  es seis (los seis resultados, o sucesos elementales, de este experimento). Denotamos por  $N(\text{suceso})$  el número de resultados (sucesos elementales) incluidos en el suceso que nos interesa. Por ejemplo, el número de sucesos elementales incluidos en el suceso «par» es 3, esto es,  $\{2, 4, 6\}$ . La probabilidad del suceso que nos interesa se define como la razón  $N(\text{suceso})/N(\text{total})$ . Ya hemos hecho uso de esta definición intuitivamente satisfactoria al calcular la probabilidad del suceso «mayor o igual que 4». El número total de sucesos elementales (resultados) del lanzamiento de un dado es  $N(\text{total}) = 6$ . El número de sucesos elementales incluidos en el suceso «mayor o igual que 4» es  $N(\text{suceso}) = 3$ . Por lo tanto, la probabilidad del suceso considerado es  $3/6$ , o  $1/2$ , que para todos es la estimación «correcta».

Sin embargo, al aplicar esta *definición* de probabilidad hay que actuar con cautela. Para empezar, no todo suceso puede «descomponerse» en sucesos elementales (como es el caso del suceso «mañana comenzará a llover a las diez en punto»). Pero lo más importante es que la fórmula anterior presume que todos los sucesos elementales tienen las mismas posibilidades de ocurrir. En otras palabras, se presume que cada suceso elemental tiene la misma *probabilidad* ( $1/6$  en el caso del dado). Pero ¿cómo podemos asegurarlo? Hemos ofrecido una fórmula para calcular la probabilidad de un suceso que se basa en el conocimiento de las probabilidades de los sucesos elementales. Por eso esta definición clásica no puede tomarse como una verdadera *definición* de

probabilidad, ya que es circular. Aun así, se trata de una «definición» (o, mejor, un método de cálculo) sumamente útil. Se basa en nuestra *creencia* en que cada suceso elemental tiene la misma probabilidad, en este caso  $1/6$ . ¿Por qué creemos tal cosa? Lo mejor que podemos hacer es invocar el argumento de la simetría. Puesto que presumimos que todas las caras del dado son equivalentes, sus probabilidades deben ser iguales. Esta conclusión tendría que ser universalmente aceptada, tanto como la aserción axiomática de que dos líneas rectas se cruzarán como mucho en un único punto. Así, mientras que la probabilidad del suceso «lloverá mañana» es altamente subjetiva, que la probabilidad del suceso «par» al arrojar un dado es  $1/2$  es algo en lo que todo el mundo que pretenda razonar probabilísticamente debería estar de acuerdo, igual que cualquiera que pretenda razonar geoméricamente debe aceptar los axiomas de la geometría.

Como en la geometría, todos los resultados y teoremas derivados de los axiomas se aplican estrictamente a casos ideales: un dado «equitativo» o una moneda «equitativa». No se define lo que es un dado equitativo. Es un concepto tan «ideal» como un círculo o cubo platónico<sup>42</sup>. Todos los dados reales, como todos los cubos o esferas reales, son sólo réplicas aproximadas de los objetos platónicos ideales. En la práctica, si no tenemos ningún motivo para sospechar que un dado no es totalmente homogéneo o simétrico, podemos suponer que es ideal.

Esta limitación no impide que el procedimiento de cálculo de probabilidades descrito sea muy útil en muchas aplicaciones. Uno

de los postulados básicos de la mecánica estadística es que cada uno de los microestados que comprende un sistema macroscópico tiene la misma probabilidad. Una vez más, este postulado no es más «demostrable» que la afirmación de que cada resultado del lanzamiento de un dado es igualmente probable. Esto nos lleva a la segunda «definición» o, si se prefiere, el segundo procedimiento de cálculo de probabilidades.

### **§. La definición de frecuencia relativa.**

Veamos ahora la llamada definición a *posteriori* o «experimental», ya que se basa en el cómputo de la frecuencia relativa de la ocurrencia de un suceso. El ejemplo más simple es el juego de cara o cruz. Hay dos resultados posibles: cara o cruz. Excluimos posibilidades raras, como que la moneda caiga de canto, o se haga añicos durante el experimento, o desaparezca de la vista.

Procedemos a lanzar una moneda  $N$  veces, y registramos la frecuencia con la que sale cara. Éste es un experimento bien definido y factible.  $Sin(H)$  es el número de caras en  $N(total)$  lanzamientos, entonces la frecuencia del suceso «cara» es  $n(H)/N(total)$ . La probabilidad de ocurrencia del suceso «cara» se *define* como el límite de dicha frecuencia cuando  $N$  tiende a infinito<sup>43</sup>. Por supuesto, esta definición no es nada práctica. Para empezar, no podemos lanzar la moneda infinitas veces. Y aunque pudiéramos, ¿quién nos garantiza que ese límite existe? Sólo podemos imaginarlo. Creemos que el mencionado límite existe y que es único, pero lo cierto es que no podemos demostrarlo.

En la práctica, la definición anterior se aplica tomando valores de  $N$  muy grandes. ¿Por qué? Porque creemos que si  $N$  es lo bastante grande y la moneda no está trucada, entonces hay una *elevada probabilidad* de que la frecuencia relativa de «cara» sea  $1/2^{44}$ . Una vez más, hemos introducido el concepto de probabilidad en su propia definición.

Este método puede emplearse para «demostrar» que la probabilidad de cada resultado posible del lanzamiento de un dado es  $1/6$ . Sólo hay que repetir el experimento muchas veces y contar las veces que ha salido 4 (o cualquier otro resultado). La frecuencia relativa puede servir para «demostrar» la probabilidad de ese suceso. Este razonamiento descansa sobre la *creencia* de que si  $N$  es lo bastante grande, deberíamos obtener la frecuencia de uno de los seis resultados posibles. Ahora bien, ¿y si hacemos el experimento un millón de veces y hallamos que la frecuencia relativa de «4» es 0,1665 (en vez de 0,1666...)? ¿Qué conclusión podríamos sacar? Una podría ser que el dado es «justo», pero que hacían falta más lanzamientos. Otra conclusión podría ser que el dado está sesgado y pesa un poco más de un lado que de otro. La tercera conclusión podría ser que los lanzamientos no eran perfectamente aleatorios. ¿Cómo estimamos la probabilidad de un suceso, entonces? Lo único que podemos hacer es apelar a nuestro *sentido común*. Recurrimos al sentido común para juzgar que, en virtud de la simetría del dado (todas las caras son equivalentes), la probabilidad de cada resultado debe ser la misma. No hay manera de *demostrar* esto. Todo lo que podemos decir es que, si el dado es ideal (un dado así no existe en la



práctica), entonces *creemos* que, si lanzamos el dado muchas veces, a largo plazo el resultado «4» sale en una sexta parte del número total de lanzamientos. Esta creencia, aunque parezca subjetiva, debe ser compartida por todos nosotros y contemplada como *objetiva*. Uno tiene derecho a no aceptar esta convención, por supuesto, pero si no lo hace no podrá hacer uso de la teoría de la probabilidad ni encontrar convincentes los argumentos presentados en el resto de este libro.

Hay que decir, no obstante, que la identificación de los sucesos elementales no siempre es sencilla o posible. Veamos un conocido ejemplo. Supongamos que tenemos  $N$  partículas (electrones, por ejemplo) y  $M$  casillas (niveles de energía). Hay diferentes maneras de distribuir las  $N$  partículas en las  $M$  casillas. Si no tenemos más información, podemos suponer que todas las configuraciones son equiprobables.

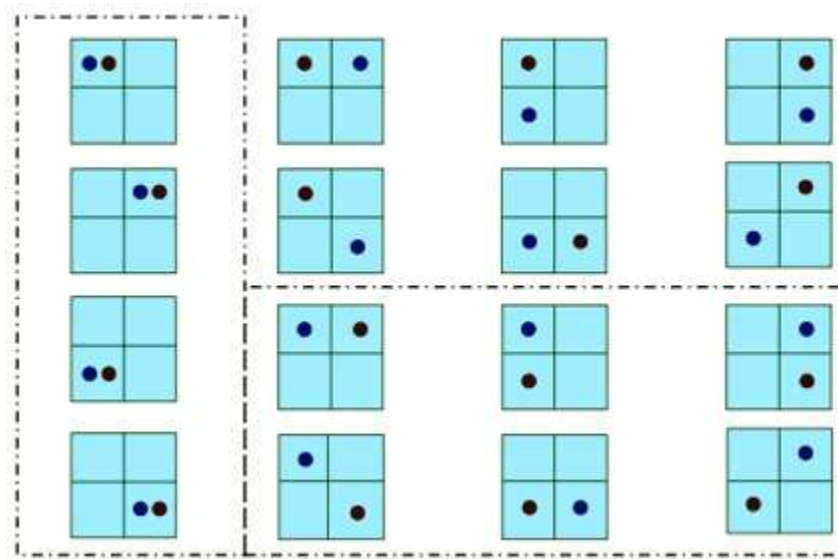
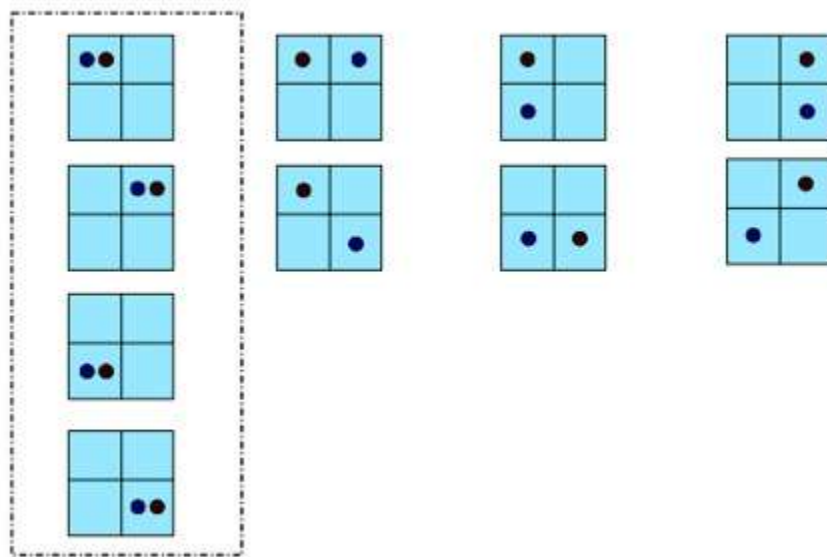


Figura 2.4. Todas las configuraciones posibles.

La figura 2.4 muestra todas las configuraciones posibles para  $N = 2$  partículas en  $M = 4$  casillas.

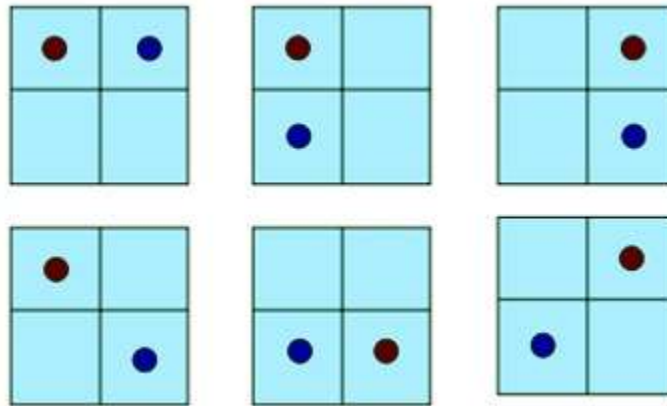
Podemos asignar la misma probabilidad a cada una de las 16 configuraciones. Esta asignación se conoce como «estadística clásica» (no confundir con la definición «clásica» de probabilidad). Valdría para monedas o dados repartidos en casillas, pero no para partículas moleculares distribuidas en niveles de energía.

Resulta que la naturaleza impone ciertas restricciones sobre las configuraciones que cuentan como sucesos elementales. La naturaleza también nos dice que hay dos maneras de contabilizar sucesos elementales, según el tipo de partícula. Para las partículas llamadas bosones (como los fotones o los átomos de  $\text{He}_4$ ) sólo hay diez configuraciones equiprobables, tal como se muestra en la figura 2.5.



*Figura 2.5. Configuraciones de Bose-Einstein.*

Para el segundo grupo de partículas (como los electrones o los protones), conocidas como fermiones, sólo hay seis configuraciones posibles, tal como se muestra en la figura 2.6.



*Figura 2.6. Configuraciones de Fermi-Dirac.*

En el primer caso (figura 2.5) decimos que las partículas obedecen a la estadística de Bose-Einstein, y en el segundo caso (figura 2.6) decimos que obedecen a la estadística de Fermi-Dirac. Pongo este ejemplo sólo para mostrar que no tenemos una regla universal para enumerar los sucesos elementales.

Sólo podemos proceder por ensayo y error para seleccionar los sucesos elementales, y luego buscar algún respaldo teórico para la selección correcta final. De este modo se han descubierto principios físicos de gran calado<sup>45</sup>.

### ***§. Sucesos independientes y probabilidad condicionada.***

Los conceptos de dependencia entre sucesos y probabilidad condicionada están en el núcleo de la teoría de la probabilidad y tienen multitud de usos en ciencia<sup>46</sup>. En este libro sólo necesitamos el concepto de independencia entre dos sucesos. Pero el razonamiento basado en la probabilidad condicionada aparece en numerosas aplicaciones del cálculo de probabilidades.

Se dice que dos sucesos son *independientes* si la ocurrencia de uno no afecta a la probabilidad del otro.

Por ejemplo, si dos personas alejadas una de otra lanzan un dado cada una, los resultados de las dos tiradas son independientes, en el sentido de que el hecho de que salga, digamos, un 5 en un dado no influye en absoluto en la probabilidad de que salga un 3 en el otro (el par de dados de la izquierda en la figura 2.7). Por otro lado, si ambos dados están conectados mediante un alambre inflexible (el par de la derecha en la figura 2.7), los resultados de cada uno serán mutuamente dependientes. Intuitivamente se ve que, siempre que tenemos dos sucesos independientes, la probabilidad de que ocurran ambos (digamos un 5 en un dado y un 3 en el otro) es el *producto* de las probabilidades respectivas. La razón es muy simple. Al lanzar dos dados simultáneamente, tenemos 36 sucesos elementales posibles. Cada uno de estos resultados tiene una probabilidad de  $1/36$ , que también es  $1/6 \times 1/6$ , esto es, el producto de las probabilidades de cada suceso elemental de uno y otro dado.

Un segundo concepto fundamental es el de probabilidad condicionada, que se define como la probabilidad de que ocurra un suceso  $A$  sabiendo que ha ocurrido el suceso  $B$ .



*Figura 2.7*

La denotamos como  $\Pr \{A/B\}$  (que se lee: probabilidad de  $A$  dado  $B$ )<sup>47</sup>.

Es evidente que si ambos sucesos son independientes, entonces la ocurrencia de  $B$  no afecta a la probabilidad de  $A$ . Lo denotamos como  $\Pr \{A/B\} = \Pr \{A\}$ . Lo interesante es cuando hay dependencia, es decir, cuando la ocurrencia de un suceso sí afecta a la probabilidad de que ocurra otro. En la vida diaria hacemos estimaciones de probabilidades condicionadas a menudo.

A veces la ocurrencia de un suceso incrementa la probabilidad del segundo, y otras veces la disminuye. Ejemplos:

- 1) La probabilidad de que llueva hoy por la tarde sabiendo que al mediodía el cielo está muy nublado es mayor que la probabilidad de «esta tarde llueve».

2) La probabilidad de que llueva hoy por la tarde sabiendo que al mediodía el cielo está despejado es menor que la probabilidad de «esta tarde llueve».

3) La probabilidad de que llueva hoy sabiendo que el resultado del lanzamiento de un dado ha sido «4» es la misma que la probabilidad de «hoy llueve».

Podemos decir que, en el primer ejemplo, los dos sucesos están correlacionados positivamente, mientras que en el segundo ejemplo lo están negativamente, y en el tercer ejemplo no lo están en absoluto<sup>48</sup>.

En los tres ejemplos que acabamos de ver *apreciamos* que los enunciados son correctos. Pero no podemos cuantificarlos. En este caso, cada cual tendría su propia estimación de la probabilidad de «esta tarde llueve».

Para hacer las cosas más cuantitativas y objetivas, consideremos los siguientes sucesos:

$A = \{\text{El resultado del lanzamiento de un dado es «4»}\}.$

$B = \{\text{El resultado del lanzamiento de un dado es «par»}\}$  (es decir, 2, 4 o 6)

$C = \{\text{El resultado del lanzamiento de un dado es «impar»}\}$  (es decir, 1, 3 o 5)

Podemos calcular las dos probabilidades condicionadas siguientes:

$$\Pr \{A/B\} = 1/3 > \Pr \{A\} = 1/6.$$

$$\Pr \{A/C\} = 0 < \Pr \{A\} = 1/6.$$

En el primer caso, el conocimiento de que  $B$  ha tenido lugar *incrementa* la probabilidad de  $A$ . Sin ese conocimiento la probabilidad de  $A$  es  $1/6$  (una de seis posibilidades). Dado  $B$ , la probabilidad de  $A$  se eleva a  $1/3$  (una de tres posibilidades). En cambio, si sabemos que ha ocurrido  $C$ , la probabilidad de  $A$  cae a cero y, por ende, es *menor* que la probabilidad de  $A$  sin dicho conocimiento.

Es importante distinguir entre sucesos *disjuntos* (es decir, mutuamente excluyentes) y sucesos *independientes*. Dos sucesos son disjuntos cuando la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro. Ser disjuntos es una propiedad de los propios sucesos (no hay ningún suceso elemental común a ambos sucesos). La independencia entre sucesos, en cambio, no se define por sus sucesos elementales, sino por probabilidades. Dos sucesos disjuntos son altamente *dependientes*. El ejemplo que sigue ilustra la relación entre dependencia y superposición.

Consideremos el caso de una ruleta con doce números

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Cada uno de nosotros elige una secuencia de seis números. Pongamos que yo elijo la secuencia:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Y el lector elige la secuencia:

$$B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

La bola rueda en círculo. Damos por sentado que la ruleta es «justa», es decir, que cada resultado tiene la misma probabilidad de  $1/12$ . Si la bola cae en mi territorio, esto es, si va a parar a cualquiera de los números

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

por mí elegidos, gano yo. Si la bola cae en el territorio del lector, esto es, si va a parar a cualquiera de los números

$$\{7, 8, 9, 10, 11, 12\},$$

gana él.

Por supuesto, cada uno de nosotros tiene la misma probabilidad,  $1/2$ , de ganar. La bola tiene la misma probabilidad,  $1/12$ , de pararse en cualquier número, y cada uno de nosotros tiene seis posibilidades en su territorio, así que los dos tenemos las mismas posibilidades de ganar.

Ahora supongamos que jugamos y al lector le notifican que he ganado yo. ¿Cuál es la probabilidad de que gane si escogió B? Obviamente,  $\Pr \{B/A\} = 0 < 1/2$ , es decir, la probabilidad



condicionada de  $B$  dado  $A$  es cero, que es menor que la probabilidad no condicionada  $\Pr \{B\} = 1/2$ . A modo de ejercicio simple, propongo que el lector intente calcular unas cuantas probabilidades condicionadas. En cada ejemplo, mi elección de la secuencia  $A = \{1, \dots, 6\}$  es fija. El lector debe calcular las probabilidades condicionadas de las siguientes elecciones *diferentes* de su secuencia. (Nótese que, en este juego, ambos jugadores pueden ganar).

$\Pr \{7, 8, 9, 10, 11, 12/A\}$ ,  $\Pr \{6, 7, 8, 9, 10, 11/A\}$ ,

$\Pr \{5, 6, 7, 8, 9, 10/A\}$ ,  $\Pr \{4, 5, 6, 7, 8, 9/A\}$ ,

$\Pr \{3, 4, 5, 6, 7, 8/A\}$ ,  $\Pr \{2, 3, 4, 5, 6, 7/A\}$ ,

$\Pr \{1, 2, 3, 4, 5, 6/A\}$

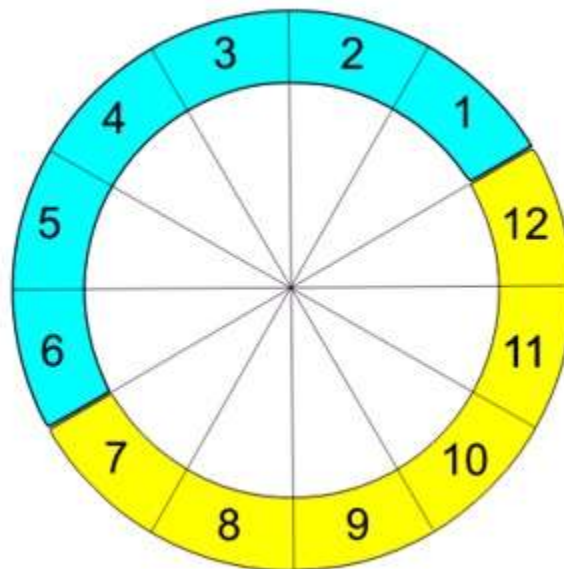


Figura 2.8

Cabe advertir que las correlaciones pasan de la negatividad extrema (en el primer ejemplo, la ocurrencia de  $A$  excluye la victoria del lector) a la positividad extrema (en el último ejemplo, la ocurrencia de  $A$  asegura la victoria del lector). En algún punto intermedio, tiene que haber una elección de secuencia que sea indiferente a la información «dado  $A$ ». ¿Cuál es esa elección? Si el lector es capaz de calcular las probabilidades condicionadas anteriores, entonces es que entiende la diferencia entre sucesos disjuntos y sucesos independientes. Si no es capaz de hacerlo, puede consultar las soluciones al final de este capítulo. Es un bonito ejercicio, aunque no es esencial para comprender la segunda ley.

### **§. Tres advertencias.**

#### *Probabilidad condicionada y probabilidad subjetiva.*

Hay una tendencia a decir que la «probabilidad» es *objetiva*, mientras que la probabilidad condicionada es *subjetiva*. Para empezar, téngase en cuenta que toda probabilidad es *condicionada*. Cuando decimos que la probabilidad de que salga un 4 al lanzar un dado es  $1/6$ , en realidad nos referimos a la probabilidad *condicionada* del resultado «4», *sabiendo* que se ha dado o se dará uno de los resultados posibles 1, 2, 3, 4, 5, 6, que el dado es insesgado, que lo lanzamos al azar y cualquier otra información relevante. En nuestra notación solemos suprimir esta información *dada* y hablamos de probabilidad no condicionada, la cual se considera una probabilidad objetiva<sup>49</sup>.

Ahora consideremos los dos pares de ejemplos detallados a continuación:

$O_1$ : La probabilidad condicionada de «4», sabiendo que Jacob *conoce* que el resultado ha sido «par», es  $1/3$ .

$O_2$ : La probabilidad condicionada de «4», sabiendo que Abraham *conoce* que el resultado ha sido «impar», es cero.

$S_1$ : La probabilidad condicionada de que el acusado sea «culpable», dado que la policía lo vio en la escena del crimen, es  $9/10$ .

$S_2$ : La probabilidad condicionada de que el acusado sea «culpable», dado que fue visto por al menos cinco personas en otra ciudad a la hora del crimen, es casi nula.

En todos los ejemplos anteriores hay una tendencia a referirse a la probabilidad condicionada como una probabilidad subjetiva. La razón es que hemos introducido un conocimiento personal de las condiciones que juzgamos subjetivo. Pero no es así. Las probabilidades  $O_1$  y  $O_2$  son probabilidades objetivas.

El hecho de que mencionemos los nombres de las personas conocedoras de las condiciones no hace que la probabilidad condicionada sea subjetiva. En  $O_1$  podríamos cambiar Jacob por Raquel. La probabilidad de «4» condicionada a que Raquel sabe que el resultado es par sigue siendo  $1/3$ . La subjetividad de este enunciado es una ilusión derivada de la inclusión del *nombre* de la persona que «conoce» la condición. Una versión mejorada de  $O_1$  es: la probabilidad del resultado «4», condicionada a que *sabemos* que

el resultado es par, es  $1/3$ . O mejor todavía: la probabilidad del resultado «4», condicionada a que el resultado es «par», es  $1/3$ .

En los dos últimos enunciados queda claro que la identidad del conocedor de la condición, sea Jacob, Raquel o cualquiera de nosotros, no tiene ninguna influencia sobre la probabilidad condicionada. En la última versión hemos hecho que la condición sea del todo impersonal. Así pues, podemos concluir que la *condición dada* no convierte por sí sola una probabilidad objetiva (no condicionada) en una probabilidad subjetiva.

Considérese el siguiente párrafo de Callen (1983):

*El concepto de probabilidad tiene dos interpretaciones distintas en el uso corriente. La «probabilidad objetiva» se refiere a una frecuencia, o una ocurrencia fraccionaria; la afirmación de que «la probabilidad de que un recién nacido sea varón es algo menor que una mitad» es un enunciado sobre datos censales. La «probabilidad subjetiva» es una medida de una expectativa basada en una información sub-óptima. La evaluación por un médico de la probabilidad (subjetiva) de que una criatura aún no nacida sea varón depende del conocimiento que tiene el médico de las historias familiares de los progenitores, de los datos acumulados sobre niveles hormonales maternos, de la claridad creciente de las imágenes por ultrasonidos y, finalmente, de una estimación bien informada, pero que sigue siendo subjetiva.*

Aunque no lo dice explícitamente, lo que el autor quiere significar es que el primer ejemplo, «la probabilidad de que un recién nacido sea

varón es algo menor que una mitad», es una respuesta a una cuestión de probabilidad no condicionada, «¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido sea varón?», mientras que el segundo ejemplo es una respuesta a una cuestión de probabilidad condicionada, «¿cuál es la probabilidad de que un bebé concreto aún no nacido sea varón?, *dada...* toda la información que se indica».

No hay duda de que la respuesta a la segunda pregunta es altamente *subjetiva*. Diferentes médicos darán respuestas *diferentes* a la misma pregunta. Pero lo mismo vale para la primera pregunta, dada una información diferente. Lo que hace que la segunda pregunta y su respuesta sean subjetivas *no* es la condición, el conocimiento específico de este o aquel médico, sino la insuficiencia del conocimiento. Un conocimiento insuficiente confiere libertad para dar cualquier respuesta (subjetiva) a la segunda pregunta. Ahora bien, ocurre igual con la primera pregunta. Si todas las personas preguntadas tienen el mismo conocimiento, o la misma falta de información, son libres de dar cualquier respuesta. La primera pregunta no se refiere «a datos censales», como dice la cita, sino a la *probabilidad* de que un recién nacido sea varón, *dada* una información sobre «datos censales». Si no tenemos *ninguna* información no podemos responder esta «cuestión objetiva», pero cualquiera que tenga la misma información sobre los datos del censo dará necesariamente la misma respuesta *objetiva*.

Todo el mundo parece estar de acuerdo en que hay dos tipos de probabilidad esencialmente distintos. Uno sería la probabilidad

opinable, altamente subjetiva, y el segundo sería la probabilidad física o científica, considerada objetiva. Ambas pueden ser condicionadas o no condicionadas. En este libro sólo manejaremos probabilidades científicas y, por ende, objetivas. En todos los usos científicos de la probabilidad damos por hecho que las probabilidades vienen dadas de manera explícita o implícita por una receta de cálculo dada. Pueden ser más o menos fáciles de calcular<sup>50</sup>, pero siempre puede suponerse que «están ahí» en el suceso, como la masa asociada a un pedazo de materia.

### **§. Probabilidad condicionada y causa-efecto.**

La «condición» en la probabilidad condicionada de un suceso puede ser la *causa* del mismo, o puede no serlo. Considérense los dos ejemplos siguientes:

- 1) La probabilidad de que un paciente muera de cáncer de pulmón, condicionada a que es un fumador empedernido, es de 9/10.
- 2) La probabilidad de que un paciente sea un fumador empedernido, condicionada a que tiene cáncer de pulmón, es de 9/10.

Es evidente que la información incluida en la primera condición es la causa (o una causa altamente probable) de la ocurrencia del cáncer de pulmón. En el segundo ejemplo, en cambio, la información incluida en la condición de que el paciente tiene cáncer de pulmón no puede ser la *causa* de que sea un fumador

empedernido. El paciente podría haber comenzado a fumar a los veinte años, mucho antes de la aparición del cáncer.

Aunque los dos ejemplos anteriores son claros, a veces la condición se confunde con la causación. Así como percibimos que las causas anteceden al efecto, tendemos a pensar que la condición antecede al suceso en la probabilidad condicionada.

Veamos un ejemplo ilustrativo simple que ha sido estudiado con gran detalle por Ruma Falk (1979)<sup>51</sup>. Se puede tomar como un ejercicio sencillo de cálculo de probabilidades condicionadas. Pero creo que este ejemplo da para más, porque nos hace ver cómo asociamos intuitivamente la probabilidad condicionada con la flecha del tiempo, confundiendo la causalidad con el razonamiento probabilístico. Esto puede o no ser relevante para la asociación entre el sentido del cambio entrópico y la flecha del tiempo (que discutiremos en el capítulo 8).

El problema es muy simple. Una urna contiene cuatro bolas, dos blancas y dos negras; las bolas están bien mezcladas y sacamos una con los ojos tapados.

Primero nos preguntamos cuál es la probabilidad del *suceso* «bola blanca en la primera extracción». La respuesta es inmediata;  $1/2$ . Hay cuatro resultados posibles, dos de los cuales son compatibles con el suceso «bola blanca», así que la probabilidad es  $2/4 = 1/2$ .

Luego nos preguntamos cuál es la probabilidad condicionada de sacar una bola blanca en una segunda extracción, sabiendo que en la primera extracción hemos sacado una bola blanca (que no ha sido devuelta a la urna). Denotamos dicha probabilidad como Pr

$\{blanca_2/blanca_1\}$ . El cálculo es muy simple. Sabemos que la primera vez se extrajo una bola blanca que no se ha devuelto. Tras la primera extracción quedan tres bolas, dos negras y una blanca, así que ahora la probabilidad de extraer una bola blanca es simplemente  $1/3$ .

Esto es bastante obvio. Escribimos:

$$\Pr \{blanca_2/blanca_1\} = 1/3$$

Ahora otra pregunta más difícil: ¿cuál es la probabilidad de que *hayamos sacado* una bola blanca en la *primera* extracción, sabiendo que la segunda bola es blanca? Simbólicamente, lo que buscamos es:

$$\Pr \{blanca_1/blanca_2\} = ?$$

Es una pregunta desconcertante. ¿Cómo puede un suceso del «presente» (bola blanca en la *segunda* extracción) afectar a la probabilidad de un suceso del «pasado» (bola blanca en la *primera* extracción)?

Ambos problemas se plantearon en un aula, y los estudiantes no tuvieron dificultades para calcular  $\Pr \{blanca_2/blanca_1\}$ , razonando que la extracción de una bola blanca en primera instancia había causado un cambio en la urna y, por ende, había afectado a la probabilidad de volver a extraer una bola blanca.



Sin embargo, pedirles que hallaran  $\Pr \{blanca_1/blanca_2\}$  causó bastante revuelo. Algunos adujeron que la pregunta no tenía sentido, porque los sucesos del presente no pueden afectar a la probabilidad de un hecho del pasado. Otros respondieron que, puesto que lo acontecido en el presente no puede afectar al pasado, la probabilidad tenía que ser  $1/2$ . Se equivocaban, porque la respuesta es  $1/3$ . Un tratamiento más completo de este problema puede encontrarse en Falk (1979). Aquí quiero llamar la atención del lector sobre el hecho de que a veces nos equivocamos al asociar la probabilidad condicionada con la causalidad, debido a que intuitivamente tendemos a colocar la condición antes del efecto; de ahí la asociación de la *probabilidad condicionada con la flecha del Tiempo*.

La distinción entre *causación* y probabilidad condicionada es importante. Quizá deberíamos mencionar una característica de la causalidad no compartida por la probabilidad condicionada. Se trata de la transitividad. La causalidad es transitiva, lo que significa que si  $A$  causa  $B$  y  $B$  causa  $C$ , entonces  $A$  causa  $C$ . Un ejemplo simple: si fumar es causa de cáncer, y el cáncer es causa de muerte, entonces fumar es causa de muerte.

La probabilidad condicionada no tiene por qué ser transitiva. Ya hemos distinguido entre correlación positiva y correlación negativa. Si  $A$  favorece  $B$ , esto es, la probabilidad de  $B$  dado  $A$  es mayor que la probabilidad de  $B$  ( $\Pr \{B/A\} > \Pr \{B\}$ ), y  $B$  favorece  $C$  (esto es,  $\Pr \{C/B\} > \Pr \{C\}$ ), de esto no necesariamente se sigue que  $A$  favorece  $C$ .

Veamos un ejemplo de probabilidad condicionada no transitiva. Considérense los siguientes tres sucesos en el lanzamiento de un dado:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4, 5\}, C = \{3, 4, 5, 6\}$$

Es indudable que  $A$  favorece  $B$  ( $\Pr \{B/A\} = 3/4 > \Pr \{B\} = 2/3$ ) y que  $B$  favorece  $C$  ( $\Pr \{C/B\} = 3/4 > \Pr \{C\} = 2/3$ ), pero  $A$  no favorece  $C$  ( $\Pr \{C/A\} = 1/2 < \Pr \{C\} = 2/3$ ).

### ***§. Probabilidad condicionada y probabilidad conjunta.***

La advertencia que sigue puede beneficiar a quienes nunca hayan estudiado probabilidad.

Tenía un amigo que solía ir en moto. Una noche en que circulaba por una autopista fue arrollado por un camión y resultó gravemente herido. Cuando lo visité en el hospital, estaba eufórico. Yo pensé que era por su rápida y completa recuperación, pero, para mi sorpresa, me dijo que acababa de leer un artículo sobre estadísticas de accidentes de tráfico, donde se decía que las posibilidades de tener un percance en la carretera eran de una en un millar. Así pues, las posibilidades de que uno se vea implicado en dos accidentes a lo largo de su vida son de una en un millón, de lo que mi amigo concluyó felizmente: «Ahora que ya he tenido este accidente, puedo confiar en que las posibilidades de volver a tener otro son ínfimas...». No quise aguarle la fiesta. Estaba confundiendo la probabilidad de «tener dos accidentes en la vida» con la

probabilidad condicionada de «tener un segundo accidente cuando ya se ha tenido uno con anterioridad».

No es que su conclusión no pudiera ser correcta, sino que su razonamiento probabilístico era incorrecto. Si el accidente fue por su culpa, entonces podría haberse mostrado más cuidadoso en el futuro, evitando circular por autopistas o por la noche, o cambiando la moto por un vehículo más seguro. Todo esto reduciría sus posibilidades de verse implicado en un segundo accidente. Ahora bien, este argumento implica que hay una *dependencia* entre ambos sucesos, es decir, que la «condición dada» afecta a la posibilidad de un segundo accidente. Si no hay dependencia entre ambos sucesos (si el accidente no fue por su culpa ni podía hacer nada para evitarlo), entonces, por mucho cuidado que tuviera en el futuro, las posibilidades de sufrir otro accidente no se reducirían sólo porque ya había tenido uno antes.

Para razonar con más precisión, supongamos que lanzamos una moneda 1000 veces y en todas las ocasiones sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que, si la lanzamos una vez más, vuelva a salir cara? La mayoría de los que no tienen formación matemática diría que las posibilidades de obtener 1001 caras son ínfimas, lo cual es cierto: las posibilidades son  $(1/2)^{1001}$ , un número extremadamente pequeño. Pero la pregunta concierne a la probabilidad *condicionada* de que salga cara sabiendo que en los 1000 lanzamientos previos han salido 1000 caras. Esta probabilidad es  $1/2$  (dando por sentado que los sucesos son independientes, es decir, que el resultado de un lanzamiento es independiente del resultado previo).

La razón psicológica de la confusión es que sabemos que la probabilidad de cada resultado es  $1/2$ , así que, si lanzamos una moneda mil veces, esperamos obtener unas 500 caras y unas 500 cruces. Si después de mil lanzamientos aún no ha salido ninguna cruz, lo cual es posible pero sumamente raro, uno tiende a pensar que la primera cruz «está al caer». En otras palabras, parecería que, después de que hayan salido mil caras seguidas, la probabilidad de que salga cruz debe ser cercana a uno. Pero esto es un error. De hecho, si hemos lanzado mil veces una moneda y en todas las ocasiones ha salido cara, yo sospecharía que la moneda está trucada, y concluiría que las posibilidades de que vuelva a salir cara en el próximo lanzamiento son mayores que  $1/2$ .

En fin, que si nos dan una moneda no trucada y la lanzamos al azar (lo que equivale a decir que la probabilidad de que salga cara es  $1/2$ ), la probabilidad de obtener mil caras seguidas es muy baja  $(1/2)^{1000}$ , pero la probabilidad *condicionada* de que salga cara después de una serie de mil caras seguidas continúa siendo  $1/2$  (por supuesto, dando por sentado que los resultados de cada lanzamiento son independientes del anterior).

### **§. Una cucharada de teoría de la información.**

La teoría de la información nació en 1948<sup>52</sup>. Como ocurre con la probabilidad, el concepto de información es impreciso y altamente subjetivo. La misma «información» tendrá diferentes significados, efectos y valores para personas diferentes.

Si yo acabo de invertir en acciones de **IBM** y el lector acaba de vender las suyas, ambos tendremos reacciones muy diferentes al leer la noticia de que **IBM** acaba de lanzar un nuevo ordenador muy avanzado. A un campesino de Mozambique, en cambio, la noticia le dejaría indiferente, si es que tuviera algún significado para él.

Al igual que la teoría de la probabilidad, la teoría de la información se desarrolló en un cuerpo matemático cuantitativo, preciso, objetivo y útil a partir de un concepto subjetivo e impreciso. Para lo que nos interesa en este libro, la teoría de la información constituye un importante hito en la comprensión del significado de la entropía<sup>53</sup>.

La teoría de la información fue introducida originalmente por Claude Shannon (1948) en el contexto de la telecomunicación. Luego se demostró muy útil en mecánica estadística, así como en lingüística, economía, psicología y muchos otros campos de investigación.

Aquí me limitaré a exponer unas cuantas nociones básicas de teoría de la información, lo mínimo que hay que conocer para aplicar el término «información» en conexión con el significado de la entropía y responder a la pregunta: ¿qué es lo que cambia? En el capítulo 8 argumento que la entropía no es más que información perdida, tal como la define la teoría de la información.

Comencemos con un juego familiar. Uno elige un objeto o una persona, y los demás tienen que averiguar qué o quién es a base de preguntas binarias, esto es, cuya respuesta sea sí o no. Supongamos que uno ha pensado, por ejemplo, en Einstein, y hay

que descubrir al personaje mediante preguntas de sí o no. He aquí las dos «estrategias» posibles:

**«Estrategia» burda**

- 1° ¿Es Nixon?
- 2° ¿Es Gandhi?
- 3° ¿Soy yo?
- 4° ¿Es Marilyn Monroe?
- 5° ¿Eres tú?
- 6° ¿Es Mozart?
- 7° ¿Es Niels Bohr?
- 8°

**«Estrategia» inteligente**

- 1° ¿Es Varón?
- 2° ¿Está vivo?
- 3° ¿Es un político?
- 4° ¿Es un científico?
- 5° ¿Es muy conocido?
- 6° ¿Es Einstein?

*La razón por la que he calificado de «burda» a la primera estrategia y de «inteligente» a la segunda es bien simple, y espero que el lector esté de acuerdo conmigo. Si aplicamos la «estrategia» de la izquierda, podríamos acertar a la primera, cosa que no nos permite la «estrategia» inteligente. Pero acertar a la primera es altamente improbable. Es mucho más probable que tuviéramos que seguir preguntando indefinidamente, sin obtener nunca un sí por respuesta. La razón para preferir la segunda «estrategia» es que con cada respuesta obtenemos más información (véase más adelante), es decir, excluimos una inmensidad de posibilidades (lo ideal sería la mitad de las posibilidades; véase más adelante). Si la respuesta a la primera pregunta es SÍ, quedan excluidas todas las mujeres. Si la respuesta a la segunda pregunta es NO,*

*quedan excluidas todas las personas vivas. Con cada respuesta se estrecha el rango de posibilidades. La «estrategia» burda, en cambio, sólo permite excluir una posibilidad cada vez, con lo que el rango de posibilidades desconocidas prácticamente no cambia. Intuitivamente, es evidente que la «estrategia» inteligente nos proporciona más información con cada respuesta que la «estrategia» burda, aunque aún no hayamos definido el término «información». Parece más sensato tener paciencia y optar por la «estrategia» inteligente que intentar acertar a la primera.*

Todo lo que acabo de decir es bastante cualitativo, y por eso empleo la palabra «estrategia» entre comillas. El término «información» tal como lo hemos usado es impreciso (lo precisaremos en el marco de la teoría de la información). Aun así, espero que el lector estará de acuerdo conmigo y apreciará intuitivamente que la primera columna corresponde a una manera de proceder «burda», mientras que la segunda es más «inteligente». Si no es así, debería probar el juego unas cuantas veces con ambas estrategias, y estoy seguro de que se convencerá de que la estrategia inteligente ciertamente es la más inteligente. En breve precisaremos más el juego y justificaremos por qué una serie de preguntas puede calificarse de «burda» y la otra de «inteligente». Y lo que es más importante, el lector no tendrá más remedio que convenir conmigo en que la estrategia «inteligente» ciertamente es la *más inteligente*. Antes de eso, sin embargo, examinemos con más detenimiento este juego tan simple para

intentar comprender por qué no podemos precisar los méritos de ambas estrategias.

Para empezar, el lector siempre puede razonar que, sabiendo que yo soy científico y que probablemente pensaré en Einstein, entonces quizá sería mejor optar por la primera estrategia. Ahora bien, si yo sé que el lector sabe que soy un científico y se figurará que, por mi condición de tal, probablemente pensaré en Einstein, podría engañarle eligiendo a Kirk Douglas; y el lector podría contraatacar teniendo en cuenta que probablemente yo intentaré engañarle eligiendo a Kirk Douglas en vez de Einstein; y así sucesivamente. Sin duda, es muy difícil llegar a alguna parte por esta vía.

Hay muchos otros elementos de subjetividad que podrían entrar en juego. A modo de ilustración, el lector podría haber oído en el telediario matinal que un asesino en serie buscado por la policía ha sido por fin capturado, y podría figurarse, o saber, que yo he oído la misma noticia y, al tenerla fresca en la mente, es probable que piense en esa persona.

Por eso no se puede edificar una teoría matemática de la información sobre la base de esta clase de juegos. Hay demasiados elementos cualitativos y subjetivos que se resisten a la cuantificación. Por fortuna, gracias a la teoría de la información de Shannon, estos juegos pueden «reducirse» para eliminar cualquier traza de subjetividad. Permítaseme describir otro juego que es esencialmente el mismo de antes, pero en una forma destilada, mucho más simple y susceptible de un tratamiento preciso, cuantitativo y objetivo.



Supongamos que tenemos ocho cajas iguales (figura 2.9). Un jugador esconde una moneda en una caja y el otro jugador tiene que averiguar dónde está. Todo lo que sabe es que la moneda *debe* estar en una de las cajas, y que ninguna tiene preferencia sobre el resto. Puesto que la caja ha sido escogida al azar, la probabilidad de encontrar la moneda en una caja cualquiera es  $1/8$ . Para ser neutral, la caja fue elegida mediante un número entre 1 y 8 generado aleatoriamente por un ordenador, así que el segundo jugador no puede valerse de ninguna información relevante sobre cualquier posible preferencia del primero a la hora de elegir la caja donde ha escondido la moneda.

Conviene advertir que en este juego hemos eliminado cualquier traza de subjetividad (toda la información que necesitamos es «dónde está la moneda»). La «ocultación» de la moneda puede hacerse mediante un ordenador que elige una caja al azar. También podemos plantear preguntas binarias al ordenador para averiguar la localización de la moneda. El juego no depende de la información que tengan los jugadores o el ordenador. La información requerida está *dentro* del juego mismo, con independencia de la personalidad o el conocimiento de los jugadores. En breve asignaremos una medida cuantitativa a dicha información.

Por supuesto, lo que necesitamos es información relativa a «dónde está la moneda». Para adquirirla, sólo se nos permite plantear preguntas binarias<sup>54</sup>. En vez de un número indefinido de personajes como en el juego anterior, aquí tenemos sólo ocho posibilidades; y lo

que es más importante, las ocho posibilidades tienen la misma probabilidad.  $1/8$ .

De nuevo hay muchas estrategias posibles. Dos opciones extremas y bien definidas son las siguientes:

La estrategia más burda	La estrategia más inteligente
1.º ¿ Está la moneda en la caja 1?	1.º ¿ Está la moneda en la mitad derecha (de las ocho)?
2.º ¿ Está la moneda en la caja 2?	2.º ¿ Está la moneda en la mitad superior (de las cuatro restantes)?
3.º ¿ Está la moneda en la caja 3?	3.º ¿ Está la moneda en la mitad derecha (de las dos restantes)?
4.º ¿ Está la moneda en la caja 4?	4.º ¡Ya tengo la respuesta!
5.º	

En primer lugar, nótese que esta vez no he entrecomillado la palabra estrategia. Aquí las estrategias son precisas y están bien definidas, cosa que no ocurría en el juego anterior. En este juego, la estrategia más burda consiste en preguntas del tipo ¿Está la moneda en la caja  $k$ ?, donde  $k$  va de 1 a 8. La estrategia más inteligente, en cambio, consiste en ir dividiendo el rango de posibilidades por la mitad. Ahora vemos por qué no podíamos definir la estrategia más inteligente en el juego anterior. Allí no estaba claro cuáles eran *todas* las posibilidades, y menos todavía si podíamos dividir las por la mitad. Aunque nos limitáramos a elegir a personas que hubieran trabajado en un campo concreto, como puede ser la termodinámica, todavía no sabríamos cómo reducir las posibilidades a la mitad, o siquiera si tal división es posible en principio.

En segundo lugar, nótese que ahora hablo de las estrategias «más burda» y «más inteligente» (cosa que no podía hacer en el juego anterior, de ahí que me limitara a calificar la primera de «burda» y la segunda de «inteligente»). La razón es que se puede *demostrar* matemáticamente que si uno aplica la estrategia más inteligente de manera repetida, vencerá a cualquier otra estrategia posible, incluida la peor de todas, o la «más burda». Ya que no puedo presentar una demostración matemática, intentaré convencer al lector de que la estrategia «más inteligente» es mucho mejor que la «más burda» (cosa que también puede comprobar por sí mismo practicando este juego con un amigo o contra un ordenador).

En términos cualitativos, si optamos por la estrategia «más burda», podríamos acertar a la primera, pero la probabilidad de que esto ocurra es  $1/8$ , y la probabilidad de fallar es  $7/8$ . Si hemos fallado con la primera pregunta (que es lo más probable, y tanto más cuanto mayor es el número de cajas), ahora la probabilidad de acertar a la segunda es  $1/7$  y la de volver a fallar  $6/7$ . Si fallamos seis veces seguidas, tras la séptima pregunta *conoceremos* la respuesta correcta, esto es, tendremos la información para saber dónde está la moneda. Por otro lado, si optamos por la estrategia «más inteligente», es seguro que no acertaremos a la primera, ni a la segunda, pero tenemos la *garantía* de obtener la información requerida tras la tercera pregunta. Inténtese repetir este mismo razonamiento para el caso de una moneda escondida en una de 1000 cajas.

El argumento cualitativo es el mismo del juego anterior, pero ahora puede hacerse más preciso y cuantitativo. Preguntando « ¿Está la moneda en la caja 1?», podríamos acertar a la primera, pero con una probabilidad muy baja. Si fallamos, sólo habremos eliminado la primera caja, con lo que el número de posibilidades se habrá reducido de 8 a 7. Por otro lado, si adoptamos la estrategia más inteligente, la primera pregunta elimina la *mitad* de las posibilidades, con lo que sólo quedan cuatro. La segunda pregunta elimina otra mitad, con lo que sólo quedan dos cajas posibles, y con la tercera pregunta obtenemos la respuesta.

En teoría de la información, la información desconocida, es decir, la cantidad de información que uno debe adquirir haciendo preguntas se *define* a partir de la distribución de probabilidades<sup>55</sup>.

En este ejemplo, las probabilidades son:  $\{1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8\}$ . Con la serie de preguntas más inteligentes, cada respuesta proporciona un máximo de información (lo que se conoce como un bit). Se puede demostrar que se obtiene la información máxima dividiendo el espacio de resultados posibles en dos partes *igualmente probables*.

Así, si a cada paso de la estrategia más inteligente obtengo la información máxima, obtendré toda la información que necesito con un número mínimo de pasos. Vuelvo a subrayar que esto es cierto *por término medio*, es decir, si repetimos el mismo juego muchas veces, la estrategia más inteligente nos proporciona un método para obtener la información requerida con el mínimo número de

preguntas. La teoría de la información también nos permite calcular el número medio de preguntas para cada estrategia.

Nótese también que la *cantidad* de información requerida siempre es la misma, con independencia de la estrategia adoptada. La elección de la estrategia afecta al número de preguntas requeridas para obtener la misma información. La estrategia más inteligente garantiza que, por término medio, tendremos que hacer menos preguntas que con cualquier otra estrategia.

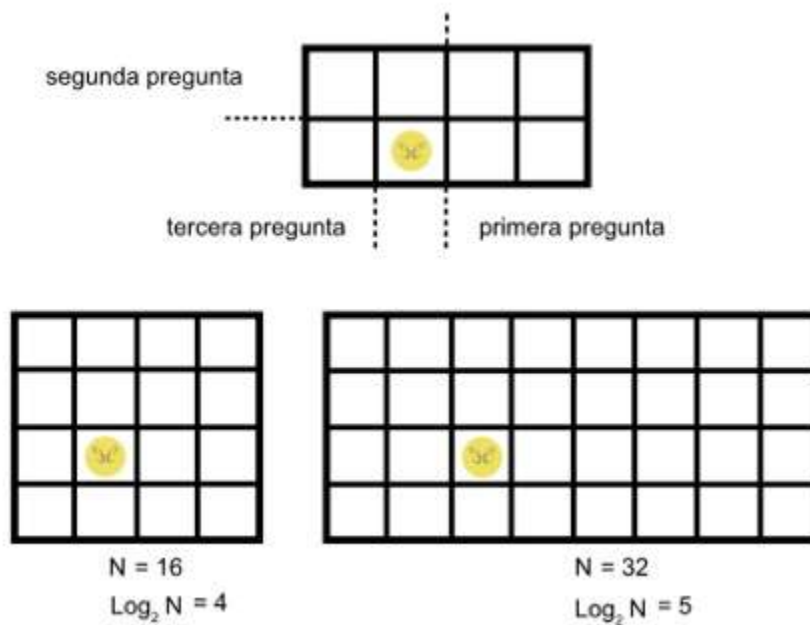


Figura 2.9

Si este argumento no convence al lector, le sugiero que intente pensar en el mismo juego con 16 cajas. Aunque el número de cajas se ha duplicado, el número de preguntas requeridas por la estrategia más inteligente sólo aumenta en ¡uno! El número medio de preguntas requeridas por la estrategia más burda es mucho

mayor. La razón es la misma de antes: la estrategia más inteligente reporta el máximo de información en cada paso, mientras que la estrategia más burda proporciona muy poca información en los primeros pasos.

En la figura 2.9 se ilustran otros dos casos del juego con diferentes números de cajas. El número de preguntas correspondiente a cada caso, calculado a partir de la teoría de la información, se muestra abajo<sup>56</sup>.

La cuestión importante en esta fase es que cuanto mayor sea el número de cajas, mayor será la cantidad de información que necesitaremos para localizar la moneda y, por ende, mayor el número de preguntas requeridas para obtenerla. Resulta fácil apreciar esto intuitivamente. La cantidad de información viene *determinada* por la distribución (que en nuestro caso es  $\{1/N... 1/N\}$  para  $N$  cajas igualmente probables).

Para hacer que el juego sea totalmente impersonal y, por ende, totalmente objetivo, podemos imaginar que jugamos contra un ordenador. Éste elige una caja y nosotros le hacemos preguntas binarias. Supongamos que pagamos un céntimo por respuesta. Seguramente preferiríamos obtener la información buscada (el escondite de la moneda) pagando lo menos posible. Adoptando la estrategia más inteligente obtendremos el máximo partido de nuestro dinero. En una definición específica de las unidades de información, se puede hacer que la cantidad de «información» sea *igual* al número de preguntas requeridas por la estrategia más inteligente.

Resumamos el caso de  $N$  cajas y una moneda escondida en una de ellas. Sabemos que la caja se eligió al azar, esto es, la persona que escondió la moneda no tenía ninguna «preferencia» por ninguna de las cajas. En otras palabras, cada caja tenía una probabilidad  $1/N$  de ser seleccionada. En este caso, es evidente que cuanto mayor sea el número de cajas, mayor será el número de preguntas requeridas para localizar la moneda escondida. Podemos decir que cuanto mayor sea el número de cajas, mayor será la cantidad de información desconocida, y por eso tenemos que hacer más preguntas.

Demos un paso más. Ahora nos dicen que se han escondido *dos* monedas en  $N$  cajas. En aras de la concreción, supongamos que las monedas se han colocado en cajas *diferentes*. Una vez más, sabemos que las cajas se han elegido al azar. En tal caso, la probabilidad de encontrar la primera moneda en una caja concreta es  $1/N$ , y la probabilidad de encontrar la otra moneda una vez localizada la primera es  $1/(N - 1)$ . Es obvio que en este juego tenemos que hacer más preguntas para localizar las dos monedas. En general, para un número dado de cajas  $N$ , cuanto mayor sea el número  $n$  de monedas escondidas más preguntas tendremos que hacer para localizarlas; hasta que  $n$  se hace mayor que  $N/2$ , momento en que podemos pasar a preguntarnos qué cajas están vacías<sup>57</sup>. Una vez localizadas las cajas vacías, sabremos cuáles están ocupadas. Para  $n = N$  (igual que para  $n = 0$ ) tenemos toda la información ya de entrada, por lo que no necesitamos hacer ninguna pregunta.

**§. Una pizca de matemáticas, física y química.**

Como he asegurado en el prefacio, para entender este libro no se necesita ningún conocimiento matemático avanzado. Si el lector no sabe absolutamente *nada* de matemáticas, le sugiero que se ejercite pensando en grandes números, números de una inmensidad inimaginable. También es útil estar familiarizado con la notación exponencial, que no es más que una notación abreviada para números grandes. Un millón se escribe  $10^6$ , que quiere decir un uno seguido de seis ceros; o mejor aún, diez multiplicado seis veces por sí mismo:

$$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10.$$

Un millón es un número fácil de escribir tal cual, pero con números como  $10^{23}$  (que viene a ser el número de átomos contenidos en un centímetro cúbico de gas) resulta inconveniente o imposible emplear la notación explícita normal. Con números de la forma  $10^{10\ 000}$  tendríamos que llenar más de una página de ceros, lo cual no es nada práctico. Si tenemos un número de la forma  $10^{(10/23)}$ , podríamos pasarnos la vida escribiendo ceros y no acabaríamos.

Para hacernos una idea de la clase de números de los que estamos hablando, casi todos podemos escribir el número 1000 (un uno seguido de tres ceros) en un segundo. El lector quizá sea más rápido y pueda escribir el número 10 000 en un segundo. Pero supongamos que somos lo bastante rápidos para escribir el número



1.000.000 (un uno seguido de seis ceros, es decir, un millón) en un segundo.

$$6 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365 \times 100 = 18\,921\,600\,000$$

Pues bien, al cabo de cien años podríamos escribir un uno seguido de 10 ceros, lo que viene a ser  $10^{10}$  ceros.

Un uno seguido de  $10^{10}$  ceros es ciertamente grande. Podemos representarlo como:

$$10^{(10/10)} = 10^{(\text{un 1 seguido de 10 ceros})} = 10^{10\,000\,000\,000}$$

Si pudiéramos continuar escribiendo ceros no ya durante cien años, sino durante 15.000 millones de años (la edad estimada del universo), el número escrito explícitamente tendría alrededor de  $10^{18}$  ceros, es decir

$$10^{(10/18)} = 10^{(\text{un 1 seguido de 18 ceros})}.$$

Éste es un número inimaginablemente grande. Como más adelante veremos, la segunda ley tiene que ver con sucesos tan infrecuentes que sólo «ocurrirían» una vez de cada  $10^{10/23}$  experimentos<sup>58</sup>. Estos números están mucho más allá de lo representable explícitamente, aun cuando pudiéramos sentarnos a escribir durante 15 000 millones de años.

Pero es la clase de números que nos encontraremos cuando consideremos la segunda ley de la termodinámica desde el punto de vista molecular. Ésa es toda la matemática que necesitaremos para captar y comprender la segunda ley. Si el lector quiere seguir las notas más detalladas, le será útil familiarizarse con las tres notaciones siguientes:

**1) Valor absoluto.** El valor absoluto de un número, denotado como  $|x|$ , no es más que el valor positivo de  $x$ . En otras palabras, si  $x$  es positivo no cambia nada, y si es negativo simplemente se suprime el signo «menos». Así,  $|5| = 5$ , y  $|-5| = 5$ . Esto es bien simple.

**2) Logaritmo de un número<sup>59</sup>.** Es una notación extremadamente útil en matemáticas, ya que facilita la escritura de números muy grandes. El logaritmo de un número  $x$  es el número que hay que colocar  $10^{AQUI}$  para obtener  $x$ . ¡Muy simple! Lo denotamos como  $\log_{10}x$ .

Ejemplo: ¿cuál es el número que hay que colocar  $10^{AQUI}$  para obtener 1000? La respuesta es 3, ya que  $10^3 = 1000$ . Se escribe  $\log_{10}1000 = 3$ . ¿Cuál es el logaritmo de 10 000? Sólo hay que hacer  $10\ 000 = 10^4$ , y tenemos que  $\log_{10} 10\ 000 = 4$ . Esto no es más que el número de veces que se multiplica 10 por sí mismo. Aunque no necesitaremos considerar el logaritmo de cualquier número arbitrario, es evidente que  $\log_{10}1975$  es mayor que 3 y menor que 4. El símbolo  $\log_{10}$  se denomina logaritmo en base 10. Similarmente, el logaritmo en base 2 de  $x$ , o  $\log_2 x$ , es el número que hay que colocar  $2^{AQUI}$  para obtener  $x$ . Por ejemplo, el número que hay que poner  $2^{AQUI}$  para obtener 16 es 4, ya que  $2^4 = 16$  o, equivalentemente, es el

número de veces que hay que multiplicar 2 por sí mismo para obtener 16. Se puede definir  $\log_2 x$  para cualquier número positivo  $x$ , pero por simplicidad limitaremos esta notación a los números de la forma  $2^{\text{ENTERO}}$ . En teoría de la información, la cantidad de información que necesitamos para localizar una moneda escondida en una serie de  $N$  cajas igualmente probables se define como  $\log_2 N$ .

3) Factoriales. Los matemáticos emplean notaciones abreviadas para la suma ( $\Sigma$ ) y el producto ( $\Pi$ ). Aquí no las necesitaremos, pero hay una notación muy útil para un producto especial, que se denota como  $N!$  Se trata del producto de todos los números de 1 a  $N$ . Así, para  $N = 5$ ,  $N! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ . Para  $N = 100$ ,  $N! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100$ .

Hemos visto todas las matemáticas que necesitaremos.

¿Y la física? Para comprender la segunda ley tampoco se necesita ningún conocimiento de física, ni de química. Pero hay algo que el lector debería saber. En las notas de Richard Feynman encontramos lo siguiente: «Si, en algún cataclismo, todo el conocimiento científico quedara destruido y sólo un pensamiento pasara a la siguiente generación de criaturas, ¿qué enunciado contendría más información con menos palabras? Yo creo que sería la hipótesis atómica (o el hecho atómico, o como se le quiera llamar), la idea de que todas las cosas están hechas de átomos, pequeñas partículas que se encuentran en perpetuo movimiento, atrayéndose mutuamente cuando se separan un poco, pero repeliéndose cuando se apretujan unas con otras».

Toda la materia está compuesta de átomos (y moléculas). Aunque hoy en día este hecho se da por sentado, no siempre fue así. La estructura atómica de la materia tiene sus raíces en la filosofía de los antiguos griegos, y se remonta a más de dos mil años atrás. No era un postulado de la física, sino una especulación filosófica. Durante casi dos milenios no hubo prueba alguna de la existencia de los átomos. Incluso a las puertas del siglo pasado, la hipótesis atómica todavía era objeto de vigoroso debate. Cuando se formuló la segunda ley de la termodinámica, la naturaleza atómica de la materia estaba lejos de ser un hecho establecido. Boltzmann era uno de sus defensores y, como ya he señalado, abrió la puerta a la interpretación molecular de la segunda ley. Tuvo que enfrentarse a poderosos oponentes que sostenían que la existencia de los átomos no era más que una hipótesis, por lo que la estructura atómica de la materia era una mera especulación que no tenía cabida en la física. Pero hoy es un hecho aceptado.

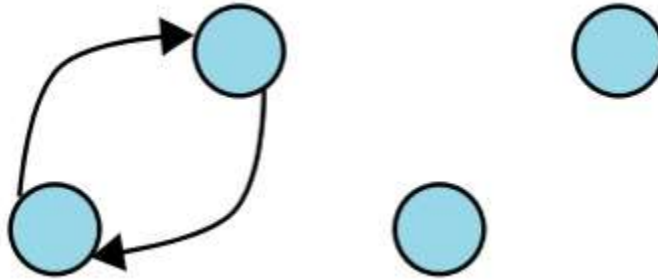
El segundo hecho que el lector debe conocer es algo más sutil. Se trata de la indistinguibilidad de átomos y moléculas. Dedicaremos mucho tiempo a jugar con dados o monedas. Dos monedas podrían diferir en color, tamaño, forma, etcétera (véase la figura 2.10).



*Figura 2.10*

En la vida diaria usamos los términos «idéntico» e «indistinguible» como sinónimos. Las dos monedas de la figura 2.11 son idénticas en cuanto a forma, tamaño, color y lo que uno quiera.

Diremos que son *distinguibles* si, cuando se mueven, podemos seguir cada moneda con la vista y en cualquier momento dado podemos especificar qué moneda procede de qué punto.

*Figura 2.11*

Supongamos que, en la figura 2.11, intercambiamos las dos monedas de la izquierda para obtener la configuración de la derecha. Si las monedas son idénticas, entonces no podemos diferenciar entre ambas configuraciones. Pero si seguimos el proceso de intercambio, podemos especificar de dónde viene cada moneda. En principio, esto es imposible cuando se trata de moléculas idénticas. En tales casos preferimos hablar de indistinguibilidad en vez de identidad.

Considérese un sistema de dos compartimentos (figura 2.12). Inicialmente tenemos 5 monedas en cada compartimento. Las

monedas son idénticas en todos los aspectos. Ahora eliminamos la separación y agitamos el sistema entero. Después de agitar veremos una nueva configuración, como la de la derecha.



*Figura 2.12*

Decimos que las partículas (en este caso las monedas) son distinguibles, aun cuando sean idénticas, si en todo momento podemos especificar de qué compartimento procede cada moneda, simplemente porque podemos seguir las trayectorias de todas las partículas. Decimos que las partículas son indistinguibles cuando, en el experimento de antes, no podemos decir cuál es cuál después de eliminar la separación. No podemos seguir las trayectorias de las partículas. Este hecho era ajeno a la mecánica clásica. En el dominio clásico siempre pensamos que las partículas de cualquier tamaño están «etiquetadas» o, *al menos en principio*, son «etiquetables». Las ecuaciones del movimiento de Newton predicen las trayectorias de cada partícula específica del sistema. Pero en mecánica cuántica esto no es posible *en principio*<sup>60</sup>.

En los dos capítulos que siguen veremos muchos ejemplos donde partimos de dados distinguibles y *voluntariamente* ignoramos su distinguibilidad. Este proceso de «desetiquetado» será esencial para comprender la segunda ley de la termodinámica.

En cuanto a la química, no hace falta saber nada más allá del hecho de que la materia está constituida por átomos y moléculas. Pero si uno quiere entender el ejemplo de la última parte del capítulo 7 (que es interesante, pero no esencial), tiene que saber que algunas moléculas tienen un centro asimétrico (o centro quiral), y tales moléculas se presentan en pares, denotados *l* y *d*<sup>61</sup>. Los dos tipos (llamados enantiómeros) son casi idénticos, pero el uno es la imagen especular del otro. Todos los aminoácidos (los constituyentes de las proteínas, que a su vez son los constituyentes de los músculos y muchos otros tejidos corporales) se presentan en una versión de estos pares. Un ejemplo es la alanina (figura 2.13).

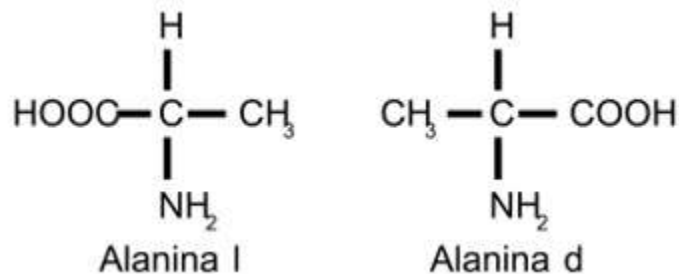


Figura 2.13

La mayoría de aminoácidos naturales son del tipo *l*. Se distinguen por su actividad óptica. Lo único que tenemos que saber es que estos pares de moléculas son casi iguales en lo que respecta a parámetros moleculares como la masa, el momento de inercia, el momento dipolar, etcétera. Las moléculas del mismo tipo son indistinguibles, pero la forma *l* y la forma *d* sí son distinguibles y, en principio, separables.

Hasta aquí hemos discutido todos los «prerrequisitos» que se necesitan para comprender el resto del libro. En realidad, el único prerrequisito para entender los demás prerrequisitos examinados en este capítulo es el sentido común. A modo de auto test, inténtese resolver los dos siguientes problemas.

### **§. Un problema de lotería.**

Una lotería estatal ha emitido un millón de boletos. Cada uno se vendió a 10 dólares, así que se recaudan 10 millones de dólares. El premio para el número ganador es de 1 millón de dólares. Otros 999.000 números ganan un premio de 1 dólar estadounidense o su equivalente, pero en distintas monedas, y hay otros 999 premios de 10 dólares, también en *distintas* monedas. En total, la lotería distribuye 2.008.990 dólares en premios, lo que deja una ganancia neta de 8.000.000 de dólares. Nótese que los premios de uno y de diez dólares se entregan en monedas *diferentes* y son, por lo tanto, *distinguibles*. En otras palabras, dos personas que ganan un premio por valor de un dólar reciben cantidades *diferentes*, esto es, diferentes premios con el mismo valor.

Ahí van las preguntas:

Respóndase **SÍ o NO** a las primeras tres preguntas. Compro un solo boleto y

- 1) ¿Es creíble la afirmación de que he ganado un millón de dólares en la lotería?
- 2) ¿Es creíble la afirmación, que hice el día anterior, de que he ganado el equivalente a un dólar en moneda india?



- 3)** ¿Es creíble la afirmación, que hice el día anterior, de que he ganado el equivalente a diez dólares en moneda china? Ahora estimense las siguientes probabilidades:
- 4)** ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio de un millón de dólares?
- 5)** ¿Cuál es la probabilidad de ganar el dólar en moneda india?
- 6)** ¿Cuál es la probabilidad de ganar los diez dólares en moneda china?
- 7)** ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio por *valor* de un dólar?
- 8)** ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio por *valor* de diez dólares?
- 9)** Tras haber respondido las preguntas 4-8, ¿revisaría el lector sus respuestas a las preguntas 1-3?

El lector encontrará todas las respuestas al final del capítulo.

### **§. Un problema en el orden-desorden.**

Obsérvense los patrones de las dos figuras insertas al comienzo de este libro. Los he etiquetado como ordenado y desordenado. Llamémoslos  $B$  y  $A$ .<sup>62</sup>. Ahora que ya tenemos nociones elementales de probabilidad, inténtese responder a las siguientes preguntas. Supongamos que he empleado 200 dados para construir las figuras  $A$  y  $B$ .

- 1)** ¿Es creíble la afirmación de que obtuve las dos configuraciones  $A$  y  $B$  lanzando los 200 dados dos veces sobre el tablero?
- 2)** ¿Es creíble la afirmación de que dispuse los dados para componer la configuración  $A$ , y luego obtuve la  $B$  tras agitar la mesa durante unos segundos?
- 3)** ¿Es creíble la afirmación de que compuse la configuración  $B$  y luego obtuve la  $A$  tras agitar la mesa durante unos segundos?

Para responder a las preguntas anteriores, sólo hay que hacer una estimación cuantitativa de la probabilidad de las configuraciones  $A$  y  $B$ . Veamos si el lector es capaz de hacerlo. Supongamos que el tablero está dividido en, digamos, 1000 casillas. Sólo puede haber un dado por casilla. La orientación del dado no importa, sólo importa la cara superior. Una configuración es la especificación exacta de la cara superior y la localización (la casilla) de cada dado. Hay 200 dados en total (en las figuras tanto el número de dados como el de casillas es diferente). Cada dado puede exhibir uno de seis números (1, 2... 6) en su cara superior, y puede situarse en cualquiera de las 1000 casillas (pero no más de un dado por casilla, sin que importe su orientación). Ahora estímense las probabilidades siguientes:

- 4)** La probabilidad de obtener la configuración  $A$ .
- 5)** La probabilidad de obtener la configuración  $B$ .

- 6)** La probabilidad de obtener la configuración  $A$ , pero sin considerar el número de puntos de cada dado.
- 7)** La probabilidad de obtener la configuración  $B$ , pero sin considerar el número de puntos de cada dado.

Después de practicar con éstas (minúsculas) probabilidades y presumir que se han calculado correctamente, he dejado para el final otras dos preguntas (las más fáciles).

- 8)** ¿Es creíble la afirmación de que volví a lanzar los 200 dados dos veces y obtuve exactamente las mismas dos configuraciones  $A$  y  $B$ ?

Ahora obsérvese atentamente la configuración  $A$ . ¿Hay algún patrón o letra reconocible? Fijémonos sólo en los dados con un punto en su cara superior. ¿Reconoce ahora el lector alguna pauta? Si no es así, puede ver la configuración oculta en la figura del final de este libro (de ahí las denominaciones  $A$ , de Arieh, y  $B$ , de Boltzmann). Y ahora la última pregunta:

- 9)** ¿Revisaría el lector alguna de sus respuestas a las 8 preguntas anteriores?

Las respuestas correspondientes aparecen al final de este capítulo.

### **§. Un desafío.**

El problema que voy a plantear ahora tiene una gran significación histórica. Se considera uno de los problemas cuya solución no sólo

contribuyó a consolidar el concepto de probabilidad, sino que transformó las cábalas de los salones de juego en razonamiento matemático.

Ni el problema ni su solución son relevantes para la comprensión de la segunda ley. Mi objetivo al contar esta historia es triple. En primer lugar, dar una idea del tipo de problemas que se planteaban en la época del nacimiento de la teoría de la probabilidad. En segundo lugar, dar una idea de las dificultades que surgen a la hora de calcular probabilidades, incluso en problemas que parecen muy simples de entrada. En tercer lugar, si al lector le gustan los problemas «tramposos», saboreará la solución deliciosamente simple que pueden ofrecer los matemáticos a un problema aparentemente insoluble.

El problema en cuestión le fue planteado a Blaise Pascal por su amigo el caballero De Meré en 1654<sup>63</sup>.

Supongamos que dos jugadores ponen cada uno diez dólares sobre la mesa. Cada uno apuesta por un número del 1 al 6. Supongamos que Dan eligió el 4 y Linda eligió el 6. Las reglas del juego son muy simples. Se tira un dado y se registra la secuencia de resultados. Dan suma un punto cada vez que sale un 4, y Linda hace lo propio cada vez que sale un 6. El primero que sume tres puntos gana los 20 dólares apostados. Una posible secuencia podría ser:

1, 4, 5, 6, 3, 2, 4, 6, 3, 4

Puesto que el número 4 ha salido tres veces. Dan gana los 20 dólares.

Ahora supongamos que comienza otra partida y, al cabo de un tiempo, la secuencia de resultados es:

1, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 1, 5, 6, 2, 1, 5

En este punto surge un imprevisto y la partida debe darse por terminada. La cuestión es cómo deben repartirse los 20 dólares entre los dos jugadores.

Nótese que el problema no se plantearía si las reglas del juego dispusieran cómo debe repartirse el dinero apostado en caso de interrupción forzosa de la partida. Pero si no se especifica, no está claro cómo debe hacerse el reparto.

Parece claro que, puesto que Dan ha sumado un punto y Linda ha sumado dos, esta última debería llevarse más dinero. Pero ¿cuánto más? Queremos decidir cuál es la manera *más justa* de dividir el dinero dada la secuencia de resultados. Ahora bien, ¿qué entendemos por *más justo*, cuando hablamos de reparto? Dado que Linda ha sumado el doble de puntos que Dan, ¿debería llevarse el doble de dinero? ¿O quizá sería más justo simplemente retornar a cada uno los 10 dólares apostados, ya que el ganador ha quedado sin determinar? ¿O quizás habría que darle todo el dinero a Linda, porque ha quedado más «cerca» de la victoria que Dan?

Durante varios años, Blaise Pascal y Pierre de Fermat mantuvieron una correspondencia que fue la semilla de la teoría de la

probabilidad. Téngase en cuenta que en el siglo XVII el concepto de probabilidad todavía tenía un largo camino por recorrer antes de consolidarse. La dificultad no residía sólo en hallar la solución matemática, sino también en determinar en qué consistía el problema, es decir, qué significa encontrar un método *justo* de repartir una suma.

La respuesta a la última cuestión es la siguiente:

Puesto que no había una regla específica para dividir la suma en caso de interrupción del juego, la manera «más justa» sería dividirla según la razón entre las probabilidades de ganar de uno y otro jugador caso de que el juego hubiera continuado.

Al plantear el problema en función de las probabilidades se supera un primer obstáculo. Ahora tenemos un problema bien formulado. Pero ¿cómo se calculan las *probabilidades* buscadas? Parece que Linda tiene más posibilidades que Dan de ganar porque está «más cerca» de reunir tres puntos. Podemos calcular fácilmente que la probabilidad de que Dan gane en la próxima tirada es *ceró*, mientras que la probabilidad de que gane Linda es  $1/6$ , y la probabilidad de que no gane ninguno de los dos es  $5/6$ . Podemos calcular las probabilidades después de dos tiradas, de tres tiradas, etcétera. El cálculo se complica mucho y, en principio, hay que hallar la suma de una serie infinita, así que la solución matemática del problema por esta vía no es fácil. Intente el lector calcular la probabilidad de ganar de cada jugador al cabo de dos tiradas, y luego de tres, y verá lo enrevesado que puede resultar. Pero si a uno le gustan las matemáticas, le encantará la solución simple, basada en resolver

una ecuación de una incógnita, que se ofrece al final de este capítulo.

### **§. Respuestas a los problemas.**

Respuestas a los problemas de ruleta.

En todos estos problemas he elegido la misma secuencia: {1, 2, 3, 4, 5, 6}, cuya probabilidad de ganar es 1/2. Si elegimos el suceso *disjunto* {7, 8, 9, 10, 11, 12}, entonces la probabilidad condicionada es:

$$\Pr \{B/A\} = \Pr \{7, 8, 9, 10, 11, 12/A\} = 0$$

Esto es así porque la ocurrencia de  $A$  excluye la ocurrencia de  $B$ . En el primer ejemplo de secuencia superpuesta tenemos (véase la figura 2.14).

$$\Pr \{B/A\} = \Pr\{6, 7, 8, 9, 10, 11/A\} = 1/6 < 1/2$$

Aquí el conocimiento de que ha ocurrido  $A$  significa que sólo podemos haber ganado si la bola se detuvo en el «6». De ahí que la probabilidad sea 1/6, menor que  $\Pr \{B\} = 1/2$ , lo que quiere decir que hay una correlación negativa.

Similarmente, para  $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  tenemos:

$$\Pr \{B/A\} = \Pr \{5, 6, 7, 8, 9, 10/A\} = 2/6 < 1/2$$

Aquí, «dado A», sólo ganaremos si la bola se detiene en «5» o «6», por lo que la probabilidad condicionada es  $2/6$ , que sigue siendo menor que  $\Pr \{B\} = 1/2$ .

En el tercer caso,  $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , de donde:

$$\Pr \{B/A\} = \Pr \{4, 5, 6, 7, 8, 9/A\} = 3/6 = 1/2$$

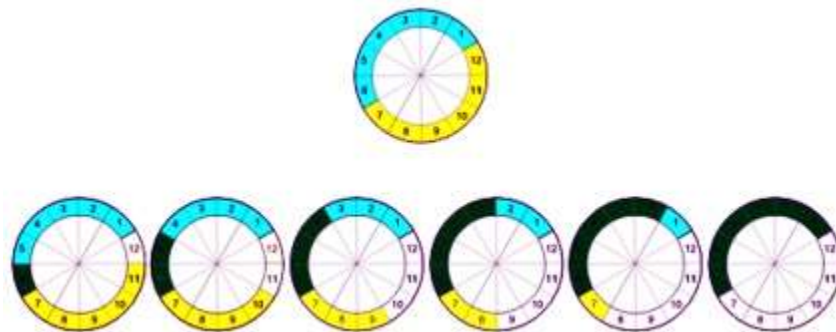
Aquí la probabilidad condicionada es  $1/2$ , exactamente igual que la probabilidad «no condicionada».  $\Pr \{B\} = 1/2$ , lo que significa que ambos sucesos son independientes, o no correlacionados.

Para los últimos tres ejemplos tenemos:

$$\Pr \{B/A\} = \Pr \{3, 4, 5, 6, 7, 8/A\} = 4/6 > 1/2.$$

$$\Pr \{B/A\} = \Pr \{2, 3, 4, 5, 6, 7/A\} = 5/6 > 1/2.$$

$$\Pr \{B/A\} = \Pr \{1, 2, 3, 4, 5, 6/A\} = 6/6 = 1 > 1/2$$



*Figura 2.14*



En el último ejemplo, saber que ha ocurrido  $A$  hace que la ocurrencia de  $B$  sea segura. En estos ejemplos hemos visto que los sucesos superpuestos pueden estar correlacionados positiva o negativamente, o no estar correlacionados en absoluto.

Respuesta a «un problema de lotería».

- 1)** La mayoría probablemente no lo creerá, aunque no es imposible.
- 2)** La mayoría probablemente lo creerá, aunque las posibilidades son tan reducidas como las de ganar el premio gordo.
- 3)** La mayoría probablemente lo creerá, aunque las posibilidades son tan reducidas como las de ganar el premio gordo.
- 4)** Las posibilidades son una en un millón ( $10^{-6}$ ).
- 5)** Las posibilidades son una en un millón ( $10^{-6}$ ).
- 6)** Las posibilidades son una en un millón ( $10^{-6}$ ).
- 7)** La probabilidad es  $999\ 000/1\ 000\ 000 \approx 1$ .
- 8)** La probabilidad es  $999/1\ 000\ 000 \approx 1/1000$ .
- 9)** Si la respuesta a 1 ha sido NO, es bastante correcta.

Las posibilidades son ciertamente reducidas. Quienes hayan respondido con un SÍ a 2 y 3 probablemente están equivocados, porque las posibilidades son tan escasas como las de ganar el premio gordo.

Quienes hayan respondido con un SÍ a las preguntas 2 y 3 probablemente están confundiendo el suceso exacto «ganar un dólar

en una moneda específica» con el suceso inespecífico<sup>64</sup> «ganar un dólar en cualquier moneda». El primero es altamente improbable, mientras que el segundo es casi seguro.

Respuesta a «un problema de orden-desorden».

- 1)** Probablemente debería creerse  $A$  pero no  $B$  Véase más abajo.
- 2)** No debería creerse.
- 3)** Podría ser creíble, si se considera que  $A$  es una configuración obtenida aleatoriamente. Pero no debería creerse si  $A$  se considera una configuración específica.
- 4)** La probabilidad de que un dado muestre una cara específica y esté en una casilla específica es  $1/6 \times 1/1000$ . La probabilidad de que los 200 dados muestren caras específicas y se sitúen en casillas específicas (nótese que los dados son distinguibles y no se permite más de uno por casilla) es  $(1/6)^{200} \times 1/1000 \times 999 \times 998 \times \dots \times 801$ . Ésta es una probabilidad pequeñísima.
- 5)** La misma respuesta que para 4.
- 6)** La probabilidad es  $1/1000 \times 999 \times 998 \times \dots \times 801$ , que sigue siendo muy pequeña.
- 7)** La probabilidad es la misma de antes.
- 8)** Probablemente no debería creerse. Más de uno podría estar tentado de presumir que obtuve la configuración  $A$  de manera aleatoria, pero la pregunta se refiere a la configuración exacta.
- 9)** Hay que tener claro que siempre que la pregunta se refiere a una configuración específica como  $A$  o  $B$ , la probabilidad es

extremadamente baja. Pero si consideramos que  $A$  es una configuración aleatoria, uno podría estar en lo cierto al asignar una probabilidad mayor a esta configuración. La razón es que hay muchas configuraciones que «parecen» la misma que  $A$ , de ahí que una configuración aleatoria tenga una probabilidad mayor. Pero cuando uno comprueba que  $A$  contiene la palabra «Arieh», entonces deja de ser una configuración aleatoria.

Respuesta a «un desafío».

La solución al problema es la siguiente. Denotemos como  $X$  la probabilidad de que gane Linda. En la próxima tirada hay tres posibilidades mutuamente excluyentes:

I: resultado {6} con probabilidad  $1/6$ .

II: resultado {4} con probabilidad  $1/6$ .

III: resultado {1, 2, 3, 5} con probabilidad  $4/6$ .

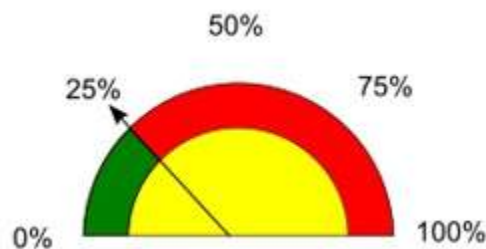
Denotemos el suceso «Linda gana» como  $LG$ . Se cumple la siguiente ecuación.

$$X = \Pr(LG) = \Pr(I) \Pr(LG/I) + \Pr(II) \Pr(LG/II) + \dots \\ \dots + \Pr(III) \Pr(LG/III) = 1/6 \times 1 + 1/6 \times 1/2 + 4/6 \times X$$

Se trata de una ecuación de una incógnita:

$$6X = 3/2 + 4X. \text{ La solución es } X = 3/4.$$

Nótese que los sucesos I, II y III se refieren a resultados posibles en la próxima tirada. El suceso LG se refiere a la victoria de Linda con independencia del número de tiradas subsiguientes. La ecuación anterior quiere decir que la probabilidad de que gane Linda es la suma de las tres probabilidades de los tres sucesos mutuamente excluyentes. Si ocurre I, entonces ella gana con probabilidad 1. Si ocurre II, entonces la probabilidad de que gane Linda es  $1/2$ . Si ocurre III, entonces la probabilidad de que gane es X, la misma que tenía al interrumpirse el juego.



*Fin del capítulo 2.*

## Capítulo 3

### Jugando con dados reales

#### **Contenido:**

§. *Un dado.*

§. *Dos dados*

§. *Tres dados*

§. *Cuatro dados y más*

#### **§. Un dado.**

Comenzaremos con un juego bastante soso. El lector elige un número entre 1 y 6, digamos «4», y yo elijo otro número diferente también entre 1 y 6, digamos «3». Lanzamos el dado. El ganador será aquel cuyo número salga antes. Este juego no requiere ningún esfuerzo intelectual. No hay ningún resultado preferente: todos son igualmente probables, y ambos jugadores tienen las mismas posibilidades de ganar o perder. Si repetimos el juego muchas veces, es probable que, en promedio, ambos jugadores acaben empatados (suponiendo, por supuesto, que el dado no esté sesgado). ¿Cómo lo sabemos? Porque hemos aceptado el hecho de que la probabilidad de cada resultado es  $1/6$  y también creemos, por experiencia, que nadie puede desafiar las leyes de la probabilidad. Pero esto no siempre fue así. En otros tiempos se creía que algunas personas tenían un poder divino que les permitía predecir el resultado del lanzamiento de un dado, o que era la voluntad divina la que determinaba los resultados. Así, si conseguíamos comunicarnos con

«Él», directamente o a través de un mediador, podíamos anticipar el resultado<sup>65</sup>. Hoy día, sin embargo, cuando consideramos un juego de dados como el descrito, damos por sentado que hay seis y sólo seis resultados posibles (figura 3.1) y que todos tienen la misma probabilidad,  $1/6$ . La siguiente tabla resulta sencilla:



*Figura 3.1.*

Resultado:	1	2	3	4	5	6
Probabilidad:	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

### **§. Dos dados.**

Jugar con dos dados es un poco más complicado. Hay diferentes posibilidades. Por ejemplo, podríamos apostar por un resultado específico, como «dado blanco 6, dado azul 1». Hay 36 resultados específicos posibles:

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
2.1.	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6

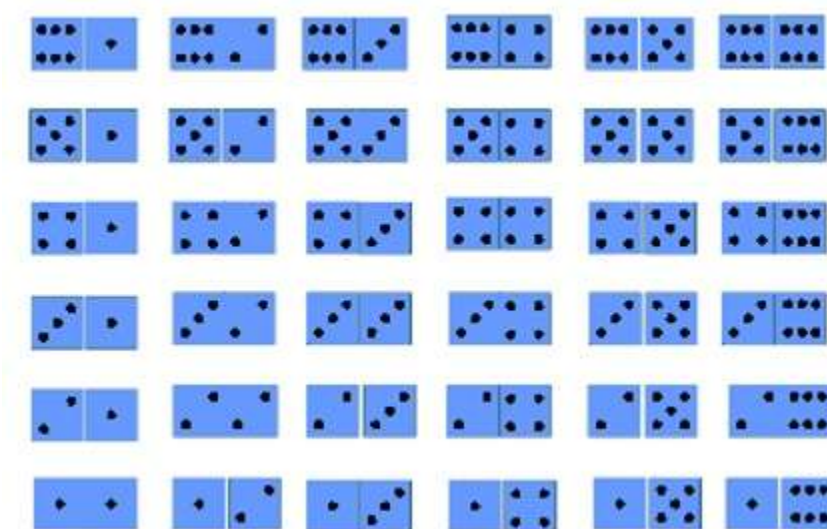
Es obvio que todos estos resultados son igualmente probables. ¿Cómo lo sé? Suponiendo que el dado es insesgado y los resultados son independientes (no se afectan mutuamente), entonces su equiprobabilidad es de sentido común. Una respuesta alternativa es que cada resultado de un dado tiene una probabilidad de  $1/6$ , por lo que cada resultado específico del lanzamiento de un par de dados es el producto de las probabilidades de los resultados de cada dado, o  $1/6$  veces  $1/6$ , que es  $1/36$ . Este argumento requiere aplicar la ley de que la probabilidad de dos sucesos independientes es el producto de las probabilidades de cada uno. Pero, en última instancia, esta ley también se basa en el sentido común.

Como en el caso de un dado, este juego es aburrido y poco interesante, y tampoco requiere ningún esfuerzo mental. Un juego algo más atractivo es apostar por la suma de los resultados de dos dados, con independencia del resultado concreto o el color de cada dado. Los resultados posibles de este juego son:

Resultado: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

En total tenemos once resultados posibles. Nos referiremos a ellos como sucesos inespecíficos, por las razones que se dan más adelante<sup>66</sup>. Si tuviéramos que apostar por un resultado, ¿por cuál nos decidiríamos? A diferencia de los dos juegos anteriores, aquí hay que pensar un poco. No mucho, y desde luego nada que exceda la capacidad del lector.

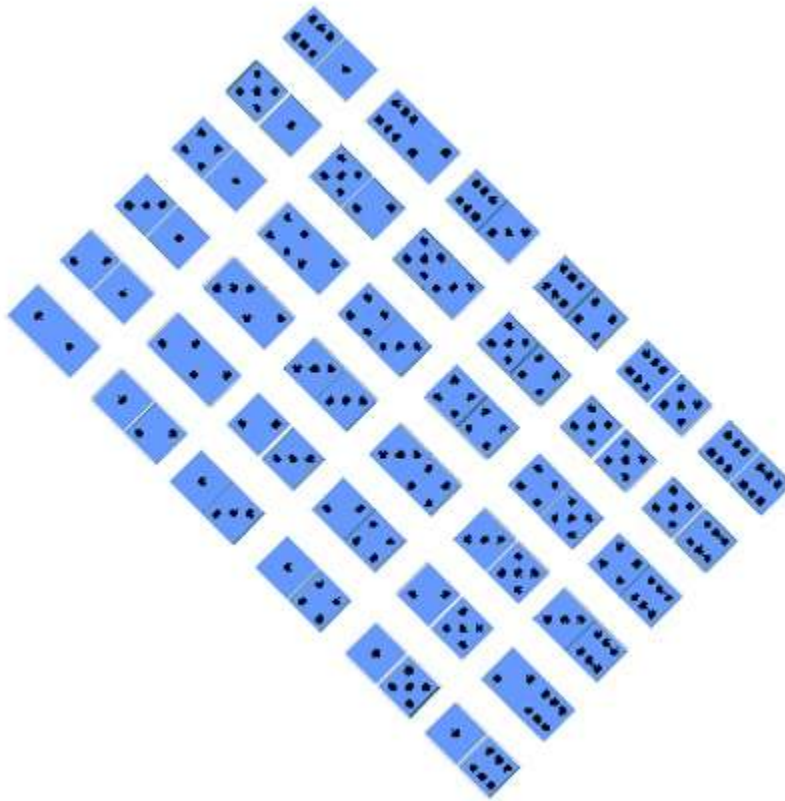
No hay duda de que los resultados listados no son sucesos elementales, ya que no son igualmente probables.



*Figura 3.2a*

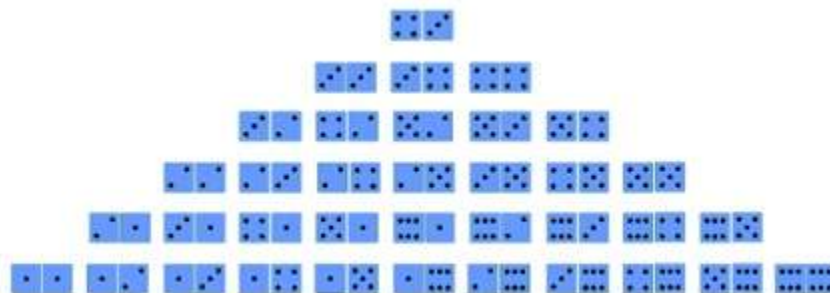
Como puede verse en la figura 3.2a, o contando uno mismo, cada suceso es la suma (o unión) de sucesos elementales. En este juego tenemos los mismos sucesos elementales que en el anterior, cada uno con probabilidad  $1/36$ . Antes de calcular las probabilidades de los sucesos compuestos (las sumas de las puntuaciones de dos dados), nótese que en la figura 3.2a los sucesos de igual suma se alinean a lo largo de la diagonal principal del cuadrado. El mismo cuadrado girado  $45^\circ$  (en el sentido de las agujas del reloj) se reproduce en la figura 3.2b. Tras constatar que podemos contar el número de sucesos específicos (o elementales) contenidos en cada suceso compuesto, podemos calcular su probabilidad.





*Figura 3.2b*

Para facilitar el recuento, hemos «comprimido» la figura 3.2b para obtener la figura 3.2c (donde cada par se ha vuelto a girar en sentido contrario a las agujas del reloj) y hemos reagrupado los pares de igual suma.



*Figura 3.2c*

La tabla de arriba muestra las probabilidades de los sucesos compuestos. La «multiplicidad» no es más que el número de sucesos específicos que comprende el suceso inespecífico. ¿Cómo sabemos que éstas son las probabilidades correctas? Una vez más, apelo al sentido común. El lector debería convencerse de ello, y si no lo está, puede repetir el juego unos cuantos millones de veces y registrar la frecuencia de cada resultado. Pero no se lo aconsejo. Debería confiar en que su sentido común le lleve a las probabilidades correctas o, si no, efectuar un millón de experimentos mentales y entrever cuántas veces saldrá cada suma. Una vez se haya convencido, compruebe que la suma de las probabilidades de todos los resultados posibles da 1, como tiene que ser.

Con este bagaje, procedamos a jugar. ¿Por qué resultado apostaríamos? Obviamente, descartaríamos el 2 o el 12. ¿Por qué? Porque estos sucesos sólo incluyen un suceso específico (o elemental). Si nos fijamos en la figura 3.2b, vemos que la mejor elección es el 7. No hay nada mágico en este número. Ocurre que, en este juego concreto, la suma 7 comprende el mayor número de resultados específicos; de ahí que sea el resultado más probable. Por supuesto, si jugamos una sola vez podríamos apostar por el 2 y ganar. Pero si el lector apuesta por el 2 y yo por el 7, y jugamos muchas veces, yo ganaré las más de las veces. Como indica la tabla, las posibilidades son 6:1. En la figura 3.3 se representa el número de sucesos elementales (o configuraciones específicas) para las sumas posibles de los juegos con uno y con dos dados.

Dominado este juego, podemos proceder al siguiente. Se trata de una variante algo más difícil, pero nos situará en la vía correcta hacia la comprensión de la segunda ley de la termodinámica.

### **§. Tres dados.**

Este juego es esencialmente el mismo que el anterior, pero es un poco más difícil y entraña más cálculos. Se juega con tres dados, y se calcula la suma de los resultados parciales, con independencia de los puntos o del color de cada dado.

En principio, no hemos añadido nada nuevo, aparte de que el cálculo de las sumas es más tedioso. De hecho, éste es justo el tipo de juego a partir del cual evolucionó la teoría de la probabilidad. ¿Cuál es la mejor apuesta? Esta pregunta se trasladó a los matemáticos antes del establecimiento de la teoría de la probabilidad (véase el capítulo 2).

La lista de resultados posibles es:

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

En total hay 16 posibilidades. Listar todos los resultados específicos (por ejemplo, {azul = 1, rojo = 4, blanco = 3}) requeriría mucho espacio. En total hay  $6^3 = 216$  resultados específicos posibles. Obviamente, no deberíamos apostar al 3 ni al 18, ni tampoco al 4 ni al 17. ¿Por qué? Por la misma razón por la que hemos desechado las sumas más baja y más alta en el juego anterior. Ahora bien, ¿cuál es la mejor apuesta? Para responder esta pregunta, tenemos que

contar todos los resultados específicos (o elementales) posibles que dan lugar a cada una de las sumas de la lista anterior. Esto requiere cierto esfuerzo, pero no hay implicado ningún principio nuevo, sólo el sentido común y la voluntad de hacer el recuento. Hoy tenemos la suerte de disponer de ordenadores que hacen el trabajo por nosotros. Los resultados se listan en la tabla siguiente:

Sucesos compuestos	Multiplicidad	Probabilidad
2	1	1/36
3	2	2/36
4	3	3/36
5	4	4/36
6	5	5/36
7	6	6/36
8	5	5/36
9	4	4/36
10	3	3/36
11	2	2/36
12	1	1/36

En la segunda fila se lista el número de posibilidades para cada suma. Las probabilidades se obtienen dividiendo los valores de la segunda fila por 36.

Así pues, para el caso de un dado la distribución de probabilidad es uniforme. Para dos dados, encontramos un máximo en suma = 7

(figura 3.3). Para tres dados, tenemos dos probabilidades máximas, cuyo valor es  $27/216$ , correspondientes a las sumas 10 y 11.

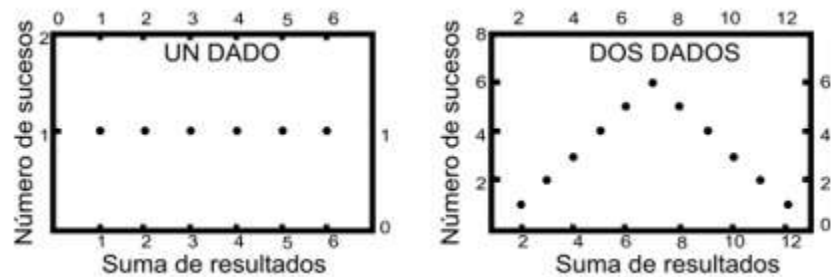


Figura 3.3

Si queremos ganar, por lo tanto, es mejor que apostemos por 10 o por 11.

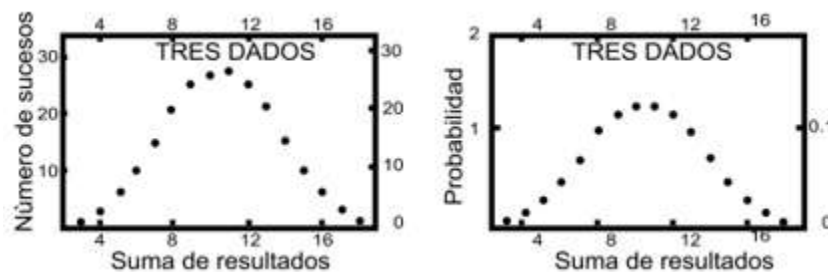


Figura 3.4

En la figura 3.4 se representa el número de sucesos elementales para cada suma posible de los tres dados. Dividiendo este número por el número total de sucesos específicos,  $6^3 = 216$ , obtenemos las probabilidades correspondientes (también representadas en la misma figura).

El lector debería ser capaz de comprobar por sí mismo unos cuantos de estos números. No se necesitan matemáticas superiores ni teoría

de la probabilidad: sólo hay que contar y aplicar el sentido común. Si lo hace así, y entiende por qué los valores 10 y 11 tienen una probabilidad máxima, ya está casi a medio camino de entender la segunda ley.

Procedamos ahora a examinar unos cuantos juegos más del mismo tipo, pero con un número creciente de dados.

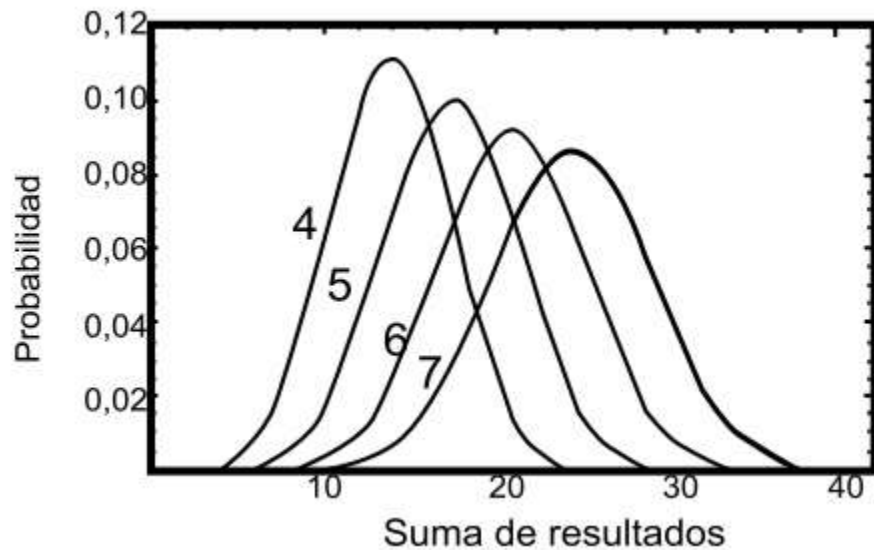
### **§. Cuatro dados y más.**

Si lanzamos cuatro dados, tendremos que elegir un número entre 4 y 24 (la mínima y la máxima de las sumas posibles). Como antes, lanzamos los cuatro dados simultáneamente y calculamos la suma de puntos, con independencia de la identidad (o el color) y del resultado de cada dado concreto; lo único que cuenta es la suma.

En este caso tenemos  $6^4 = 1296$  resultados específicos posibles. La probabilidad de cada resultado específico es  $1/1296$ . El recuento en este caso es bastante laborioso, pero tampoco hay ningún principio nuevo. La figura 3.5 muestra las probabilidades (esto es, el número de resultados específicos para cada suma dividido por el total) en función de la suma. Para cuatro dados, el rango de sumas posibles va de 4 a 24; para cinco dados, el rango va de 5 a 30; para seis dados, el rango va de 6 a 36, y para siete dados el rango va de 7 a 42.

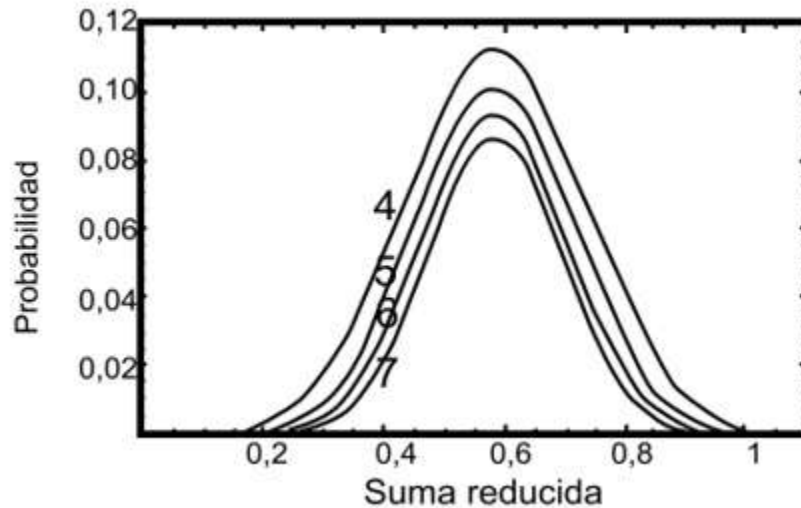
En la figura 3.6 se representan las probabilidades en función de la suma «reducida», que no es más que el valor de la suma dividido por el máximo. De esta manera se consigue que los diferentes rangos de 0 a  $N$  en la figura 3.5 queden «comprimidos» en un rango único (de 0

a 1). Esta comprensión modifica el área bajo la curva. En la figura 3.5, el área bajo cada curva es 1 mientras que en la figura 3.6 está reducida por el factor  $N$ . Nótese que la dispersión de las probabilidades en la figura 3.5 aumenta con  $N$ . En la figura 3.6, en cambio, la dispersión disminuye con  $N$ . Cuanto mayor es  $N$ , más se estrecha la curva. Si lo que nos interesa son las desviaciones absolutas del máximo (en  $N/2$ ), tenemos que mirar la figura 3.5.



*Figura 3.5*

Pero si sólo nos interesan las desviaciones relativas del máximo (en  $1/2$ ) deberíamos acudir a las curvas de la figura 3.6. Cuando  $N$  se hace muy grande, la curva de la figura 3.6 se vuelve extremadamente estrecha, lo que quiere decir que las desviaciones relativas del máximo se hacen despreciables.



*Figura 3.6*

Nótese también que en cada caso hay uno o dos valores cuya probabilidad es máxima. Obsérvese la forma de la distribución. Recuerda una campana, también conocida como distribución normal o gaussiana. Ésta es una curva importante en la teoría de la probabilidad y la estadística, pero no nos incumbe aquí. Nótese también que, a medida que aumenta el número de dados, la curva de la figura 3.6 se estrecha y el pico correspondiente a la probabilidad máxima desciende. El descenso del máximo es el mismo que en la figura 3.5, pero la «dispersión» de la curva es diferente. Discutiremos más a fondo este importante aspecto de las probabilidades en el capítulo siguiente. Las figuras 3.7 y 3.8 muestran figuras similares a las de las figuras 3.5 y 3.6, pero para valores de  $N$  más grandes.

Detengámonos en este punto para ponderar lo que hemos visto hasta ahora, antes de dar el próximo paso. Deberíamos preguntarnos, primero, cuál es el número ganador en cada caso y,



segundo y más importante, por qué es un número ganador. No nos preocupemos de los recuentos exactos; sólo tenemos que fijarnos en que en cada juego hay una o dos sumas máximamente probables. Esto significa que, si hacemos muchas tiradas, dichas sumas se darán con más frecuencia que el resto, así que, puestos a jugar, haríamos bien en apostar por estos números ganadores.

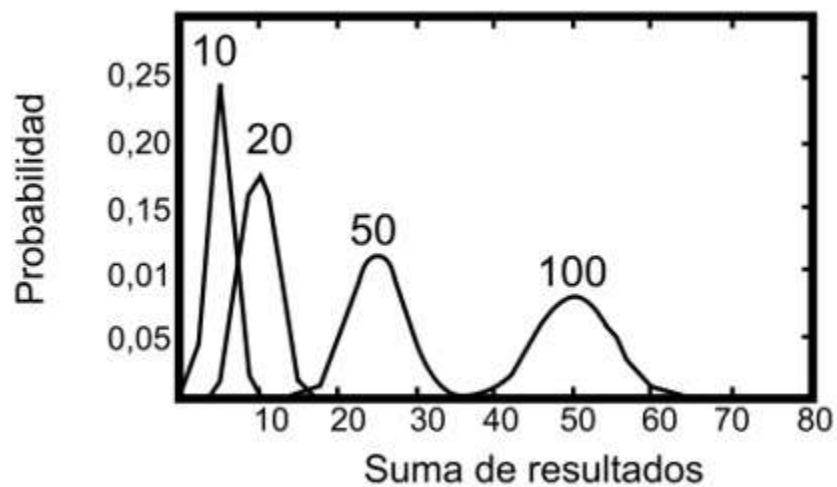


Figura 3.7

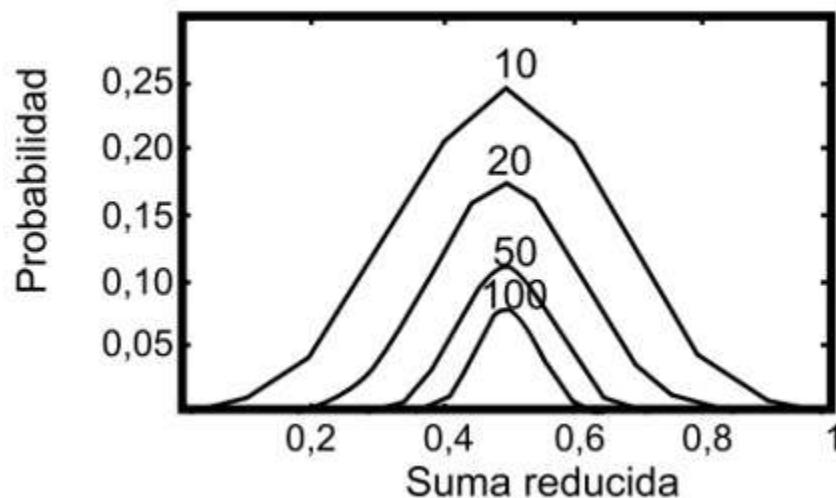


Figura 3.8

La primera pregunta es importante, incluso fundamental, si estamos interesados en jugar a los dados. Pero si lo que queremos es comprender la segunda ley y poder seguir los argumentos de los capítulos que siguen, deberíamos concentrarnos en el «por qué». ¿Por qué hay un número ganador? Tomemos el caso de tres dados. Pensemos en las razones de la existencia de dicho número. Comencemos con suma = 3. Para esta posibilidad sólo hay un único resultado específico, que es:

$$\text{azul} = 1, \text{rojo} = 1, \text{blanco} = 1 \dots \text{suma} = 3$$

Uno puede imaginar que este resultado específico será un suceso muy raro, igual que el suceso suma = 18. Como antes, sólo hay un resultado específico para obtener 18, que es:

$$\text{azul} = 6, \text{rojo} = 6, \text{blanco} = 6 \dots \text{suma} = 18$$

Para suma = 4 tenemos tres resultados específicos, que son:

$$\text{azul} = 1, \text{rojo} = 1, \text{blanco} = 2 \dots \text{suma} = 4$$

$$\text{azul} = 1, \text{rojo} = 2, \text{blanco} = 1 \dots \text{suma} = 4$$

$$\text{azul} = 2, \text{rojo} = 1, \text{blanco} = 1 \dots \text{suma} = 4$$

La partición de suma = 4 en tres enteros es única, 1: 1:2, y si lo único que nos importa es que los tres dados sumen 4, no distinguiremos entre los tres casos listados. Cada una de las tres posibilidades particulares es una configuración específica. Si no diferenciamos entre configuraciones específicas y sólo atendemos a la suma = 4, hablaremos de configuración inespecífica o suceso inespecífico.

Para suma = 5 tenemos seis posibilidades específicas:

azul = 1, rojo = 1, blanco = 3... suma = 5

azul = 1, rojo = 3, blanco = 1... suma = 5

azul = 3, rojo = 1, blanco = 1... suma = 5

azul = 1, rojo = 2, blanco = 2... suma = 5

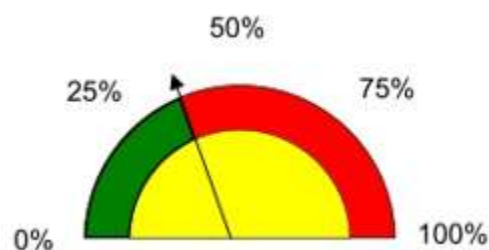
azul = 2, rojo = 2, blanco = 1... suma = 5

azul = 2, rojo = 1, blanco = 2... suma = 5

Aquí tenemos dos fuentes de multiplicidad. Primero, hay dos particiones de suma = 5 (1:1:3 y 2:2:1) y, segundo, para cada partición hay tres permutaciones posibles; en otras palabras, cada partición tiene un peso 3. Diremos que hay seis configuraciones específicas, pero sólo un suceso inespecífico.

Los conceptos de suceso inespecífico y suceso específico son importantes para comprender la segunda ley. Como hemos visto, cada suceso específico tiene la misma probabilidad. En el juego de dos dados, un suceso específico es una constatación de la contribución de cada dado concreto a la suma total. En el caso de tres dados, si ignoramos el color de cada dado y su contribución específica a la suma total, entonces, para suma = 3, tenemos un suceso inespecífico consistente en un único suceso específico, mientras que para suma = 4 tenemos un suceso inespecífico que comprende tres sucesos específicos, y para suma = 5 tenemos un suceso inespecífico que comprende seis sucesos específicos, y así sucesivamente.

En el capítulo siguiente examinaremos un juego de dados modificado que nos llevará aún más cerca del experimento real que discutiremos en el capítulo 7. Jugaremos con dados más primitivos, con el número «0» en tres caras y el número «1» en las otras tres. La simplificación que conseguimos es doble. Primero, sólo hay dos resultados posibles para cada dado (cero o uno) y, segundo, cada suma sólo admite una partición, de manera que el número de resultados específicos comprendidos en el suceso suma =  $n$  es simplemente  $n$ , es decir, el número de veces que sale «1».



*Fin del Capítulo 3*

## Capítulo 4

### Jugando con dados simplificados, y una apreciación preliminar de la segunda ley

#### Contenido:

§. Dos dados  $N = 2$

§. Cuatro dados  $N = 4$ .

§. Diez dados;  $N = 10$ .

§. Cien dados  $N = 100$ .

§. Mil dados  $N = 1000$ .

§. Diez mil dados  $N = 10^4$  y más allá.

El nuevo juego es más simple que los anteriores. Consideraremos dados con tres caras marcadas con un «0» y tres caras marcadas con un «1», o monedas marcadas con un «0» en una cara y un «1» en la otra. Ya que hemos comenzado jugando con dados, continuaremos así, pero si el lector lo prefiere puede pensar en monedas. Lo importante es que hacemos un «experimento» (lanzar un dado o una moneda) cuyos resultados son «0» o «1», con probabilidades  $1/2$  y  $1/2$ . En vez de seis resultados posibles, ahora tenemos sólo dos, lo que constituye una primera simplificación. La segunda simplificación viene de la elección de «0» y «1» como resultados posibles, y es que cuando sumamos los resultados de  $N$  dados, la *suma* no es más que el *número* de unos. Los ceros no cuentan. Por ejemplo, con  $N = 10$  (figura 4.1) podría darse el resultado específico 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0. Aquí la *suma* es 5,

que también es el *número* de unos (o el número total de puntos en los dados con tres caras marcadas con un punto y tres sin marca). Nos fijaremos en la «evolución» del juego más que en las estrategias ganadoras. Pero, para los que se sientan más cómodos jugando, las reglas son las que siguen. Jugamos con  $N$  dados insesgados cuyos resultados posibles son sólo «0» y «1». Siempre partimos de la misma *configuración* inicial, con todos los dados en cero<sup>67</sup>.

Por configuración entendemos la especificación detallada de la secuencia de ceros y unos (por ejemplo, el primer dado muestra un «1», el segundo un «0», el tercero un «0», etcétera). Nos referiremos a la configuración inicial como el paso *cero* del juego. Para  $N= 10$ , la configuración inicial es:



*Figura 4.1*

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

Ahora escogemos un dado al azar, lo lanzamos y lo devolvemos a su lugar. Podemos imaginar una máquina que recorre la fila de dados, elige uno al azar y le da un toque para hacer que salga «0» o «1» con igual probabilidad. También podemos programar el juego en un ordenador<sup>68</sup>.

Con estas reglas simples, seguiremos la evolución de las configuraciones. Pero una vez más, para los que lo prefieran así, haremos unas cuantas jugadas. Comencemos por escoger un

número entre 0 y 10; digamos que el lector elige el 4 y yo el 6. Partimos de la configuración de todo ceros y procedemos según las reglas. A cada paso calculamos la suma: si el resultado es 4, el lector contabiliza un punto; si es 6, el punto es para mí. ¿Qué suma deberíamos elegir? Se podría pensar que una opción obvia es *suma* = 0, ya que, al conocerse la configuración inicial, es una apuesta segura en el paso cero. Esto es verdad, pero ¿y si convenimos de entrada en jugar un millón de pasos?

Pasemos a examinar con detenimiento y paciencia la evolución de este juego al cabo de muchos pasos. Uno debería entretenerse en este ejercicio aunque sólo le interesara saber cuál es la mejor apuesta, pero seguir la evolución del juego es crucial para comprender la segunda ley de la termodinámica. Hay que estar atento y alerta, y concentrarse en *qué* ocurre y *por qué* ocurre. En cuanto al *cómo* ocurre, ya hemos descrito el «mecanismo».

Recordemos que estamos jugando con reglas nuevas. Los dados darán sólo dos resultados posibles, «0» y «1». En consecuencia, la suma de los resultados de  $N$  dados sólo puede variar entre 0 (todo ceros) y  $N$  (todo unos). Además, sólo hay una partición de cada suma, lo que representa una gran simplificación en comparación con el juego anterior con dados clásicos, donde teníamos que considerar distintos pesos para las distintas particiones, una tarea que se complica a medida que aumenta  $N$  (véanse los capítulos 2 y 3). Aquí sólo tenemos que preocuparnos del peso de una partición. Por ejemplo, para  $N = 4$  y *suma* = 2, sólo hay una partición de 2 en dos ceros y dos unos. Las posibilidades son:



0011 0101 0110 1001 1010 1100

Hay seis configuraciones específicas esto es, seis secuencias ordenadas de ceros y unos para el suceso *inespecífico*  $\text{suma} = 2$ . Por suceso inespecífico entendemos el número de unos que han salido, con independencia de sus localizaciones específicas en la secuencia. Para cualquier suceso inespecífico, que podemos denotar como  $\text{suma} = n$ , hay distintas ordenaciones de los ceros y unos, cada una de las cuales determina una configuración específica, o suceso específico. Antes de proceder con los nuevos juegos, fijémonos de nuevo en las figuras 3.5 y 3.6 (o 3.7 y 3.8). Estas figuras representan las probabilidades en función de la suma y en función de la suma *reducida* (es decir, el valor de la suma dividido por  $N$ ). Nótese que todas las curvas tienen un máximo en  $N/2$  (o en  $1/2$ , en el caso de la suma reducida). Cuanto mayor es  $N$ , más bajo es el pico del máximo.

### **§. Dos dados; $N = 2$ .**

Como en el caso anterior, el juego con un dado no tiene nada de interesante, así que comenzaremos analizando el caso de dos dados. Recordemos que en el presente juego partimos de una configuración inicial específica, que en lo sucesivo siempre será la de todo ceros. Ya sabemos que la opción  $\text{suma} = 0$  es una apuesta segura en el paso cero. Pero supongamos que decidimos apostar por  $\text{suma} = 2$ , el resultado más alto posible de este juego. Recordemos que cuando

jugábamos con dos dados *reales*, el mínimo,  $\text{suma} = 2$ , y el máximo,  $\text{suma} = 12$ , tenían la misma probabilidad  $1/36$ . Aquí las reglas del juego son diferentes. Si mi oponente apuesta por  $\text{suma} = 0$  y yo apuesto por  $\text{suma} = 2$ , su probabilidad de ganar en el paso cero es 1, y la mía es 0, así que  $\text{suma} = 0$  es la mejor apuesta en el paso cero. ¿Y en el paso uno? Ahora mi oponente ganará si al lanzar el dado elegido al azar sale cero. La probabilidad de que esto ocurra es  $1/2$ . En cuanto a mí, no hay manera de obtener  $\text{suma} = 2$  en el primer paso, ya que los dos únicos resultados posibles son cero y uno, así que mi probabilidad de ganar es nula. Así pues, mi oponente ha elegido mejor en los pasos cero y uno.

Demos un paso más. Es fácil ver que mi oponente sigue teniendo ventaja. Para que yo gane, la suma debe aumentar de cero a uno en el primer paso, *y* de uno a dos en el segundo. Mi oponente tiene más *vías* para obtener  $\text{suma} = 0$  en el segundo paso: puede ser que vuelva a salir cero en el primer paso y en el segundo paso, o que salga un uno en el primer paso y vuelva a salir cero en el segundo paso.

La figura 4.2 muestra dos manos de este juego<sup>69</sup>, cada una de cien pasos. Es evidente que, después de muchos pasos, el número de «visitas» a  $\text{suma} = 0$  y  $\text{suma} = 2$  será más o menos el mismo, aunque hayamos partido de  $\text{suma} = 0$ . Se dice que el juego pierde su «memoria» de la configuración inicial. El resultado neto es que a mi oponente sólo le va un poco mejor que a mí en este juego.

¿Y si, en vez de apostar por  $\text{suma} = 2$ , apuesto por  $\text{suma} = 1$ , mientras que mi oponente sigue apostando por  $\text{suma} = 0$ ? Como

antes, él tiene todas las de ganar en el paso cero. En el paso siguiente, ambos tenemos la misma probabilidad de ganar,  $1/2$ . Pero si observamos la «evolución» del juego, al cabo de muchos pasos el juego visitará  $\textit{suma} = 0$  con bastante menos frecuencia que  $\textit{suma} = 1$ . Así pues, es evidente que, a la larga, yo saldré ganando a pesar de la victoria *garantizada* de mi oponente en el paso cero.

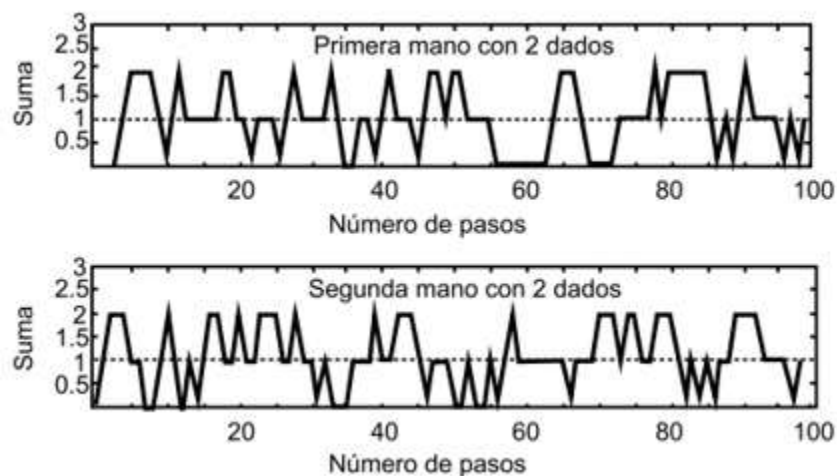


Figura 4.2

Dejemos de jugar por un momento y fijémonos en la evolución del juego tal como se muestra en la figura 4.2. Nótese que en ambas manos hemos partido de  $\textit{suma} = 0$ , es decir, de la configuración  $\{0,0\}$ . Vemos que en la primera mano el primer paso se mantiene en  $\textit{suma} = 0$ , mientras que en la segunda mano pasamos de cero a uno. A la larga acabaremos habiendo visitado  $\textit{suma} = 0$  un 25% de las veces,  $\textit{suma} = 2$  otro 25% de las veces, y  $\textit{suma} = 1$  un 50% de las veces. La razón es la misma que en el caso del juego con dos dados reales del capítulo anterior: hay una configuración específica para

$\text{suma} = 0$ , una configuración específica para  $\text{suma} = 2$ , y dos configuraciones específicas para  $\text{suma} = 1$ , tal como se indica en la tabla de abajo.

Configuración	{0, 0}	{1, 0}, {0, 1}	{1, 1}
Peso	1	2	1
Probabilidad	1/4	2/4	1/4

Esto es fácil de entender y comprobar experimentando físicamente con dados (o monedas) o mediante una simulación por ordenador.

En la figura 4.2 podemos ver y contar el número de visitas a cada nivel. Vemos que la ligera ventaja de la apuesta por  $\text{suma} = 0$  acaba disipándose.

Antes de pasar al juego con cuatro dados, adviértase que nada de lo que hemos aprendido hasta aquí parece relevante para la comprensión de la segunda ley. Lo hemos presentado sobre todo como entrenamiento en el análisis (no matemático) de la evolución del juego, y como preparación para ver cómo y por qué aparecen nuevas propiedades cuando el número de dados se agranda. Estas nuevas propiedades no sólo son relevantes, sino que son la esencia misma de la segunda ley de la termodinámica.

Si simulamos muchos juegos como éste en un ordenador, podríamos encontrar ciertas «estructuras» en algunas manos, como por ejemplo una secuencia de diez ceros consecutivos, o una alternancia de ceros y unos, o cualquier otra estructura específica que se nos ocurra. Cada «estructura» específica (es decir, una

secuencia de resultados concreta) es posible, y si jugamos muchas veces aparecerán de vez en cuando. Por ejemplo, la probabilidad de observar el suceso  $\text{suma} = 0$  en los 100 pasos es simplemente  $(1/2)^{100}$ , es decir, menos de una de cada  $10^{30}$  manos.

### **§. Cuatro dados; $N = 4$ .**

Procedamos a jugar con cuatro dados. Esta modalidad tiene características algo diferentes. Una vez más, partimos de una configuración de todo ceros en el paso cero, elegimos un dado al azar, lo lanzamos y lo volvemos a colocar en su sitio con el resultado que ha salido. La figura 4.3 muestra dos manos de este juego. Cada mano consta de 100 pasos. Se representa la suma en función del número de pasos. El valor mínimo es  $\text{suma} = 0$  (todo ceros) y el máximo es  $\text{suma} = 4$  (todo unos). Si el lector quiere apostar por  $\text{suma} = 0$  y mantener esta apuesta (como establecen las reglas del juego), ganará si yo apuesto por el 4. La razón es la misma que antes. Como hemos partido de la configuración de todo ceros, el juego está ligeramente «sesgado» hacia  $\text{suma} = 0$ . Si elijo  $\text{suma} = 2$ , es seguro que perderé en el paso cero y que mi oponente ganará. También tendrá ventaja en los pasos sucesivos, pero su ventaja inicial se disipará a la larga. Podemos ver que, al cabo de 100 pasos, el promedio de visitas de cada resultado posible es:

Suma 0 en 1/16 de los pasos

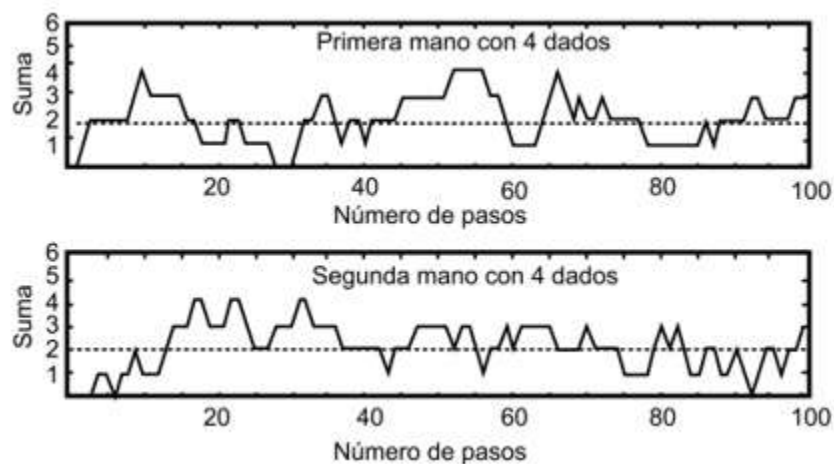
Suma 1 en 4/16 de los pasos

Suma 2 en 6/16 de los pasos

Suma 3 en 4/16 de los pasos

Suma 4 en 1/16 de los pasos

Estos promedios son a largo plazo, y pueden calcularse con exactitud. Como puede verse, la ligera ventaja inicial de la apuesta por  $\text{suma} = 0$  se esfuma. Examinemos con más detalle las manos de este juego (figura 4.3) y comparémoslo con el caso de dos dados (figura 4.2).



*Figura 4.3*

Una característica obvia de este juego es que el número total de visitas a la configuración inicial ( $\text{suma} = 0$ ) es más bajo que antes. Examinemos todas las configuraciones posibles:

Suceso inespecífico	Sucesos específicos					
<i>suma</i> = 0	0,0,0,0					
<i>suma</i> = 1	1,0,0,0	0,1,0,0	0,0,1,0	0,0,0,1		
<i>suma</i> = 2	1,1,0,0	1,0,1,0	1,0,0,1	0,1,1,0	0,1,0,1	0,0,1,1
<i>suma</i> = 3	1,1,1,0	1,1,0,1	1,0,1,1	0,1,1,1		
<i>suma</i> = 4	1,1,1,1					

En total hay 16 configuraciones *específicas*. Las hemos clasificado en cinco grupos, cada uno caracterizado únicamente por la *suma* de los resultados de cada dado, o el «número de unos», con independencia de la posición de los «unos» en la secuencia. Así, hemos pasado de 16 configuraciones *específicas* (es decir, donde se especifican las posiciones de todos los ceros y unos) a cinco configuraciones *inespecíficas* (donde sólo cuenta el número de «unos»). La distinción entre configuraciones específicas y configuraciones inespecíficas es muy importante<sup>70</sup>. Una configuración inespecífica incluye una o más configuraciones específicas.

Otra característica común a ambos juegos (y a los que nos quedan en este capítulo) es que, a pesar del leve sesgo inicial favorable a *suma* = 0 en comparación con *suma* = 4, a la larga (o muy a la larga) veremos que, en promedio, la suma fluctuará en torno a la línea de puntos que hemos trazado a la altura de *suma* = 2. Esta tendencia se hará más pronunciada y clara a medida que aumente *N*.

Antes de pasar al juego siguiente, el lector debería «entrenarse» con este juego, bien jugando con dados reales, bien simulándolo en un PC. Debería recurrir sólo a su sentido común para comprender por qué el número de visitas a la configuración inicial decrece a medida

que aumenta el número de pasos, y por qué el número de visitas  $asuma = 2$  es el mayor a largo plazo.

### **§. Diez dados; $N = 10$ .**

Con diez dados apreciaremos algo nuevo, que se hará más evidente a medida que aumentemos el número de dados, hasta que lleguemos a identificar un comportamiento similar a lo que dicta la segunda ley.

Comenzaremos como antes, con una configuración de todo ceros, de manera que la suma de puntos es nula. La figura 4.4 muestra dos manos de este juego.

En el primer paso podemos quedarnos en  $suma = 0$  o pasar a  $suma = 1$ . La probabilidad de ambas posibilidades es  $1/2$ . Esto apenas se aprecia a la escala de la figura 4.4. Pero lo importante es lo que ocurre a continuación. Como puede verse en las manos representadas en la figura, la tendencia general en los primeros pasos es *ascendente*. ¿Por qué? La respuesta es muy simple. Tras el primer paso, tenemos una de dos configuraciones posibles: o todo ceros, o nueve ceros y un uno. Ahora elegimos un dado al azar. Obviamente, es mucho más probable que el dado seleccionado corresponda a un cero. Si es así, podemos subir o quedarnos como estábamos, pero no bajar. Para que ocurra esto último tenemos que seleccionar el único dado con un «1» (lo cual es relativamente poco probable) y convertirlo en «0» (con probabilidad  $1/2$ ). Así, un descenso de la suma en el segundo paso es un suceso raro (y lo será cada vez más a medida que aumente  $N$ ). Si examinamos



detenidamente este razonamiento, nos convenceremos de que, al dar el segundo paso, es mucho más probable subir que bajar. Es importante entender bien este comportamiento en esta fase, porque luego aumentaremos el número de dados. La razón por la que nos entretendremos en hacer cálculos con diez dados para luego extrapolarlos a un número creciente de dados es que el caso de diez dados es bastante simple. Para un número mayor de dados los cálculos podrían intimidar a los lectores y hacerles desistir del análisis probabilístico.

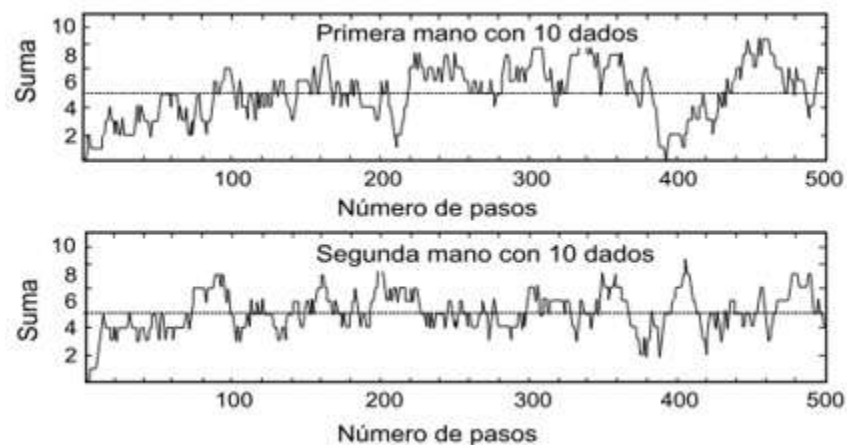


Figura 4.4

El juego con diez dados es muy simple. Como siempre, partimos de una configuración de todo ceros. Por lo tanto, en el primer paso elegiremos un «0» con probabilidad 1, y luego podemos ascender ( $suma = 1$ ) con probabilidad  $1/2$  o quedarnos como estamos ( $suma = 0$ ) con la misma probabilidad. No hay descenso posible.

En el segundo paso el razonamiento es algo más complicado. Si tras el primer paso estamos en  $suma = 0$ , entonces las dos posibilidades

son las mismas que antes. Pero si tras el primer paso nos hemos situado en  $\textit{suma} = 1$ , entonces tenemos cuatro posibilidades:

- 1)** Seleccionar al azar un «1» con probabilidad  $1/10$  y quedarse como antes con probabilidad  $1/2$ .
- 2)** Seleccionar al azar un «1» con probabilidad  $1/10$  y bajar con probabilidad  $1/2$ .
- 3)** Seleccionar al azar un «0» con probabilidad  $9/10$  y subir con probabilidad  $1/2$ .
- 4)** Seleccionar al azar un «0» con probabilidad  $9/10$  y quedarse como antes con probabilidad  $1/2$ .

Las probabilidades netas de las cuatro posibilidades son:

- 1)**  $1/10$  veces  $1/2 = 1/20$  de quedarse como antes ( $\textit{suma} = 1$ )
- 2)**  $1/10$  veces  $1/2 = 1/20$  de bajar ( $\textit{suma} = 0$ )
- 3)**  $9/10$  veces  $1/2 = 9/20$  de subir ( $\textit{suma} = 2$ )
- 4)**  $9/10$  veces  $1/2 = 9/20$  de quedarse como antes ( $\textit{suma} = 1$ ).

Ni que decir tiene que quedarse en  $\textit{suma} = 1$  o subir es mucho más probable que volver a cero. Esto se refleja en la tendencia general ascendente al principio de ambas manos, tal como se aprecia en la figura 4.4.

En el tercer paso podemos hacer el mismo cálculo. La tendencia a subir sigue siendo significativa, aunque no tanto como antes. ¿Por qué? Porque para subir tenemos que seleccionar un «0» con una probabilidad máxima de  $8/10$  (suponiendo que estemos en  $\textit{suma} = 2$ ) y subir con probabilidad  $1/2$ . La probabilidad de subir sigue

siendo mayor que la de bajar, pero es algo menor que en el segundo paso. El razonamiento es el mismo para los pasos cuarto, quinto, etcétera. A cada paso, la probabilidad de subir disminuye, hasta que alcanzamos el nivel  $\text{suma} = 5$ . Aquí volvemos a tener cuatro posibilidades:

- 1)** Seleccionar al azar un «1» con probabilidad  $1/2$  y quedarse como antes con probabilidad  $1/2$ .
- 2)** Seleccionar al azar un «1» con probabilidad  $1/2$  y bajar con probabilidad  $1/2$ .
- 3)** Seleccionar al azar un «0» con probabilidad  $1/2$  y subir con probabilidad  $1/2$ .
- 4)** Seleccionar al azar un «0» con probabilidad  $1/2$  y quedarse como antes con probabilidad  $1/2$ .

Las probabilidades netas de estas cuatro posibilidades son:

- 1)**  $1/2$  veces  $1/2 = 1/4$  de quedarse como antes ( $\text{suma} = 5$ )
- 2)**  $1/2$  veces  $1/2 = 1/4$  de bajar ( $\text{suma} = 4$ )
- 3)**  $1/2$  veces  $1/2 = 1/4$  de subir ( $\text{suma} = 6$ )
- 4)**  $1/2$  veces  $1/2 = 1/4$  de quedarse como antes ( $\text{suma} = 5$ ).

Lo importante aquí es que, cuando alcanzamos el nivel  $\text{suma} = 5$ , tenemos la misma probabilidad de subir que de bajar,  $1/4$ , y tenemos una probabilidad doble,  $1/2$ , de quedarnos en  $\text{suma} = 5$ .

Cuando alcanzamos el nivel  $\text{suma} = 5$ , las posibilidades de subir y de bajar se vuelven simétricas. Podemos decir que, en esta fase, el sistema ha «olvidado» su configuración inicial. Si partimos de

cualquier configuración inicial por debajo de  $\text{suma} = 5$ , al principio habrá una tendencia mayor a subir que a bajar. Por otro lado, si partimos de una configuración situada *por encima* de  $\text{suma} = 5$ , la tendencia será descendente. Si partimos de  $\text{suma} = 5$ , o llegamos ahí a lo largo de la mano, lo más probable es seguir en ese nivel. Como veremos, este argumento es válido en todos los casos, pero se hace más poderoso cuanto mayor es el número de dados. Por esta razón nos referiremos a dicho nivel ( $\text{suma} = 5$  en el caso particular de diez dados) como nivel de *equilibrio*. De hecho, la naturaleza misma de este nivel le lleva al equilibrio, con *pesos* iguales para las probabilidades de subir o bajar, pero mayor probabilidad de quedarse como antes. En las figuras, el nivel de equilibrio correspondiente se indica mediante una línea de puntos. Es un equilibrio también en el sentido de que el sistema tiende a recuperarse de cualquier desviación de la línea, por arriba o por abajo. Podemos pensar en una «fuerza» imaginaria que devuelve el sistema a su nivel de equilibrio. Cuanto más nos apartemos de la línea de equilibrio, más intensa será la «fuerza» restauradora del mismo.

Las dos características antes descritas (la tendencia inicial a alcanzar un nivel de equilibrio y, una vez alcanzado éste, la tendencia a mantenerse en él) son las semillas de la segunda ley. En sentido figurado, podemos imaginar una suerte de fuerza fantasmal que atrae cualquier configuración específica hacia la línea de equilibrio. Una vez allí, cualquier desviación de la línea de equilibrio es «forzada» a regresar<sup>71</sup>. Dicho de otra manera, podemos concebir la

línea de equilibrio como un *atractor*, siempre tirando de la «*suma*» hacia él.

Por eso es muy poco probable que observemos grandes desviaciones de la línea de equilibrio. De ahí que sólo muy raramente hayamos presenciado una reversión a la configuración original, o que se alcance el valor máximo  $suma = 1$ . (Es fácil calcular que una visita a estos extremos tiene una probabilidad de  $1/2^{10}$ , que viene a ser un paso de cada 1000).

Como en el caso de cuatro dados, podríamos haber listado todas las configuraciones específicas posibles de los diez dados. En la tabla de abajo sólo hemos listado unas pocas configuraciones correspondientes a cada estado inespecífico.

Suceso inespecífico	Ejemplos de sucesos específicos	Número de sucesos específicos comprendidos en el suceso inespecífico
0	0000000000	1
1	0000000001,0000000010,...	10
2	0000000001,0000000010,...	45
3	0000000001,0000000010,...	120
4	0000000001,0000000010,...	210
5	0000000001,0000000010,...	252
...	...	...
10	1111111111	1

Hemos agrupado las  $2^{10} = 1024$  configuraciones *específicas* en 11 grupos; cada grupo es una configuración *inespecífica* (o estado, o suceso, inespecífico). Inespecífico-1 (esto es, todas las configuraciones que contienen un solo «1») tiene diez

configuraciones específicas, mientras que inespecífico-5 tiene 252 configuraciones específicas.

Aunque el aspecto de juego de apuestas de este experimento no es lo que más debe interesarnos, puede que el lector haya tomado nota de que si apuesta por  $\text{suma} = 0$  y yo lo hago por  $\text{suma} = 5$ , es seguro que ganará en el paso cero, mientras que en el primer paso ganará con probabilidad  $1/2$ , y a partir de ahí su probabilidad de ganar declina rápidamente. Por otro lado, mi probabilidad de ganar en los primeros pasos es nula, pero una vez alcanzado el nivel  $\text{suma} = 5$ , mis posibilidades de ganar son 252:1.

Volvamos a examinar la evolución de los dos casos siguientes antes de poner plenamente de manifiesto el comportamiento característico de la entropía. También cambiaremos nuestra nomenclatura. En vez de hablar del nivel  $\text{suma} = k$ , diremos simplemente inespecífico- $k$ . En realidad, la  $\text{suma}$  no es lo importante. Lo que importa es cuántos unos, o puntos, hay en cada configuración inespecífica, o suceso inespecífico.

### **§. Cien dados $N = 100$ .**

En la figura 4.5 se muestran dos manos de 1000 pasos, en cada uno de los cuales se lanzaron cien dados. Evidentemente, cuanto mayor es el número de dados más pasos se requieren para ir de 0 al nivel de equilibrio, que en este caso es 50. ¿Cuánto tardaremos en alcanzar el nivel de equilibrio? Si somos inmensamente afortunados y a cada paso nos toca cambiar un «0» por un «1», entonces necesitaremos un mínimo de 50 pasos para llegar a  $50^{72}$ . Pero no

siempre nos tocará lanzar un dado con «0», y cuando así sea, la probabilidad de convertirlo en «1» es sólo  $1/2$ , de manera que, en la práctica, el ascenso hacia el nivel de equilibrio será más lento. Lo normal es que se necesiten de 200 a 400 pasos. Como se aprecia en la figura, la ascensión es bastante constante, con algunos descansos al mismo nivel y pequeños descensos ocasionales, para luego seguir subiendo.

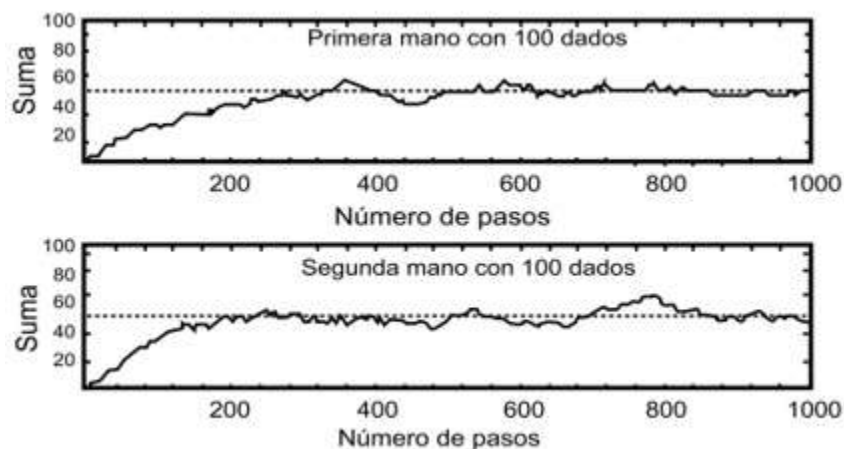
Cuando hayamos accedido al nivel 50, nos quedaremos en él o en su vecindad la mayor parte del tiempo. Ocasionalmente nos desviaremos bastante del nivel de equilibrio. En las manos representadas nunca se volvió a visitar el nivel inicial 0, pero esto no implica que tal cosa sea *imposible*. La probabilidad de que ocurra es  $1/2^{100}$ , o un paso de cada  $10^{30}$ . (Éste es un número enorme, aunque no tanto como para no poder escribirlo explícitamente: 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000. Pero es muy pequeño en comparación con los números que nos esperan, unos números que nunca podríamos escribir explícitamente). En otras palabras, las posibilidades de visitar el nivel 0 (o 100, el máximo posible) no llegan a uno de cada quintillón de pasos. Este experimento no debe intentarse con dados reales, pues sería insufriblemente largo, arduo y tedioso. Es más fácil simularlo con un ordenador.

### **§. Mil dados $N = 1000$ .**

Los resultados de este caso se parecen mucho a los anteriores, pero, a la escala de la figura 4.6, la curva es menos sinuosa. Para alcanzar el nivel de equilibrio necesitamos de 3.000 a 4.000 pasos.

Una vez allí, las desviaciones apenas se apartan de la línea de equilibrio. Las desviaciones mayores son raras (pueden verse como picos y muescas a lo largo de la línea de equilibrio) y, por supuesto, las desviaciones lo bastante importantes para alcanzar el nivel cero no se observan «nunca». No es que sea un suceso imposible, pero sólo se daría a una tasa de uno de cada  $10^{300}$  pasos (un uno seguido de trescientos ceros). Aunque ejecutemos el programa de ordenador durante mucho tiempo, lo más probable es que no llegemos a observarlo.

Recordemos nuestros cálculos de la probabilidad de subir, de bajar o de quedarse en el mismo nivel. Aunque los cálculos son los mismos, es instructivo hacerse una idea de cómo cambian las tendencias con el número de dados.



*Figura 4.5*

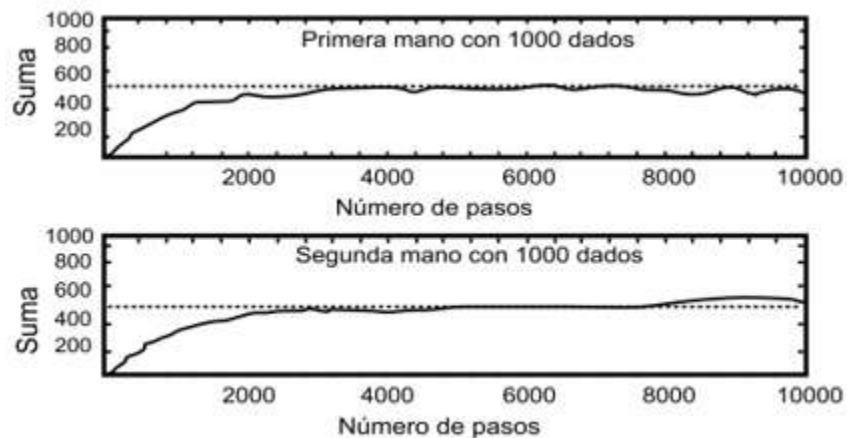
En el primer paso tenemos la misma probabilidad de subir que de quedarnos en el nivel cero. Si subimos al nivel uno, entonces hay cuatro posibilidades para el segundo paso:



- 1) Seleccionar al azar un «1» con probabilidad  $1/1000$  y quedarse como antes con probabilidad  $1/2$ .
- 2) Seleccionar al azar un «1» con probabilidad  $1/1000$  y bajar con probabilidad  $1/2$ .
- 3) Seleccionar al azar un «0» con probabilidad  $999/1000$  y subir con probabilidad  $1/2$ .
- 4) Seleccionar al azar un «0» con probabilidad  $999/1000$  y quedarse como antes con probabilidad  $1/2$ .

Así pues, las probabilidades de las tres posibilidades netas para el siguiente paso son:

- 1)  $1/1000$  veces  $1/2$  +  $999/1000$  veces  $1/2$  =  $1/2$  de quedarse en el mismo nivel
- 2)  $999/1000$  veces  $1/2$  =  $999/2000$  de subir
- 3)  $1/1000$  veces  $1/2$  =  $1/2000$  de bajar.



*Figura 4.6*

Vemos que la probabilidad de quedarse en el mismo nivel es la más alta (probabilidad:  $1/2$ ), aunque es casi igual que la probabilidad de subir ( $999/2000$ ), mientras que la probabilidad de bajar es muy pequeña ( $1/2000$ ).

Es un comportamiento muy notable, y debemos examinar estas cifras detenidamente. Compárese este caso con el de  $N = 10$ , y piénsese en lo que ocurrirá si  $N$  aumenta a  $10^4$ ,  $10^5$  y más allá. Comprender este juego es crucial para entender el comportamiento de la entropía.

Podemos repetir los mismos cálculos para los pasos tercero, cuarto, etcétera. Cuantos más ceros haya en las configuraciones, mayor será la probabilidad de subir y menor la de bajar. La «fuerza» de este argumento se debilita a medida que la *suma* se acerca al nivel  $N/2 = 500$ . Esto se refleja en la forma general de las curvas de la figura 4.6. La pendiente inicial de la curva es marcada, y luego se hace cada vez más horizontal a medida que nos acercamos a la línea de equilibrio. Una vez alcanzado ese nivel, tenemos una probabilidad mayor de quedarnos en él, e iguales probabilidades de subir y de bajar. Como en los casos anteriores, siempre que el sistema se desvíe de la línea de equilibrio, mostrará una tendencia a regresar a esa línea, como si una «fuerza» invisible tirara de la curva hacia la línea de equilibrio.

### **§. Diez mil dados $N = 10^4$ y más allá.**

La figura 4.7 muestra una mano con  $N = 10^4$ . No hay necesidad de representar más manos, ya que todas las gráficas son casi

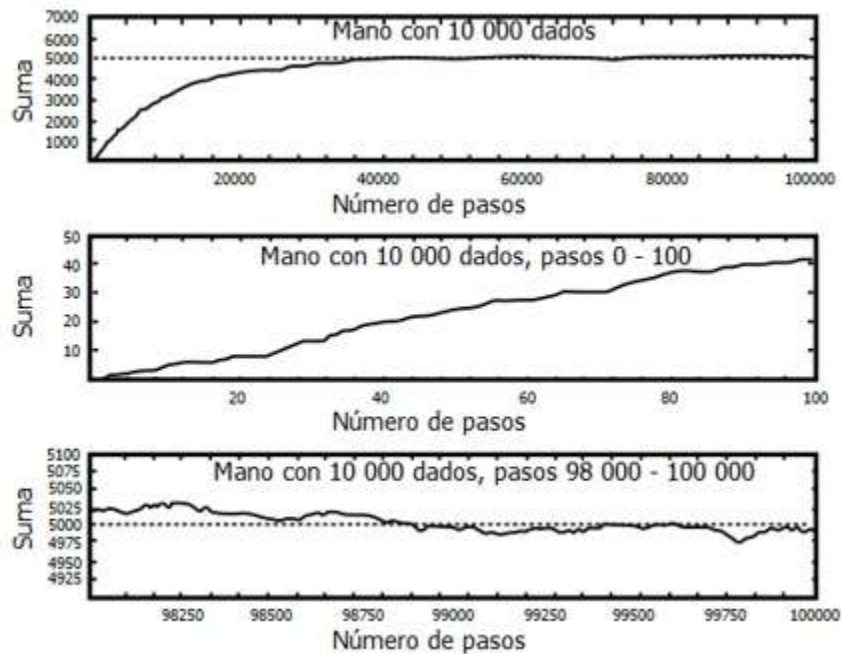
idénticas. Como podemos ver, la curva es muy lisa a esta escala; incluso las pequeñas irregularidades que observábamos en el caso anterior han desaparecido. Esto no significa que no haya fluctuaciones, sino que, a la escala de esta gráfica, no se aprecian. Podemos visualizarlas si amplificamos la curva en un intervalo corto de pasos, tal como hemos hecho en los dos paneles de abajo.

Como puede verse, cuando alcanzamos la línea de equilibrio (lo que ocurre tras un número bastante grande de pasos), nos quedamos en ella o su vecindad casi permanentemente. La curva de los resultados de nuestra simulación y la línea de equilibrio se funden. No vemos fluctuaciones llamativas, y mucho menos que se visite la configuración inicial. Pero la probabilidad de dicho suceso sigue siendo no nula. Es tan pequeña como  $(1/2)^{10\ 000}$ , lo que viene a ser un paso de cada  $10^{3000}$  (un uno seguido de tres mil ceros; que nadie intente escribirlo explícitamente). Esto significa que, en la práctica, «nunca» observaremos ninguna visita a la configuración inicial, y una vez alcancemos la línea de equilibrio nos quedaremos en su vecindad «siempre». He entrecomillado las palabras «nunca» y «siempre» para insistir en que éstos no son términos *absolutos*, y que *existe* una posibilidad remota de visitar la configuración inicial «de vez en cuando». Esta posibilidad ya era muy remota para  $N = 1000$ , y como veremos en el capítulo 7, cuando tratamos con sistemas reales manejamos números del orden de  $N = 10^{23}$ , que es muchos órdenes de magnitud mayor que  $N = 1000$ . Para un sistema así, la probabilidad de volver a visitar la configuración de partida es

tan minúscula que de hecho podemos emplear las palabras «nunca» y «siempre» sin comillas.

Para que el lector se haga una idea de lo que significa este número, supongamos que practicamos nuestro juego de dados a razón de mil pasos por segundo. O si el lector cree que puede ir aún más deprisa, tomemos un millón de pasos por segundo. En la actualidad se estima que la edad del universo es del orden de 15 000 millones de años. Así pues, si efectuáramos un millón de pasos por segundo, en ese tiempo completaríamos

$$10^6 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365 \times 15 \times 10^9 = 4 \times 10^{16} \text{ pasos}$$



*Figura 4.7*

Es decir, desde que existe el universo habríamos dado unos 10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 pasos, lo que significa que no habríamos visitado

la configuración inicial ni una vez. Para observar tal cosa tendríamos que jugar durante un tiempo mil millones de veces mayor que la edad del universo. Así, aunque hemos admitido que «nunca» no es un término absoluto, prácticamente lo es. Meditemos por un momento lo que significa realmente un «nunca» o un «siempre» en sentido absoluto.

En la vida diaria usamos estos términos sin pensar. Cuando uno le promete a su mujer que «siempre» le será fiel, no lo dice en sentido absoluto. Como mucho, está dando a entender que en los próximos cien años «nunca» la engañará con otra.

¿Y qué hay de la afirmación de que el sol «siempre» saldrá cada mañana? ¿Podemos estar seguros de que será así «siempre» en sentido absoluto? Todo lo que sabemos es que en los últimos millones de años ha venido ocurriendo así, y podemos predecir (o, mejor, adivinar) que el sol seguirá saliendo por la mañana en los próximos millones, o miles de millones, de años. Ahora bien, ¿podemos decir «siempre» en sentido absoluto? ¡Desde luego que no! ¿Y qué podemos decir de las leyes de la naturaleza? ¿Se puede afirmar que la ley de la gravedad o la velocidad de la luz permanecerán «siempre» invariantes? Tampoco podemos asegurarlo<sup>73</sup>. Todo lo que podemos decir es que es probable que así sea durante los próximos 15.000 millones de años.

De ningún aspecto del mundo físico se puede afirmar que «siempre» será así, o que «nunca» dejará de serlo, en sentido absoluto. Puede que estos términos puedan aplicarse en el mundo platónico de las *ideas*. En ese mundo sí podemos hacer afirmaciones del estilo de «la

razón entre la longitud de la circunferencia y el radio de un círculo nunca se desviará de  $2\pi$ .

Hemos entrecomillado los términos «nunca» y «siempre» para significar que no tienen un sentido absoluto. También hemos visto que en el mundo físico *nunca* podemos estar seguros de poder emplear las palabras «nunca» y «siempre» en sentido absoluto (el primer «nunca» en la frase anterior es más absoluto que el segundo). Pero hemos visto que la afirmación de permanecer «siempre» en la línea de equilibrio o su vecindad, y no regresar «nunca» al estado inicial, puede hacerse con toda confianza. En el contexto de la segunda ley, podemos afirmar que, cuando decimos «nunca», es el «más nunca de los nuncas» que podamos imaginar, y que cuando decimos «siempre» en el equilibrio, es el «más siempre de los siempres».

Así pues, en adelante mantendremos las comillas de **«nunca»** y **«siempre»** para tener presente que no son términos absolutos, pero también los pondremos en negrita para remarcar que, en el contexto de la segunda ley, están todo lo cerca del sentido absoluto que puede estar un enunciado sobre el mundo físico.

Espero que el lector me haya seguido hasta aquí. Si no, debería repasar los razonamientos para los casos con un número pequeño de dados. En todos los juegos de este capítulo debería hacerse tres preguntas:

- 1) *¿Qué* es lo que cambia a cada paso? Pruebe a darle un nombre que refleje lo registrado en cualquiera de esos juegos.

**2)** *¿Cómo* tiene lugar el cambio? Ésta es la pregunta más fácil. Y lo más importante.

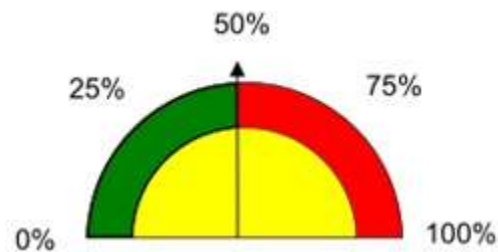
**3)** *¿Por qué* el cambio siempre progresa hacia la línea de equilibrio, y por qué el sistema «**nunca**» vuelve a la configuración inicial y se queda «**siempre**» en la vecindad de la línea de equilibrio?

Si el lector no tiene dificultades con estas preguntas y considera que puede darles una respuesta razonada, ya está a medio camino de entender la segunda ley de la termodinámica.

Todavía nos queda una pregunta más importante por responder. ¿Qué tienen que ver todos estos juegos de dados con un experimento físico real, y hasta qué punto lo que hemos visto tiene relevancia para la segunda ley? Volveremos a esta cuestión en el capítulo 7, pero antes nos tomaremos un respiro.

Supongo que el lector ha tenido que esforzarse un tanto para seguirme hasta aquí. Es momento de relajarse y experimentar más pasivamente la segunda ley (o, mejor, algunas analogías de la segunda ley) con nuestros sentidos. Lo que haremos en el capítulo siguiente es simplemente imaginar distintas experiencias que, en principio, podríamos percibir con nuestros sentidos. Esto debería darnos una idea de la variedad de procesos posibles con las mismas reglas de juego. También nos preparará para apreciar mejor la inmensidad de procesos gobernados por la segunda ley. No hará falta hacer ningún cálculo; sólo meditar sobre por qué los procesos que estamos experimentando ocurren como ocurren. Tras este

receso retomaremos un análisis más profundo, y traduciremos todo lo que hemos aprendido con el lenguaje de los dados al lenguaje de los sistemas reales constituidos por átomos y moléculas. En el capítulo 6 intentaremos comprender la segunda ley dentro del mundo de los dados, y en el capítulo 7 traduciremos este conocimiento al lenguaje de los experimentos reales.



*Fin del Capítulo 4*



## Capítulo 5

### Cómo experimentar la segunda ley con los cinco sentidos

#### **Contenido:**

§. *Con la Visión*

§. *Con el Olfato*

§. *Con el Gusto.*

§. *Con el Oído.*

§. *Con el Tacto.*

En este capítulo no aprenderemos nada nuevo de los juegos de dados, ni adquiriremos ninguna nueva intuición de la naturaleza de la segunda ley de la termodinámica. En vez de eso, describiremos unos cuantos experimentos hipotéticos. Tras todos esos procesos subyace un principio básico que, como veremos, es relevante para la segunda ley. También haremos uso de diversos sentidos para percibir la segunda ley. Todos los procesos que veremos son manifestaciones diferentes del mismo principio y representan el inmenso número de manifestaciones posibles de la segunda ley. Para no aburrir al lector con repeticiones, modificaremos un poco las reglas del juego. Esto lo hacemos para mostrar que las reglas no tienen por qué ser rígidas. Por ejemplo, no tenemos por qué lanzar un solo dado a cada paso, sino que podemos lanzar dos, tres, cuatro o todos a la vez. También podemos lanzar los dados por orden y no al azar, o seleccionar un dado al azar pero hacerlo cambiar de manera determinista (de «0» a «1» o de «1» a «0», por ejemplo). Lo que

importa es que cada dado tenga las mismas oportunidades de cambiar, y que haya un elemento de aleatoriedad en el proceso. Volveremos a analizar en profundidad el mecanismo del cambio en el capítulo 7, pero ahora disfrutemos de algunos experimentos hipotéticos. Están pensados para ser entretenidos y enriquecer nuestra experiencia y familiaridad con la segunda ley. No hace falta esforzarse en entender los procesos descritos. Volveremos a ocuparnos de la *comprensión* en el capítulo siguiente, y de la *relevancia* de estos modelos para el mundo real en el capítulo 7. Por ahora, el lector puede limitarse a leer y a gozar de la «experiencia».

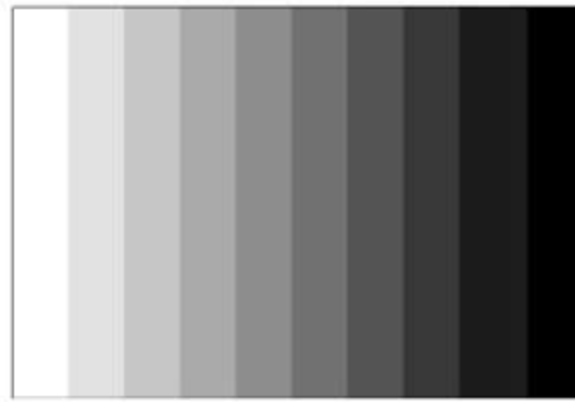
### **§. Con la Visión.**

Comenzaremos con el caso más simple. No cambian las reglas dadas en el capítulo 4, ni el número de resultados posibles, ni sus probabilidades. La única diferencia es que, en vez de contar el número de unos (o sumar los puntos de todos los dados), vamos a ver cómo cambia el *matiz* de un sistema con el tiempo, o con el número de pasos.

Supongamos que tenemos  $N$  dados, cada uno con tres caras de color blanco y tres de color negro. También podríamos pensar en monedas con una cara blanca y otra negra, pero continuaremos recurriendo a la metáfora de los dados.

Una configuración específica de los  $N$  dados será una especificación del color de la cara superior de cada dado. En este experimento concreto no hay «suma» de resultados contabilizables. Aquí los resultados son colores y no números<sup>74</sup>. En el caso de los dados

numerados, hemos definido una configuración inespecífica como el conjunto de todas las configuraciones específicas con la misma suma o, equivalentemente, el mismo número de unos. Con dados coloreados, para proceder de la configuración *específica* a la *inespecífica* podemos imaginar que cada dado es un píxel de una imagen digital. Hay píxeles de dos colores, y tan pequeños que sólo vemos un color «promedio».



*Figura 5.1*

En la figura 5.1 se muestran unos pocos sucesos inespecíficos. En el borde izquierdo tenemos un 100% de blanco, y vamos añadiendo un 10% de gris a cada franja sucesiva, hasta llegar a un 100% de negro en el borde derecho.

En todos los ejemplos de este capítulo emplearemos  $N = 100$  dados. Partiremos de una configuración inicial de todo blanco y modificaremos los colores de los dados según las mismas reglas de antes: se selecciona un dado al azar, se lanza y se vuelve a colocar en su sitio. Admito que son reglas muy artificiales, pero en el capítulo 7 veremos que, en principio, en un sistema físico real

puede conseguirse una evolución cromática similar cuya «fuerza impulsora» es la segunda ley de la termodinámica.

¿Qué observaremos? Obviamente, aquí no podemos «representar» sumas de puntos. Podríamos haber asignado un «0» al blanco y un «1» al negro, y representar la evolución del número de puntos con el tiempo o el número de pasos. Pero en este experimento sólo queremos *verlo* que pasa.

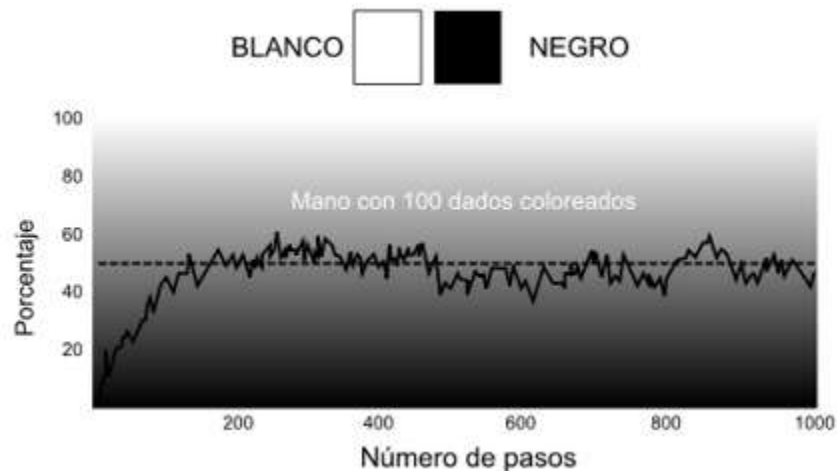


Figura 5.2

La figura 5.2 muestra la evolución del color «promedio» a medida que transcurre el juego. Si partimos de un blanco cien por cien, la ascensión se mide como el *porcentaje* de negro añadido.

Al principio no notaremos nada. Por lo que hemos visto en el capítulo 4, sabemos que debe haber una pronunciada tendencia «ascendente» hacia el negro. Pero el efecto de unos pocos píxeles azules será imperceptible a nuestros ojos. A medida que avance el juego comenzaremos a notar que el sistema vira lentamente del

blanco al gris. Cuando se alcance cierta tonalidad de verde (un gris compuesto de un 50% de negro y un 50% de blanco), el color del sistema permanecerá invariable. Difícilmente observaremos cambios ulteriores. Quizás alguna fluctuación en torno a la «línea verde» de equilibrio, pero casi nunca «visitaremos» el blanco puro o el negro puro. Nótese que, incluso para un  $N$  tan pequeño como 100, todas las fluctuaciones cromáticas se mantienen en la gama del gris. Para valores de  $N$  muy grandes no observaremos fluctuaciones, y aunque siga habiendo cambios, el color promedio permanecerá casi constante, con una mezcla a partes iguales de negro y blanco.

En el capítulo 7 veremos que este experimento puede llevarse a cabo con partículas reales (dos isómeros de distinto color). Por el momento, quedémonos con que, partamos de la configuración inicial que partamos, la aplicación de nuestras reglas nos llevará al mismo color final (de equilibrio).

### **§. Con el Olfato.**

Ahora describiremos otra pequeña variación sobre el tema de la segunda ley. Como en el ejemplo anterior, tenemos dados con caras de dos tipos y la misma probabilidad. Supondremos que cuando un dado muestra una cara del tipo  $A$ , emite cierto olor, y cuando muestra una cara del tipo  $B$ , emite otro. Si tenemos cien dados,  $N = 100$ , con una configuración arbitraria de olores  $A$  y  $B$ , percibiremos un olor promedio de tipo  $A + B$ , en proporción a la razón entre caras  $A$  y caras  $B$  de esa configuración. Nótese que el sentido del olfato es

resultado de la adsorción de moléculas específicas por receptores específicos<sup>75</sup>.

Como veremos en el capítulo 7, se puede llevar a cabo un experimento análogo con moléculas reales. En principio, podríamos seguir la evolución del olor de un sistema como nuestro olfato, conforme a la segunda ley de la termodinámica. Pero aquí nos limitaremos a examinar un experimento de mentira con dados que emiten dos moléculas de distinto olor.

Una vez más partimos de una configuración de todo  $A$  y comenzamos a lanzar un dado cada vez como en el capítulo 4. Pero ahora introducimos una pequeña variación de las reglas: tomaremos dos dados al azar, los lanzaremos y oleremos la configuración resultante. El lanzamiento de  $A$  o  $B$ , con probabilidades  $1/2$  y  $1/2$ . Por ejemplo, supongamos que las caras  $A$  emiten moléculas con olor de hojas verdes, y las caras  $B$  emiten moléculas que huelen a rosas rojas (figura 5.3).

Inicialmente percibimos el olor de tipo  $A$  puro. Después de unos cuantos pasos seguimos oliendo lo mismo, aunque sabemos que es altamente probable que el sistema «ascienda» hacia una mezcla de  $A$  y  $B$ . Pero un porcentaje tan pequeño de  $B$  no es perceptible ni por los profesionales de la perfumería o la cosmética. La figura 5.3 muestra la evolución del olor del sistema con 100 dados.

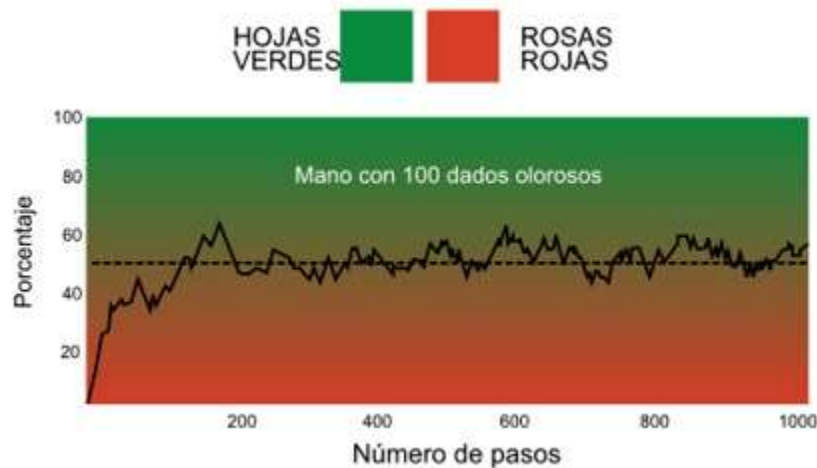


Figura 5.3

Si partimos del olor a hojas verdes, al cabo de muchos pasos comenzaremos a notar la presencia del olor  $B$ , todavía muy tenue en comparación con el olor  $A$  dominante. Más adelante llegaremos a un punto en el que la razón entre los olores  $A$  y  $B$  será 1:1, en concordancia con la «línea de equilibrio» de las configuraciones de dados. Una vez que tengamos esa mezcla de olores concreta, ya no notaremos más cambios. Sabemos que hay fluctuaciones, pero apenas se apartarán del olor de equilibrio. Si aumentamos el número de dados alcanzaremos un olor de equilibrio prácticamente constante, sin desviaciones apreciables.

Como he señalado antes, aunque éste es un proceso muy hipotético, lo cierto es que se puede diseñar un experimento *real* y seguir la evolución del olor general de una mezcla de moléculas con distintos olores. Discutiremos esta clase de experimento en el capítulo 7. De hecho, el experimento real es mucho más fácil de realizar que el nuestro con dados hipotéticos.

### **§. Con el Gusto.**

Como hemos hecho con los olores, podemos concebir un experimento donde usemos el sentido del gusto. Aquí volveremos a cambiar las reglas. Como siempre, jugaremos con cien dados, cada uno de los cuales tendrá tres caras de sabor *dulce* (a almíbar, por ejemplo) y otras tres caras de sabor *ácido* (a zumo de limón, por ejemplo). Procedemos a probar el sabor «promedio» del sistema<sup>76</sup>. El sabor que experimentamos es inespecífico. No distinguimos entre diferentes configuraciones específicas de los dados; nuestro sentido del gusto sólo puede percibir la razón entre dulce y ácido.

Partimos de una configuración de sabor ácido al cien por cien (representada en amarillo en la figura 5.4). En vez de elegir el dado que vamos a lanzar al azar, los vamos lanzando por orden, de izquierda a derecha. Tomamos un dado, lo lanzamos, probamos la configuración resultante y luego pasamos al siguiente dado de la secuencia, y así sucesivamente. Si tenemos cien dados, comenzaremos por el número uno y acabaremos por el número cien. Luego repetiremos la secuencia de lanzamientos diez veces, hasta completar 1000 pasos. La figura 5.4 muestra la evolución del sabor en este juego.

A pesar del cambio de reglas, la evolución del juego es a grandes rasgos la misma de antes. Partimos de un sabor puramente ácido, y al principio no notamos ningún cambio apreciable en el sabor general. A menos que uno sea un gourmet o tenga un sentido del gusto excepcional, no diferenciaremos entre un 100% de sabor ácido



y una mezcla de un 99% de ácido y un 1% de dulce. Pero como ya sabemos a partir de nuestro análisis del capítulo 4 (o de la propia experiencia con dados, o de un experimento real como el descrito en el capítulo 7), el sistema muestra una pronunciada tendencia a «ascender», en este caso hacia el sabor agridulce. Al cabo de un millar de pasos notaremos que el sabor es casi mitad ácido y mitad dulce, y una vez alcanzado este «nivel» no percibiremos más cambios de sabor. Por supuesto, el mecanismo para cambiar el gusto de cada dado es el mismo que en los experimentos anteriores. Pero los cambios son tales que el sabor general, como la suma total de nuestros dados del capítulo 4, no cambia de manera apreciable. Notaremos el mismo sabor agridulce «siempre». Aunque sabemos que hay fluctuaciones, nuestra lengua apenas las percibe. El sistema ha alcanzado la línea de equilibrio agridulce, sin visitar «nunca» ni el ácido inicial ni el dulce puro.

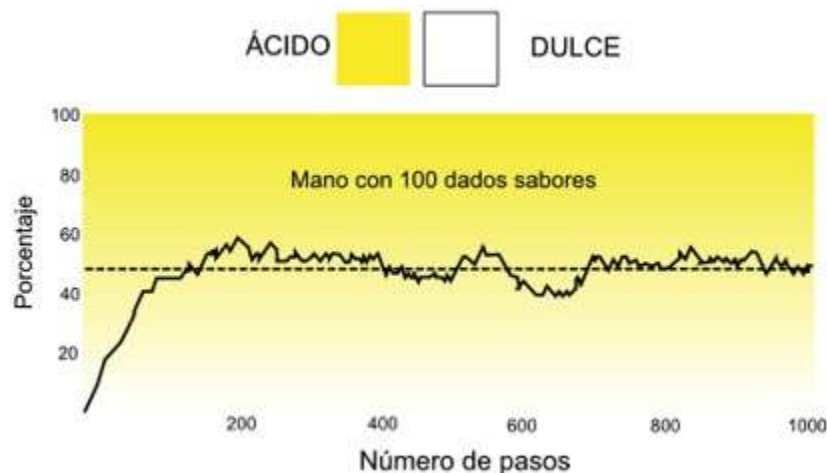


Figura 5.4

### ***§. Con el Oído.***

En este experimento describiremos un proceso hipotético que nos permitirá experimentar la segunda ley a través del oído. De nuevo cambiamos un poco las reglas: en vez de dos resultados posibles, ahora tendremos tres. Recurriendo otra vez al lenguaje de los dados, supondremos que cada dado tiene dos caras marcadas con la letra *A*, otras dos con la letra *B*, y otras dos con la letra *C* (figura 5.5). También supondremos que cuando sale *A* se emite un tono. Podemos imaginar que las caras de los dados son membranas que vibran a distintas frecuencias. Nuestro oído percibe las ondas sonoras emitidas como tonos diferentes<sup>77</sup>. El sonido no tiene por qué provenir del dado mismo; podemos pensar que cada resultado es una señal para que un diapasón genere el tono *A* si sale *A*, otro diapasón genere el tono *B* si sale *B*, y un tercer diapasón genere el tono *C* si sale *C*.

Una vez más, partimos de una configuración inicial uniforme, como todo *A*, y procedemos con las mismas reglas de antes, salvo que tenemos tres «resultados» posibles en vez de dos. Se elige un dado al azar y se lanza para obtener *A*, *B* o *C*.

Haciendo casi el mismo análisis que en el capítulo 4, podemos seguir la evolución del sistema no a partir de «suma» de puntos, sino en términos del sonido general que oímos.

Al principio oiremos un tono *A* puro. Sabemos que el sistema tiende a «ascender» no a una nueva «suma», sino a una mezcla de tonos, todavía dominada por *A*. Si jugamos con  $N = 100$  dados de esta clase, al principio apenas notaremos algo. Si uno tiene buen oído

musical, al cabo de un rato comenzará a oír una mezcla de tonos (un acorde) que resultará más agradable de escuchar si A, B y C son notas armoniosas.



*Figura 5.5*

Con el tiempo se alcanzará un tono de equilibrio. Escucharemos un acorde armonioso formado por los tres tonos *A*, *B* y *C*, todos con el mismo peso. Una vez alcanzado ese nivel, el sistema se mantendrá allí «siempre». Habrá algunas fluctuaciones en los pesos relativos de los tres tonos, pero apenas serán audibles ni por los oídos más entrenados musicalmente.

### **§. Con el Tacto.**

En este último ejemplo describiremos una versión extremadamente hipotética de un experimento real que tiene que ver con la temperatura.

Percibimos la temperatura de un cuerpo frío o caliente a través de nuestra piel<sup>78</sup>. Es una sensación cuyo origen molecular se resistió durante largo tiempo a la comprensión. Hoy día la teoría molecular del calor está bien establecida, pero al lego todavía le cuesta aceptar

que la temperatura no es más que la velocidad «media» del movimiento (traslación, rotación y vibración) de los átomos y moléculas que constituyen la materia. *Sentimos* que un bloque de hierro está frío o caliente, pero no *sentimos* el movimiento de los átomos de hierro. En la vida diaria contemplamos la *temperatura* y el *movimiento* como nociones muy diferentes correspondientes a fenómenos no relacionados entre sí. Una bola a gran velocidad puede estar muy *fría*, y una bola inmóvil puede estar muy *caliente*. Pero uno de los grandes logros de la teoría molecular de la materia es la identificación de la temperatura (la sensación de caliente o frío) con la velocidad media de los átomos y moléculas. Esta idea no resultó fácil de aceptar antes del asentamiento de la teoría atómica de la materia. Pero en la actualidad esta teoría está bien establecida y cuenta con una aceptación plena.

Este experimento ha sido ideado para hacer uso de nuestro quinto y último (reconocido) sentido. Los dados de este juego tienen tres caras calientes (digamos a 100 °C) y tres caras frías (digamos 0 °C)<sup>79</sup>. Cada cara tiene una temperatura fija<sup>80</sup>. También suponemos que las caras están perfectamente aisladas entre sí (de otro modo la *auténtica* segunda ley de la termodinámica haría que las moléculas que constituyen los propios dados equilibraran la temperatura de las caras inicialmente frías y calientes, dando al traste con nuestro experimento). En la figura 5.6, las caras frías se representan en azul y las calientes en rojo, como suele indicarse en los grifos.

Jugamos otra vez con cien dados, todos con las caras frías arriba, de manera que si tocamos el conjunto notaremos una sensación

fría. Se juega como en el capítulo 4, pero con una variante. Aquí también seleccionamos un dado *al azar* cada vez, pero el cambio de cara no se consigue lanzándolo, sino de manera determinista. Si es frío, se cambia a caliente, y si es caliente, se cambia a frío.

Si los dados son tan pequeños que pueden verse como «píxeles» a distinta temperatura, cuando toquemos el conjunto de cien dados sólo sentiremos la temperatura *promedio* del sistema. No podemos discriminar entre configuraciones *específicas* (si este o aquel dado está frío o caliente), sólo se percibe la configuración inespecífica, o la temperatura general (es decir, sólo la razón de frío a caliente). A medida que progrese el juego, notaremos un incremento gradual de la temperatura.

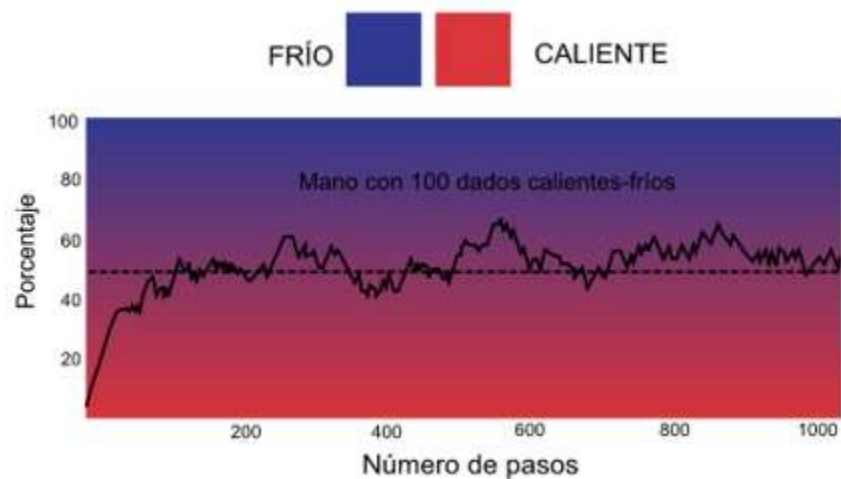
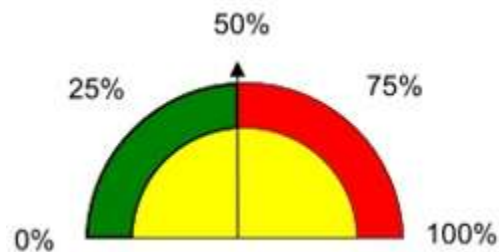


Figura 5.6

Al cabo de un tiempo se alcanzará una temperatura de equilibrio. A partir de ese momento, la temperatura del conjunto dejará de aumentar, manteniéndose casi constante a 50 °C, y no volveremos a notar ningún cambio (figura 5.6).

Con este último ejemplo hemos terminado nuestro ejercicio de percepción sensorial de la segunda ley en un sistema de dados. En el próximo capítulo desvelaremos el principio subyacente tras todos estos experimentos, y en el capítulo 7 analizaremos su relevancia para el mundo real de la segunda ley.



*Fin del capítulo 5*

## Capítulo 6

### Por último, apliquemos el sentido común

Tras haber experimentado diversas manifestaciones de la segunda ley mediante dados, es hora de que nos detengamos a analizar y racionalizar lo que hemos aprendido. Recordemos que hemos *observado* diferentes fenómenos con diferentes mecanismos. En el capítulo siguiente veremos que algunos de esos modelos (color, sabor y olor) tienen contrapartidas experimentales reales. Otros modelos no pueden llevarse a la práctica con partículas (las partículas no emiten ondas sonoras, y la temperatura que captamos con la punta de los dedos tiene que ver con la distribución de velocidades moleculares; no se puede asignar una temperatura propia a cada molécula). Por supuesto, hay muchos otros ejemplos. La cuestión central que nos interesa en este capítulo es: ¿cuáles son los rasgos comunes a todos los fenómenos observados en los experimentos descritos en los capítulos 4 y 5? Los fenómenos que examinaremos en este capítulo son esencialmente los que ya hemos visto, sólo que con valores de  $N$  muy grandes, mucho más que el mayor de los considerados hasta ahora.

Las tres preguntas que tenemos que hacernos son:

- 1)** ¿Qué es lo que, en todos los procesos observados, hemos visto evolucionar hacia algo que hemos llamado «línea de equilibrio», para luego instalarse allí sin cambios apreciables?

- 2)** ¿Cómo hemos conseguido dicha evolución? ¿Cuál es el aspecto esencial del mecanismo que nos lleva del estado inicial al estado final?
- 3)** ¿Por qué el cambio tiene lugar en un solo sentido, y deja de observarse una vez alcanzada la línea de equilibrio?

Discutiremos estas cuestiones para los experimentos prototípicos simples con dados de dos resultados posibles. Nuestras conclusiones serán aplicables a los otros tipos de dados que hemos manejado en los capítulos precedentes, así como los experimentos reales que veremos en el próximo capítulo.

Recordemos que nuestro sistema consiste en  $N$  dados. El resultado del lanzamiento de cualquier dado es «0» o «1», cada uno con probabilidad  $1/2$ . Hemos prescrito las reglas para variar la configuración de los dados. Hemos visto que las reglas pueden cambiarse. Lo importante es que haya al menos un elemento de azar: o seleccionamos un dado al azar y lo cambiamos de manera determinista, o seleccionamos cada dado siguiendo un orden predeterminado y lo lanzamos para obtener un nuevo resultado al azar, o hacemos ambas cosas al azar.

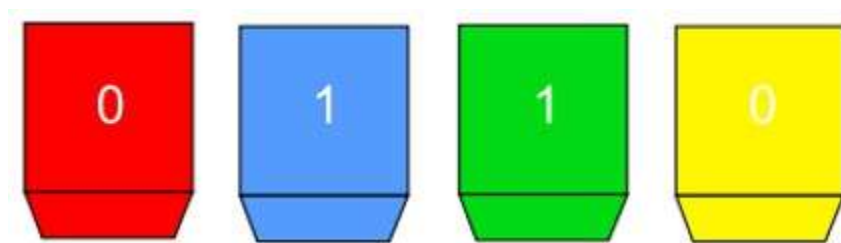
Hemos definido un suceso *específico* o configuración específica como la especificación de los resultados de cada dado individual. La configuración exacta de los cuatro dados de la figura 6.1 es: el primer dado (rojo) por la izquierda muestra un «0», el segundo dado (azul) muestra un «1», el tercero (verde) muestra un «1» y el último



(amarillo) muestra un «0». Esta especificación nos proporciona una descripción completa y detallada del sistema.

Hemos llamado suceso o estado inespecífico, o configuración inespecífica, a una descripción menos detallada del sistema. De un suceso inespecífico sólo se especifica el número de unos (o el de ceros) con independencia de qué dados portan un «1» y cuáles portan un «0». Así, una descripción inespecífica del sistema de la figura 6.1 es simplemente 2, o inespecífico-2.

Cuando pasamos de la configuración específica a la configuración inespecífica no tenemos en cuenta la *identidad* de cada dado (nos da igual que sea rojo o azul, o que sea el primero o el segundo de la fila). Decimos que, en esta descripción, los dados son indistinguibles. Aquí ignoramos *voluntariamente* la identidad de los dados, pero en el mundo real los átomos y moléculas son indistinguibles por su propia naturaleza, y ésta es una diferencia importante entre dados y átomos, cuya discusión abordaremos en el capítulo siguiente.



*Figura 6.1*

Hay dos características de la configuración inespecífica a las que debemos prestar especial atención. En primer lugar, para cualquier

descripción inespecífica del tipo «hay  $n$  unos en un sistema de  $N$  dados», el número de descripciones *específicas* correspondientes a la descripción inespecífica aumenta con  $N$ . A modo de ejemplo simple, considérese la descripción inespecífica «hay un solo uno  $\{n = 1\}$  en un sistema de  $N$  dados». Esta descripción inespecífica comprende exactamente  $N$  configuraciones específicas.

En segundo lugar, fijado  $N$ , el número de configuraciones específicas comprendidas por una misma configuración inespecífica crece a medida que  $n$  aumenta de 0 a  $N/2$  (si  $N$  es par hay un máximo, y si es impar hay dos). Ya hemos observado esta clase de dependencia en el capítulo 4. La figura 6.2 ofrece otro ejemplo para un sistema de  $N= 1000$  dados, donde  $n$  varía de cero a  $N$ .

Es importante tomar nota de estas dos tendencias. Ello requiere una contabilidad que puede ser tediosa para valores grandes de  $N$  y  $n$ , pero no hay ninguna dificultad inherente y no se requieren matemáticas sofisticadas; lo único que hay que hacer es contar.

Tras haber definido las configuraciones específica e inespecífica, podemos responder a la primera pregunta planteada al principio de esta sección: ¿qué es lo que cambia a cada paso en los juegos descritos en los capítulos 4 y 5, y es común a todos ellos?

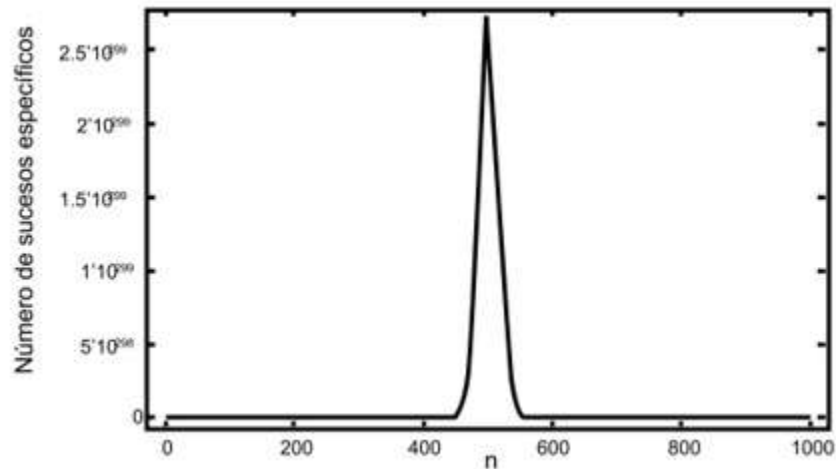


Figura 6.2

Está claro que aquello cuyo cambio hemos *observado* es diferente en cada experimento. En un caso vemos un cambio de color, de amarillo a verde, y en otros casos percibimos cambios de olor, sabor, temperatura, etcétera. Se trata de manifestaciones diferentes del mismo proceso subyacente. Lo que nos interesa ahora es lo que cambia en todos los experimentos que hemos examinado en los dos capítulos anteriores.

Volvamos al juego de «0» o «1» del capítulo 4. Allí registrábamos la suma de los resultados de cada dado. Obviamente, en los experimentos del capítulo 5 no podemos registrar ninguna «suma» de resultados. Pero, así como en el juego del capítulo 4 calculábamos la «suma» a partir del número de unos, podemos asignar un «1» y un «0» a los dos colores, los dos gustos o las dos temperaturas y contabilizar el número de unos en cada uno de los juegos propuestos en el capítulo 5. Esto puede valer, pero no es totalmente satisfactorio. Tenemos que encontrar un *nombre*

apropiado para referirnos a lo que tienen en común todos los experimentos, y darle un valor numérico. Este valor debe aumentar hasta alcanzar una línea de equilibrio. Llamemos provisionalmente *d-entropía* (d de dado), o simplemente *dentropía*, a esta magnitud. Por el momento, esto no es más que una denominación carente de significado.

La descripción anterior puede valer para los juegos de dados que hemos visto. Pero el lector podría plantear dos objeciones. En primer lugar, sabemos que la entropía (real) siempre aumenta. En los juegos con dados, la *dentropía* aumentará si partimos de una configuración de «todo ceros». Ahora bien, ¿y si partimos de una configuración de «todo unos»? En tal caso la *dentropía* disminuirá, lo cual contradice lo que sabemos de la entropía real. La segunda objeción podría ser ésta: ¿y si hay tres resultados posibles, digamos «0», «1» y «2», o incluso resultados no numéricos como tres sonidos *A*, *B* y *C*, o tres colores, o cuatro, o incluso una gama infinita de colores, velocidades o lo que sea? ¿Qué número deberíamos registrar?

A estas objeciones se puede responder que una *cosa* es lo que observamos o sentimos en cada juego concreto, y otra *cosa* es lo que registramos.

En nuestro juego de dados simple, hemos registrado el número de unos. Este número aumenta sólo si partimos de una configuración de todo ceros. De haber partido de una configuración de todo unos, la suma *descendería* hasta la línea de equilibrio. A continuación veremos que una transformación simple nos permite registrar

aquello que siempre aumenta hasta que el sistema alcanza la línea de equilibrio<sup>81</sup>. Para ello necesitaremos el símbolo del valor absoluto que hemos definido en el capítulo 2.

En vez del número de unos, denotado por  $n$ , podemos registrar el número  $|n - N/2|$ . Recordemos que  $N$  es el número de dados y  $n$  el número de «unos». Así pues, esta diferencia mide la desviación, o la «distancia», entre  $n$  y la mitad del número de dados. Tomamos el valor absoluto para que la distancia entre, por ejemplo,  $n = 4$  y  $N/2 = 5$  sea la misma que la distancia entre  $n = 6$  y  $N/2 = 5$ . Lo que importa es la *separación* del número  $N/2$ <sup>82</sup>, el cual, recordemos, marca la línea de equilibrio. Si partimos de una configuración de todo ceros, tenemos  $n = 0$ , de donde  $|n - N/2| = N/2$ . Si partimos de una configuración de todo unos, tenemos  $n = N$ , y de nuevo  $|n - N/2| = N/2$ . La distancia es la misma en ambos casos. Este número tenderá a variar de  $N/2$  a 0. Tenemos así una cantidad que casi siempre *decrece* a partir de cualquier configuración inicial<sup>83</sup>. Una vez que se alcanza el valor mínimo de  $|n - N/2| = 0$ , estamos en la línea de equilibrio. El lector puede comprobarlo para, digamos,  $N = 10$  y todos los valores posibles de  $n$ . Si no le gusta obtener cifras decrecientes, puede tomar sus valores negativos<sup>84</sup>,  $-|n - N/2|$ , con lo que tendrá un incremento constante de  $-N/2$  a cero. Si no le gustan los números negativos, puede tomar  $N/2 - |n - N/2|$ . Este número aumentará continuamente a partir de cualquier configuración inicial hasta un máximo de  $N/2$  en todos los casos<sup>85</sup>. Como puede verse, mediante una simple transformación podemos definir una nueva cantidad que «**siempre**» aumenta con el tiempo (o

el número de pasos). Pero esto no responde a la segunda objeción. Está bien para juegos con sólo dos resultados posibles, pero no puede aplicarse al caso más general de dados con tres o más resultados posibles. Así pues, tenemos que encontrar una cantidad común a todos los experimentos posibles del estilo de los descritos en los capítulos 4 y 5.

Ahora construiremos una cantidad que siempre aumentará y valdrá incluso para los casos más generales. Hay muchas posibilidades, pero nos quedaremos con la que más se acerca a la magnitud llamada entropía. Para ello necesitamos el concepto de información o, más exactamente, la medida matemática de la información.

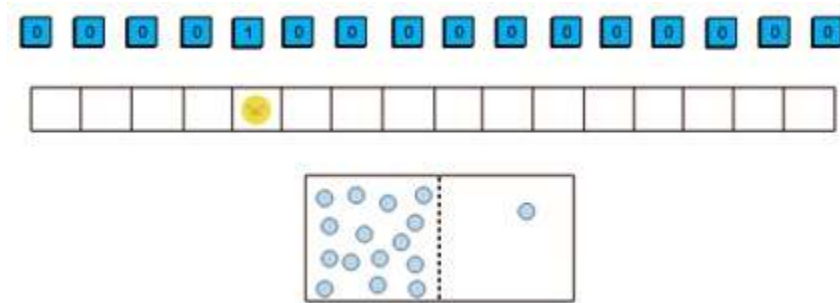
La magnitud elegida para describir la *cosa* que cambia es la «información perdida». La denotaremos por *IP* (por ahora, *IP* no es más que un acrónimo de «información perdida», pero en el próximo capítulo la identificaremos con el concepto de entropía).

Además de describir cuantitativamente lo que cambia en el proceso, esta magnitud tiene la ventaja de que se ajusta a lo que se entiende por información en la vida diaria, y nos proporciona un *número* que describe lo que cambia desde cualquier estado inicial hasta el estado final, y para cualquier juego en general. Es un número siempre positivo, que aumenta tanto en nuestros juegos de dados como en el mundo real. Y lo que es más importante, es la medida común a todos los juegos de dados, lo que antes hemos llamado provisionalmente «dentropía». También será idéntica a la magnitud común a todos los *sistemas físicos*, la entropía<sup>86</sup>.

La definición cualitativa es ésta: nos dan una configuración descrita de manera *inespecífica*, como «hay  $n$  unos en el sistema de  $N$  dados», de la que no tenemos una información *exacta*, y nuestra tarea consiste en hallar la configuración *específica* dada<sup>87</sup>.

Obviamente, a partir de la configuración inespecífica sin más no podemos inferir la configuración específica; necesitamos más *información*. Esta información que nos falta es lo que llamamos información perdida o  $IP$ <sup>88</sup> ¿Cómo la obtenemos? Planteando preguntas binarias. Podemos definir la información perdida como el número de preguntas binarias que tenemos que hacernos para adquirir dicha información, esto es, el conocimiento de la configuración específica.

En el capítulo 2 hemos visto que la información perdida se define de manera que sea independiente del procedimiento para adquirirla. En otras palabras, no importa la estrategia que adoptemos. La información perdida «está ahí», en el sistema. Pero si aplicamos la estrategia *más inteligente* podemos identificar la información perdida con el *número* medio de preguntas binarias requeridas. Así, para emplear el número de cuestiones binarias como medida de la cantidad de información perdida debemos adoptar la estrategia más inteligente, tal como se describe en el capítulo 2. Por supuesto, cuanto mayor sea la información perdida, mayor será el número de preguntas requeridas para recuperarla. Veamos unos cuantos ejemplos.



*Figura 6.3*

Dada la información de que «hay un solo uno en un sistema de 16 dados» (figura 6.3), ¿cuántas preguntas tendremos que hacer para conocer la configuración exacta o específica?

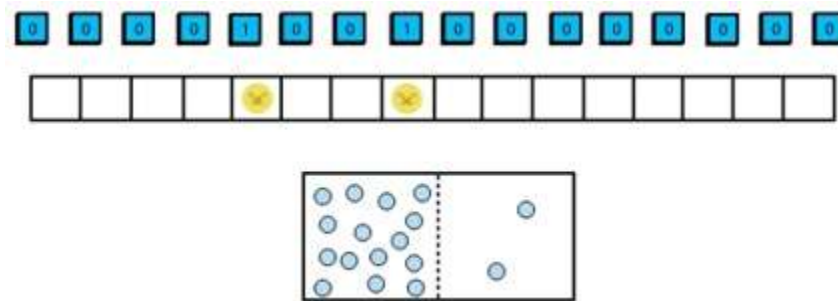
Es el mismo problema que el de hallar la moneda escondida en una de 16 cajas igualmente probables (véase la figura 2.9). Para resolver este problema aplicábamos la estrategia de eliminar la mitad de las posibilidades a cada paso (véase el capítulo 2). Comenzamos preguntando si la moneda está en la mitad superior. Si la respuesta es afirmativa, preguntamos si está en la mitad superior derecha. Si es que no, simplemente nos quedamos con la otra mitad. Con esta estrategia, encontraremos la moneda después de hacer sólo tres preguntas. Aquí adoptaremos la misma estrategia. Obviamente, si tenemos que encontrar un «1» entre un  $N$  mayor, como puede ser  $N = 100$  o  $1000$ , la información que debemos obtener será mayor y tendremos que hacer más preguntas. Inténtese calcular el número de preguntas necesarias si el único «1» está en alguno de  $N = 32$  y  $N = 64$  dados<sup>89</sup>.

Ahora supongamos que nos dicen que hay dos unos en un sistema de 16 dados (figura 6.4). Para adquirir la información perdida en



este caso tenemos que hacer más preguntas. Primero podemos hacer preguntas para situar el primer «1», y luego volver a empezar para localizar el segundo «1» entre los 15 dados restantes.

Parece claro que, fijado  $N$ , el número de preguntas requeridas para obtener la información que queremos aumenta con  $n$ .



*Figura 6.4*

Cuanto mayor sea  $n$ , más preguntas tendremos que hacer para localizar todos los unos (o todas las monedas escondidas).

El número de preguntas requeridas es fácil de calcular para cualesquiera  $n$  y  $N$ . Simplemente comenzamos haciendo preguntas para determinar la situación del primer «1» entre los  $N$  dados, luego hacemos lo propio para determinar la situación del segundo «1» entre los  $N - 1$  dados restantes, luego determinamos la situación del tercer «1» en los  $N - 2$  dados restantes, y así sucesivamente hasta tener toda la información sobre los  $n$  dados con un «1». Esto vale para todo valor de  $n$  por debajo de  $N/2$ .

También debemos ser lo bastante inteligentes no sólo para adoptar la mejor estrategia, sino también para decidir en cuál de los resultados posibles nos fijaremos. Si  $n$  es mayor que  $N/2$ , es mejor

preguntarnos por las localizaciones de los ceros en vez de los unos. Por ejemplo, si nos dicen que hay tres unos en un sistema de cuatro dados, la información perdida es la misma que si nos dijeran que hay un solo uno en un sistema de cuatro dados. En este caso será más inteligente hacer preguntas para situar el único «0». Bastarán dos preguntas para determinar la configuración exacta.

Así pues, la información perdida aumenta con  $n$  para un  $N$  fijo. Para un  $N$  fijo, la información perdida aumenta con  $n$  desde  $n = 0$  (cuando no hay ningún «1» no necesitamos hacer ninguna pregunta) hasta  $n = N/2$  o  $(N + 1)/2$  si  $N$  es impar y luego disminuye por encima de  $n = N/2$ . Cuando  $n$  alcanza su valor máximo  $N$ , la información perdida vuelve a ser nula (cuando no hay ningún «0» tampoco necesitamos hacer ninguna pregunta)<sup>90</sup>.

Un procedimiento similar vale para los casos donde hay más de dos resultados posibles. Es algo más complicado, pero no es esencial para entender la segunda ley.

Ahora tenemos un *número*, que hemos llamado información perdida, el cual describe la cantidad de información necesaria para especificar la configuración exacta cuando sólo conocemos la configuración inespecífica. Este número puede calcularse fácilmente para valores de  $n$  y  $N$  dados<sup>91</sup>.

Volvamos a nuestro juego del capítulo 4, donde llevábamos la cuenta de la *suma* del número de *unos* en la evolución del juego. En vez de estos dos números equivalentes, ahora registraremos la información perdida a cada paso. Ésta es una magnitud más general (puede aplicarse a cualquier tipo y número de resultados

posibles) que siempre aumenta (con independencia del estado de partida) hasta alcanzar un máximo en algún punto (en este caso  $n = N/2$ ). Y, lo que más nos importa, se puede demostrar que es idéntica a la entropía de un sistema real.

Hay que subrayar que la información perdida es la cantidad que hemos elegido para seguir la evolución del juego. Hay muchas otras opciones posibles (como el número de unos, la suma de puntos, o el resultado de  $N/2 - |n - N/2|$ ). Lo que cambia es el *estado* inespecífico, o la *configuración* inespecífica, del sistema. El número que hemos asignado a estos estados no es más que un índice que puede evaluarse y seguirse. El mismo índice puede aplicarse a cualquiera de los experimentos descritos en los capítulos 4 y 5, donde los resultados no son números, sino puntos, colores, sonidos, olores, sabores o temperaturas. Todo esto son *manifestaciones* diferentes del mismo proceso subyacente, el cambio desde una configuración inespecífica con un índice bajo (que puede ser la suma o la información perdida) hasta una configuración inespecífica con un índice más alto. Sólo nos queda darle a este índice un *nombre*. Por el momento lo llamaremos «información perdida», una denominación que no suscita ningún misterio. En cuanto tenemos un nombre para el índice que estamos registrando, que además tiene el significado de información<sup>92</sup>, podemos prescindir del término provisional «entropía». Más adelante veremos que la información perdida es esencialmente lo mismo que la entropía del sistema<sup>93</sup>.

Pasemos ahora a la segunda pregunta planteada al principio de este capítulo. ¿Cómo pasamos del estado inicial al estado final?

La respuesta es muy simple en el caso de los juegos de dados que hemos visto. Hemos prescrito las *reglas* del juego, las más simples de las cuales son: *seleccionar* un dado al azar, lanzarlo para obtener un *nuevo resultado aleatorio*, y registrar el *nuevo estado inespecífico*. Esto responde a la cuestión del «cómo».

También hemos visto que tenemos cierta libertad a la hora de elegir las reglas. Podemos seleccionar cada dado por orden (de izquierda a derecha, o de derecha a izquierda, o de cualquier otra manera prescrita), y luego lanzarlo para obtener un resultado aleatorio; o podemos seleccionar el dado al azar y luego obtener el nuevo resultado de manera predeterminada (si es «0» se cambia a «1», y si es «1» se cambia a «0», por ejemplo). Hay muchas otras reglas aplicables, como seleccionar dos (o tres, o cuatro, o más) dados al azar y luego lanzarlos todos a la vez. La evolución del juego a cada paso diferirá algo en algunos detalles, pero a grandes rasgos será la misma que hemos observado en los experimentos del capítulo 5. Lo importante es que cada dado tenga las mismas oportunidades de cambiar, y que el proceso contenga un elemento de azar. Dentro de estos límites, hay muchas reglas posibles para conseguir el cambio. Hay que decir que es fácil idear alguna regla no aleatoria que haga que la evolución sea muy diferente. Por ejemplo, si tomamos cada dado por orden, digamos de derecha a izquierda, y luego conmutamos de manera predeterminada el «0» por el «1» o el «1» por el «0», a partir de una configuración de todo ceros el sistema

evolucionará hacia una configuración de todo unos, luego volverá a todo ceros, y así sucesivamente:

$$\{0,0,0,0\} \rightarrow \{1,0,0,0\} \rightarrow \{1,1,0,0\} \rightarrow \{1,1,1,0\} \rightarrow$$

$$\{1,1,1,1\} \rightarrow \{0,1,1,1\} \rightarrow \{0,0,1,1\} \rightarrow \{0,0,0,1\} \rightarrow$$

$$\{0,0,0,0\} \rightarrow \{1,0,0,0\} \rightarrow \dots$$

En tal caso, la evolución del sistema es totalmente diferente de la que hemos visto en los capítulos 4 y 5.

También podríamos prescribir reglas que no induzcan cambio alguno (como tomar un dado al azar y no cambiarlo de cara) o hagan ir de la configuración de *todo ceros* a la de *todo unos* (como cambiar los dados por orden de «0» a «1» y de «1» a «1»), Estas reglas no nos interesan. Como veremos en el próximo capítulo, estas reglas no tienen contrapartidas en el mundo físico.

La conclusión es que la respuesta a la pregunta del «cómo» es muy simple. Todo lo que se requiere es *definir* las reglas de manera que contengan algún elemento de aleatoriedad y den a cada dado las mismas posibilidades de cambiar.

Hemos dejado para el final la pregunta más importante. ¿Por qué el sistema evoluciona en el sentido de un incremento de la información perdida (o, en los juegos del capítulo 4, por qué la suma del número de unos tiende a instalarse en una línea de equilibrio)?

La respuesta a esta pregunta reside en el núcleo mismo de la segunda ley de la termodinámica. Aunque la solución que daremos ahora al problema es estrictamente pertinente para nuestros juegos de dados simples, veremos que también se aplica a los procesos físicos reales.

Como en cualquier ley de la física, hay dos respuestas posibles a nuestro «por qué». Uno puede simplemente decir que «así son las cosas», ni más ni menos. No hay manera de comprender las leyes del movimiento de Newton más profundamente. Una bola en movimiento que no se vea interrumpida por ninguna fuerza continuará desplazándose en línea recta a velocidad constante para siempre. ¿Por qué? No hay respuesta a esta pregunta. Así son las cosas. Así funciona la naturaleza. No hay ninguna razón lógica, ni explicación. De hecho, esta ley parece «antinatural», ya que entra en conflicto con lo que observamos normalmente en el mundo real. Una persona sin formación científica que leyó el manuscrito de este libro mostró su sorpresa ante la citada ley con estas palabras: «Todo el mundo sabe que una bola en movimiento siempre acabará parándose». Las leyes del movimiento no se basan en, ni son reducibles a, el sentido común. Es más, las leyes de la mecánica cuántica son incluso contraintuitivas, y desde luego no nos parecen lógicas ni naturales (probablemente porque no «vivimos» en el mundo microscópico, por lo que los efectos cuánticos no forman parte de nuestra experiencia diaria).

La segunda manera de responder consiste en buscar un principio subyacente más profundo que explique la ley. Esto es lo que la

gente ha intentado hacer con la segunda ley durante décadas. La segunda ley de la termodinámica es única en el sentido de que *podemos* dar una respuesta al «por qué» basada en la lógica y el sentido común (una característica no compartida por ninguna otra ley de la naturaleza salvo, quizá, la teoría de la evolución de Darwin)<sup>94</sup>.

En los capítulos anteriores hemos visto que hay numerosas manifestaciones diferentes de (esencialmente) el mismo proceso (y muchos otros en el mundo real). Aunque en los diversos experimentos descritos hemos registrado distintas manifestaciones (en un juego el número de «unos», en otro el número de «amarillos», en otro el número de «dulces»), hemos decidido emplear el mismo índice, la información perdida, para seguir la evolución de todos esos juegos. Se trata de descripciones diferentes del mismo proceso subyacente en esencia. «El sistema evoluciona hacia más verdor», «el sistema evoluciona hacia una suma mayor», «el sistema evoluciona hacia la máxima información perdida», etcétera<sup>95</sup>. Se trata de descripciones correctas de lo que pasa, pero ninguna da respuesta al «por qué». No hay ninguna ley de la naturaleza que obligue a un sistema a evolucionar hacia más verdor. Esto es obvio. Tampoco hay ninguna ley de la naturaleza que establezca que un sistema debe evolucionar hacia un aumento del *desorden* o de la *información perdida*.

Si mi respuesta fuera «porque ir del orden al desorden, o de menos información perdida a más información perdida, es la manera de actuar de la naturaleza», el lector, justificadamente, podría seguir

haciendo preguntas. ¿Por qué tiene que ser así? ¿Por qué el sistema tiene que ir de menos a más desorden, o de menos a más información perdida? En efecto, no hay ninguna ley que obligue a ello. Las cosas que hemos registrado sirven para *describir* la evolución del sistema, pero no para *explicar* su causa. Tenemos que encontrar una respuesta que no suscite otro «por qué».

La respuesta que buscamos es muy simple (y vale no sólo para todos los procesos que hemos visto hasta aquí, sino para todos los procesos *reales*). De hecho, al final se reduce al mero sentido común.

Hemos visto que en cada juego, a partir de cualquier configuración inicial, el sistema pasa de una configuración inespecífica que comprende pocas configuraciones específicas a otra configuración inespecífica con un número mayor de configuraciones específicas. ¿Por qué? Porque cada configuración específica es un *suceso elemental*, y como tal tiene la misma probabilidad que cualquier otro. Por lo tanto, las configuraciones *inespecíficas* que abarquen un número mayor de sucesos elementales serán más probables. Cuando  $N$  es muy grande, la probabilidad de los *estados inespecíficos* hacia los que evoluciona el sistema es muy elevada (¡casi uno!)<sup>96</sup>. Esto equivale a decir que:

*Los sucesos que se esperan más frecuentes serán más frecuentes. Para valores de  $N$  muy grandes, más frecuente equivale a siempre.*

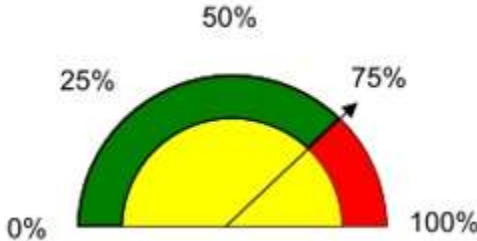


Esto reduce la respuesta que buscábamos a una mera tautología. Como hemos visto en el capítulo 2, la probabilidad no es más que sentido común, igual que la respuesta que hemos dado a nuestro «por qué».

Los cambios que hemos observado en *todos* los experimentos descritos van de estados inespecíficos de baja probabilidad a estados inespecíficos de elevada probabilidad. No hay nada misterioso en este hallazgo. No es más que una cuestión de sentido común.

También queda claro desde este punto de vista que el incremento de la información perdida (como el de la entropía) no se asocia a ningún incremento material o energético.

Si el comportamiento de la entropía es de sentido común, se estará preguntando el lector, ¿a qué viene todo ese discurso sobre el profundo misterio de la segunda ley? Intentaré responder a esta pregunta en el capítulo 8. De momento seguimos en el mundo de los dados. Le sugiero al lector que elija un valor de  $N$  (16, 32 o el que sea) y ejecute el juego mentalmente o en su ordenador, conforme a las reglas establecidas en los capítulos 4 y 5, que siga la evolución de las configuraciones y se pregunte *qué* es lo que cambia, *cómo* cambia y *por qué* cambia como lo hace. Las respuestas que encuentre serán relevantes para ese juego de dados, pero, como veremos en el capítulo siguiente, también serán relevantes para el comportamiento de la entropía en el mundo real.



*Fin del capítulo 6*

## Capítulo 7

### Del mundo de los dados al mundo real

#### Contenido:

§. *La correspondencia con el proceso de expansión.*

§. *La correspondencia con el proceso de desasimilación.*

§. *Resumen de la evolución del sistema hacia el estado de equilibrio.*

§. *Mezcla de tres componentes.*

§. *Transferencia de calor de un gas caliente a un gas frío.*

§. *Test de comprensión de la segunda ley.*

En el capítulo anterior he asegurado que si uno ha entendido la evolución de los juegos de dados y tiene respuesta para el «qué», el «cómo» y el «por qué», ya le falta muy poco para comprender la segunda ley; todo lo que queda por demostrar es que lo que nos han enseñado los dados es relevante para el mundo real.

En este capítulo traducimos el lenguaje de los dados al lenguaje de los experimentos reales. Comenzamos con el experimento más simple y mejor estudiado: la expansión de un gas ideal.

Para facilitar la traducción, redefinamos el juego de dados del capítulo 4 considerando dados con la letra  $D$  en tres de sus caras y la letra  $I$  en las otras tres. Así, en vez de «0» y «1», o amarillo y azul, o dulce y ácido, simplemente tenemos dos letras:  $I$  y  $D$  ( $I$  de «izquierda» y  $D$  de «derecha», pero por el momento las veremos cómo dos resultados posibles de un dado, o de una moneda). Partiremos

de una configuración de «todo I» y jugaremos conforme a las reglas prescritas en el capítulo 4. Podemos registrar cuántas veces aparece la «D», o la «I», o la información perdida. En este sistema, lo que veremos es que, al cabo de un tiempo, tanto el número de letras «D» como el número de letras «I» serán más o menos  $N/2$ , donde  $N$  es el número total de dados. La figura 7.1 muestra tres fases de este juego con  $N = 10$ .

Nótese que el estado inicial (inespecífico-0) es único. Sólo hay un estado *específico* perteneciente a este estado inespecífico.

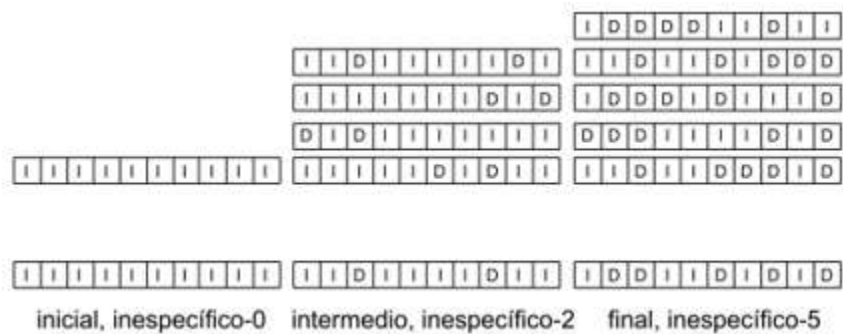


Figura 7.1

Para el estado intermedio (inespecífico-2 en la figura) tenemos muchos estados específicos ( $10 \times 9/2 = 45$ ). El último estado (inespecífico-5) abarca aún más estados específicos posibles ( $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6/5! = 252$ ). Éste es el estado inespecífico maximal. En la figura 7.1 hemos indicado algunas de las configuraciones específicas pertenecientes a los estados inespecíficos.

**§. La correspondencia con el proceso de expansión**

Considérese el sistema experimental representado en la figura 7.2. Tenemos dos compartimentos separados del mismo volumen, uno etiquetado como  $D$  (el de la derecha) y otro etiquetado como  $I$  (el de la izquierda). El sistema contiene  $N$  átomos de gas (argón, por ejemplo) confinados inicialmente en el compartimento de la izquierda. Mientras no retiremos la separación, nada reseñable ocurrirá. Al nivel microscópico, las partículas están en un estado de agitación incesante, cambiando aleatoriamente de posición y velocidad. Pero al nivel macroscópico no hay ningún cambio detectable. Podemos medir la presión, la temperatura, la densidad, el color o cualquier otra propiedad, y no apreciaremos ningún cambio ni en el espacio ni en el tiempo. Diremos que el sistema está inicialmente contenido en el compartimento  $I$  y en estado de equilibrio<sup>97</sup>. Si retiramos la separación, pondremos en marcha la segunda ley. Ahora sí *observaremos* cambios. Podemos registrar el color, la presión, la densidad, etcétera, y veremos que estas magnitudes cambian con el tiempo y la posición. Los cambios *observados* siempre irán en una dirección: los átomos pasarán del compartimento  $I$  al compartimento  $D$ . Supongamos que registramos la densidad o el color en  $I$ . Veremos que la densidad (o la intensidad del color, si lo tiene) del gas decrece paulatinamente. Al cabo de un tiempo el sistema alcanzará un nuevo estado de equilibrio y no observaremos más cambios en los parámetros que hemos estado registrando. Una vez instalado en ese nuevo estado de equilibrio, el sistema se mantendrá «**siempre**» en él, y «**nunca**» volverá al estado

inicial. Este proceso es una manifestación relativamente simple de la segunda ley.

En este proceso específico, partíamos de un estado de equilibrio (todos los átomos en  $I$ ) y progresábamos hacia un nuevo estado de equilibrio (átomos ocupando todo el volumen de  $I$  y  $D$ ). Repitamos el experimento, pero con una ligera variación que facilitará la traslación del juego de dados al mundo real. Supongamos que, en vez de suprimir la separación como en la figura 7.2, nos limitamos a abrir un agujero lo bastante pequeño para dejar pasar sólo una molécula, o a lo sumo unas cuantas, de  $I$  a  $D$  en cualquier momento dado. Si abrimos y cerramos esta minúscula abertura a intervalos cortos de tiempo, procederemos del estado inicial al estado final igual que antes, pero en este caso a través de una serie de estados de equilibrio intermedios<sup>98</sup>

La figura 7.3 muestra tres fases de este proceso.

Ahora establezcamos la siguiente correspondencia entre el mundo de los dados y el mundo real del gas en expansión: cada dado corresponderá a un átomo específico (un átomo de argón, por ejemplo). Las caras « $I$ » y « $D$ » de los dados en el experimento del principio corresponden a la situación de un átomo específico en el compartimento de la izquierda y en el de la derecha, respectivamente.



Figura 7.2

Para concretar más la correspondencia entre ambos «mundos», consideremos el caso  $N = 2$ , representado en la parte superior de la figura 7.4. Nótese que, en esta correspondencia, hacemos distinciones entre las partículas (en rojo y en azul). (En la parte inferior de la figura 7.4 se representa la correspondencia con el proceso de asimilación que describo más adelante en este capítulo). Definimos una configuración específica como una especificación completa de cada partícula en cada compartimento. En contraste con el mundo de los dados, donde podemos distinguir un dado de otro (aunque no hemos tenido en cuenta esta información al registrar sólo las cantidades pertinentes para la configuración inespecífica), aquí las partículas son indistinguibles de entrada, así que no tenemos que ignorar ninguna información. La indistinguibilidad es una propiedad de los átomos, algo que la naturaleza impone a las partículas. Los dados podrían ser idénticos en todos los aspectos, pero son distinguibles en el sentido de que podemos seguirlos de manera individual. Si agitamos diez dados idénticos, podemos fijarnos en un dado concreto y en cualquier momento podemos decir de dónde procede. Al definir la configuración inespecífica, digamos cinco letras « $D$ » en diez dados, *podemos* distinguir entre las diferentes configuraciones *específicas*. Podemos indicar los dados que portan una « $D$ » y los que portan una « $I$ », como queda claro en las figuras 7.1 y 7.4. Con los átomos no podemos hacer lo mismo. Todo lo que podemos conocer o evaluar es el número de átomos en  $D$ , pero no cuáles están en  $D$  y cuáles en  $I$ .

Así, en el sistema representado en la figura 7.4 no podemos distinguir entre los dos estados específicos «partícula azul en  $I$  y partícula roja en  $D$ » y «partícula azul en  $D$  y partícula roja en  $I$ ». Ambos estados se confunden en un estado inespecífico: «una partícula en  $I$  y una partícula en  $D$ ».

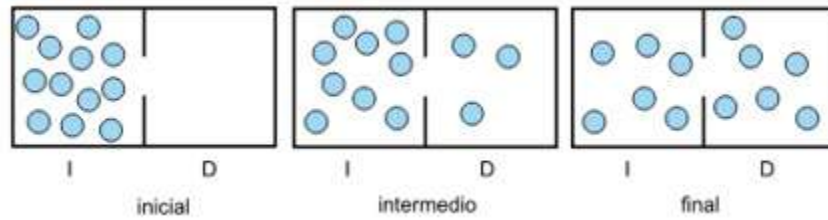


Figura 7.3

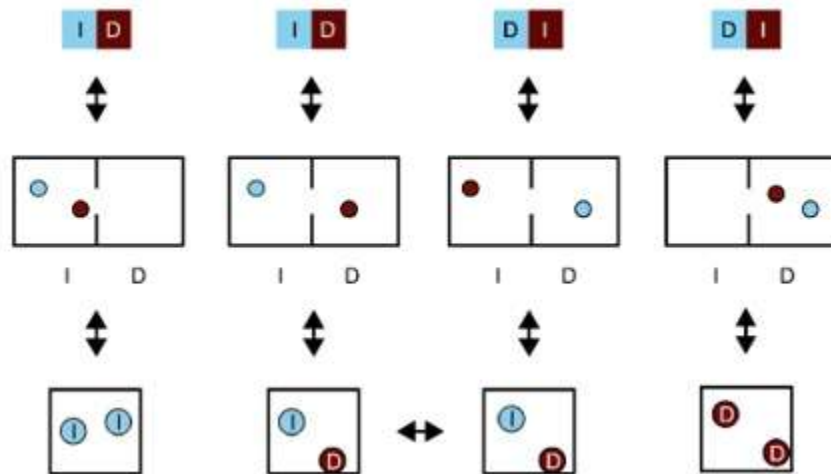


Figura 7.4

Decimos que una configuración es inespecífica cuando sólo especificamos el número de partículas en  $D$  (con lo que también se especifica el número de partículas en  $I$ ), con independencia de la situación detallada de cada átomo en  $I$  o  $D$ . Obviamente, cada



configuración inespecífica incluye numerosas configuraciones específicas (excepto en los casos extremos de todo  $D$  o todo  $I$ ). Vuelvo a insistir en que todo lo que podemos medir o registrar es el número *total* de partículas en  $D$  o cualquier magnitud proporcional a dicho número (como la intensidad de color u olor, la densidad, la presión, etcétera). A diferencia de los juegos de dados, aquí no podemos «ver» la configuración específica.

En razón de su importancia capital, volveremos a explicar la diferencia entre la configuración inespecífica y las configuraciones específicas correspondientes (figura 7.5).

Para ver mejor las distintas configuraciones específicas hemos asignado colores diferentes a las partículas. En un sistema de partículas (átomos y moléculas) no hay etiquetas (o colores) que nos permitan diferenciar una partícula de otra idéntica. Lo único que podemos observar o medir es la configuración inespecífica (a la izquierda de la figura 7.5). Hay que subrayar, sin embargo, que aunque no podamos distinguir entre configuraciones específicas, éstas contribuyen a la *probabilidad* de la configuración inespecífica. Aquí presuponemos que cada configuración *específica* es igualmente probable<sup>99</sup>. Por lo tanto, la probabilidad de cada configuración inespecífica es la suma de las probabilidades de cada una de las configuraciones específicas correspondientes. Podemos pensar que los sucesos específicos (a la derecha de la figura 7.5) se confunden en un único suceso inespecífico (a la izquierda). Las probabilidades de los cinco sucesos inespecíficos son:  $1/16$ ,  $4/16$ ,  $6/16$ ,  $4/16$ ,  $1/16$ .

Ahora estamos en disposición de responder al «qué», el «cómo» y el «por qué» a propósito del experimento real. Como en el caso de los juegos de dados, la pregunta « ¿Qué es lo que cambia?» tiene más de una respuesta. Por ejemplo, podemos observar la evolución de la intensidad de color durante la expansión. Podemos registrar cómo cambia la densidad, el sabor o el olor con el tiempo. Incluso podemos calcular el cambio en el número aproximado de partículas en cada compartimento. Inicialmente partimos de  $N$  átomos en el compartimento  $I$ , y al abrir la portezuela o suprimir la separación, el número de átomos,  $n$ , en  $I$  decrece continuamente con el tiempo hasta que deja de hacerlo.

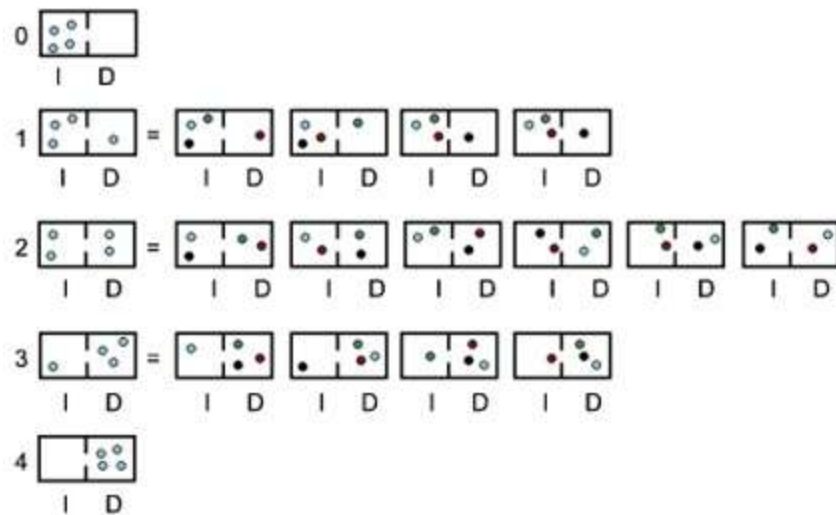


Figura 7.5

La respuesta al «qué» es *exactamente* la misma que hemos dado en el capítulo anterior, a saber: lo que cambia es la configuración inespecífica, la cual comporta propiedades que podemos ver, oír, oler, probar o medir con instrumentos macroscópicos. Así, a la

pregunta « ¿Qué es lo que cambia?» en el presente experimento puede responderse comparándolo con el juego de dados antes analizado.

La única diferencia es la interpretación del término «configuración», que aquí hemos definido como partículas repartidas entre dos compartimentos,  $I$  y  $D$ , mientras que en el caso de los dados la configuración se especificaba como dos resultados posibles,  $I$  y  $D$ . Una vez establecida la correspondencia entre el juego de dados y la expansión del gas, podemos dar la misma respuesta a la pregunta « ¿Qué es lo que cambia?». Más adelante volveremos a la cuestión de cuál es la *mejor* variable que describe aquello que es común a todos los procesos considerados.

Ahora pasamos a la siguiente pregunta: « ¿Cómo se pasa del estado inicial al estado final?». En el juego de dados prescribíamos las reglas del cambio, así que la respuesta a la pregunta era directa: los cambios tienen lugar conforme a las reglas prescritas. En lo que respecta al experimento real, la respuesta a la misma pregunta es diferente. En principio, la evolución de las posiciones y velocidades de todas las partículas se rige por las ecuaciones del movimiento. Pero en un sistema con gran número de partículas podemos aplicar las leyes de la probabilidad<sup>100</sup>. Podemos afirmar que si partimos de una descripción exacta de todas las posiciones y velocidades de todas las partículas, al poco tiempo el sistema perderá esa información. Debido a las colisiones aleatorias y la rugosidad de las paredes del recipiente, la evolución del sistema se describe más

eficazmente mediante las leyes de la estadística que mediante las leyes de la mecánica<sup>101</sup>.

Así pues, podemos recurrir a argumentos probabilísticos similares a los aplicados al juego de dados del principio. En otras palabras, hay un elemento de *aleatoriedad* que da a cada partícula una «oportunidad» de pasar de *I* a *D* o de *D* a *I*. Por lo tanto, la respuesta al «cómo», aunque no exactamente, es *a todos los efectos* la misma que en el caso del juego de dados. También hemos visto que las reglas concretas del juego de dados no eran demasiado importantes; lo importante era que cada dado tuviese las mismas oportunidades de cambiar de manera aleatoria. Este argumento también vale para el experimento real de expansión de un gas: cada átomo o molécula debe tener las mismas oportunidades de pasar de *I* a *D* o de *D* a *I*.

Si suprimimos el elemento de azar, entonces el sistema no evolucionará conforme a la segunda ley de la termodinámica. En el capítulo anterior hemos propuesto reglas cuya aplicación se traduce en una *ausencia* de cambio, o en una alternancia entre «todo ceros» y «todo unos». Igualmente, podemos imaginar un sistema de partículas que no evolucione de acuerdo con la segunda ley.

Considérense los dos «experimentos mentales» siguientes. Supongamos que todas las partículas se movieran inicialmente hacia arriba de manera concertada, tal como se muestra en la figura 7.6a. Si las paredes del recipiente fueran planos perfectos, sin ninguna irregularidad ni rugosidad, y exactamente perpendiculares a la dirección del movimiento de los átomos, entonces lo que veríamos es que las partículas seguirían moviéndose arriba y abajo

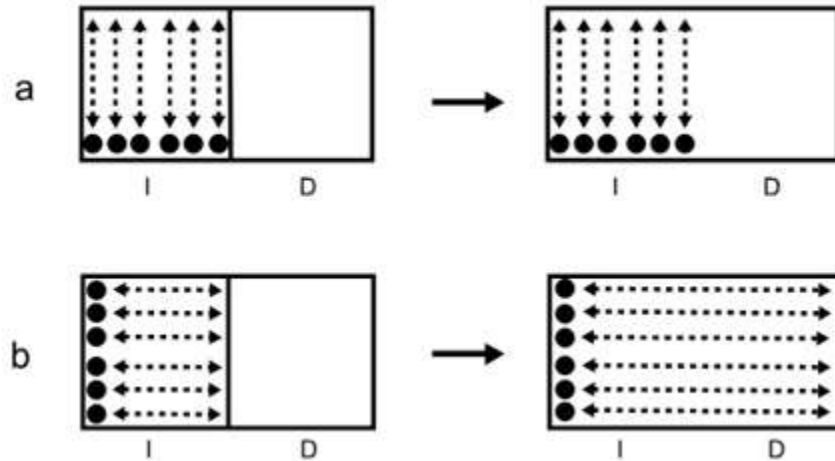
para siempre. Incluso después de suprimir la separación, todas las partículas inicialmente en  $I$  permanecerán en ese compartimento. La segunda ley no tiene nada que hacer en un sistema semejante<sup>102</sup>.

Un segundo «experimento mental» se ilustra en la figura 7.6b.

Supongamos de nuevo que todas las partículas están inicialmente en  $I$ , pero ahora se mueven en línea recta de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. Todas las partículas se mueven concertadamente y a la misma velocidad. Todas siguen la misma trayectoria, rebotando en la barrera y volviendo atrás. Si suprimimos la separación, el haz de partículas se moverá ahora concertadamente de  $I$  a  $D$  y de  $D$  a  $I$ , indefinidamente. En ninguno de los dos experimentos mentales el sistema evolucionará según los dictados de la segunda ley. En realidad, un proceso de ese estilo no es factible en un experimento real. Por eso hemos hablado de experimento mental.

Es evidente que las paredes de cualquier recipiente real tendrán imperfecciones, y aunque pudiéramos partir de un movimiento inicialmente sincronizado de las partículas, muy pronto las leyes probabilísticas se impondrían y la segunda ley comenzaría a actuar. Hay que decir que en termodinámica no interesa la cuestión de cómo pasa el sistema del estado inicial al estado final. Lo único que cuenta es la *diferencia entre el estado inicial y el estado final*. Aquí hemos mirado con lupa los detalles del movimiento de las partículas individuales para establecer la correspondencia entre las reglas del juego de dados y las reglas del paso de  $I$  a  $D$  o de  $D$  a  $I$  en la

expansión del gas. Vayamos ahora a la siguiente y más importante cuestión: el «por qué».



*Figura 7.6*

Como he señalado en el capítulo anterior, la respuesta al «por qué» en el caso del juego de dados también es aplicable a la expansión del gas. El gas pasará de una configuración inespecífica de baja probabilidad a una configuración inespecífica de máxima probabilidad. Por configuración específica aquí se entiende una especificación detallada de cada partícula en cada compartimento. Una configuración inespecífica (que es lo único que podemos registrar) es «el número de partículas en el compartimento  $D$ ». Si se han entendido los argumentos expuestos en los capítulos 4-6 acerca de la evolución del sistema del estado inicial al estado de equilibrio, entonces también se entenderá la evolución del sistema físico descrito en este capítulo. Hemos visto que con apenas  $10^4$  o  $10^5$  dados la probabilidad de volver al estado inicial ya es despreciable, y hemos concluido que, una vez que el sistema llega a la vecindad del

estado de equilibrio, se mantiene allí «**siempre**» y «**nunca**» vuelve al estado inicial. El argumento es válido *a fortiori* para un sistema de  $10^{23}$  dados o partículas.

Como en el caso del juego de dados, hemos subrayado que no hay ninguna ley de la naturaleza que obligue al sistema a evolucionar del amarillo al verde, o del orden al desorden, o de menos información perdida a más información perdida. Todas éstas son manifestaciones observables o medidas de la evolución del sistema. La razón fundamental de la evolución observada del sistema es autoevidente: cualquier sistema siempre pasará más tiempo en estados de elevada probabilidad que en estados de baja probabilidad. Cuando  $N$  es muy grande, digamos del orden de  $10^{23}$ , la «probabilidad elevada» se convierte en «certeza». Ésta es la esencia de la segunda ley de la termodinámica. También es una ley básica del sentido común, nada más.

### **§. La correspondencia con el proceso de desasimilación.**

Al trazar la correspondencia entre la evolución del juego de dados y del gas en expansión, he completado mi misión: guiar al lector para llevarle a comprender el funcionamiento de la segunda ley de la termodinámica. Pero me gustaría trazar otra correspondencia entre el juego de dados y un experimento físico. Este otro caso no añadirá nada nuevo a nuestra comprensión de la segunda ley, pero es un ejemplo suplementario de proceso espontáneo gobernado por la segunda ley de la termodinámica. Mi motivación para presentarlo aquí es, más que nada, estética. Permítaseme explicar por qué.

Cualquier proceso espontáneo que implique un incremento de entropía está gobernado por la misma ley de sentido común, a saber, que los sucesos más probables se darán con más frecuencia. Hemos examinado uno solo de tales procesos físicos, la expansión espontánea de un gas. Hay procesos más complicados, por supuesto, como una reacción química, la mezcla de dos líquidos, el desparramamiento de un huevo al caer al suelo, y muchos más.

No siempre es fácil definir con precisión los estados del sistema sobre los que es operativa la segunda ley. En la enseñanza de la termodinámica es costumbre y resulta muy instructivo clasificar los procesos según el tipo de estados involucrados. Desde el punto de vista de la información o, mejor, de la información perdida, los procesos se subclasifican según el tipo de información que se pierde. En el proceso de expansión, las partículas estaban inicialmente confinadas en un volumen menor  $V$ . Tras la expansión, se distribuían en un volumen mayor  $2V$ , por lo que resulta más «difícil» situar cada partícula, o lo que es lo mismo, tenemos menos información sobre las *localizaciones* de las partículas. En un proceso de transferencia de calor entre dos cuerpos a distintas temperaturas, el cambio en la cantidad de información es más sutil. Antes del proceso, las partículas del cuerpo caliente se caracterizan por una distribución de energías (velocidades) y las del cuerpo frío por otra. Tras ponerse en contacto y equilibrarse las temperaturas, tenemos una única distribución de velocidades para la suma de las partículas de ambos cuerpos. Volveremos a considerar este proceso más adelante. En procesos más complicados, como el



desparramamiento de un huevo roto, es difícil definir los tipos de información perdida; puede tratarse de información sobre la localización, la velocidad, la orientación, entre otras variables. Unos procesos tan complejos a menudo están más allá de nuestra aptitud descriptiva.

En el juego de dados teníamos  $N$  dados idénticos, cada uno de los cuales podía estar en dos (o más) estados, como «0» y «1», o amarillo y azul, o « $I$ » y « $D$ ». En el proceso de expansión hemos hecho corresponder los dos resultados posibles del dado con las dos localizaciones posibles de las partículas (digamos átomos de argón). Esto está bien. Siempre podemos denotar un átomo en el compartimento de la derecha como un  $D$ -átomo, y un átomo en el compartimento de la izquierda como un  $I$ -átomo. Esto es formalmente correcto, pero estéticamente insatisfactorio, ya que la identidad inherente de los átomos no cambia en el proceso. En otras palabras, hemos establecido una correspondencia entre la *identidad* del resultado del dado y la *localización* de la partícula.

Permítaseme presentar un nuevo experimento gobernado por la segunda ley, pero donde la correspondencia entre el juego de dados y el proceso físico es más plausible y estéticamente más satisfactoria. Haremos corresponder la *identidad* del resultado del dado con la *identidad* de la partícula.

El examen de este proceso también nos reporta un pequeño «plus», y es que nos permite imaginar experimentos reales donde podemos seguir el cambio de color, olor o sabor a medida que el sistema evoluciona.

Considérese una molécula con dos isómeros, digamos *cis* y *trans*, de una molécula, representada esquemáticamente en la figura 7.7.

Si partimos del isómero *cis* puro, el sistema puede pasar mucho tiempo sin experimentar cambio alguno. Pero si añadimos un catalizador (lo que viene a ser como suprimir la separación entre compartimentos en el experimento de expansión de un gas), observamos un cambio espontáneo tal que la forma *cis* pura da paso a una mezcla de los isómeros *cis* y *trans*. La mecánica estadística proporciona un procedimiento para calcular la razón de las concentraciones de ambos isómeros en el equilibrio. En esta reacción en particular podemos identificar dos fuentes de incremento de la entropía o, equivalentemente, dos tipos de cambio informacional. Uno tiene que ver con la *identidad* molecular, mientras que el otro tiene que ver con la redistribución de la energía entre los grados de libertad internos de ambas especies moleculares.

Hay un caso particular de reacción química donde sólo cambia la *identidad* de las moléculas (los grados de libertad internos son los mismos para ambas especies moleculares). Se trata de dos enantiómeros (moléculas con actividad óptica), isómeros que tienen la misma estructura y constitución química, sólo que uno es la imagen especular del otro. Un ejemplo se ilustra en la figura 7.8.



Figura 7.7

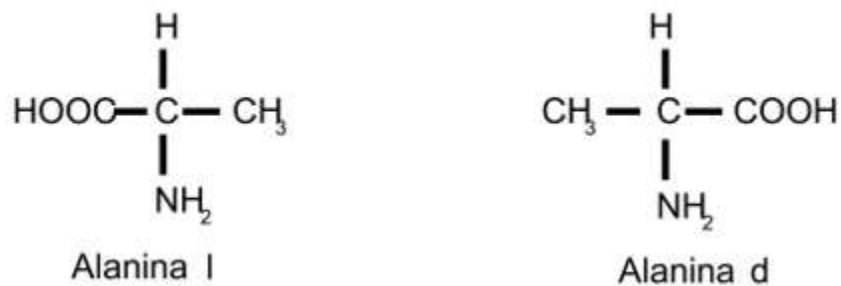


Figura 7.8

Denotemos estos isómeros como *d* y *l* (*d* por dextro y *l* por levo)<sup>103</sup>. Ambos tienen la misma masa, el mismo momento de inercia, los mismos grados de libertad internos y los mismos niveles de energía. Así pues, cuando inducimos una «reacción» que implica la conversión de un isómero en el otro, el único cambio en el sistema es en el número de partículas indistinguibles. Hagamos el siguiente experimento: partimos de  $N$  moléculas del isómero *d*, y añadimos un catalizador que induce la transformación espontánea de *d* en *l*, o de *l* en *d*<sup>104</sup>. Pues bien, se puede demostrar que, en el equilibrio, encontraremos alrededor de  $N/2$  moléculas de la forma *d* y  $N/2$  moléculas de la forma *l*<sup>105</sup>. También se puede calcular el incremento de entropía en este proceso, y se encuentra que es exactamente el mismo que en el proceso de expansión de antes. Pero la «fuerza

impulsora» es diferente, y considero que la correspondencia entre el juego de dados y este proceso es más satisfactoria y más «natural». Para verlo, tengamos en cuenta que en ambos experimentos hemos establecido la correspondencia:

*Un dado específico ↔ una partícula específica*

En el experimento de expansión, también establecíamos la correspondencia:

*Una identidad específica del resultado de un dado*



*Una localización específica de la partícula*

En el segundo experimento, lo que se conoce como desasimilación, la correspondencia es:

*Una identidad específica del resultado de un dado*



*Una identidad específica de la partícula*

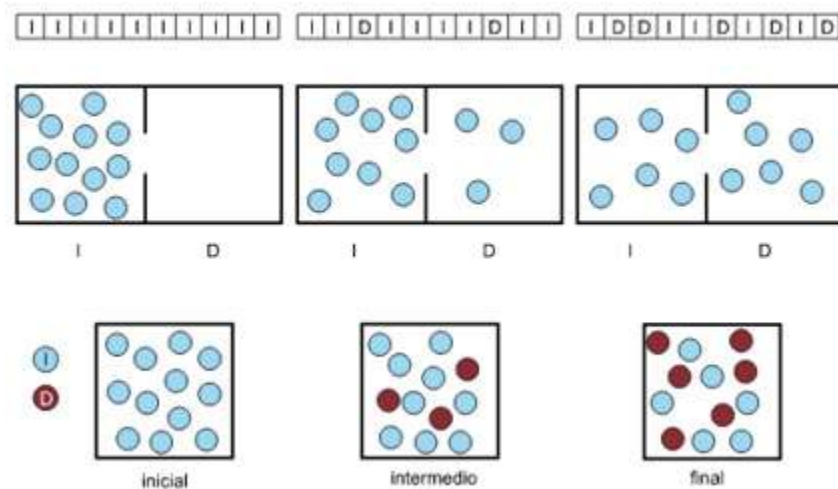
Así, mientras que en el proceso de expansión la evolución del estado inicial al estado final implica cambios en la información *posicional* acerca de las partículas, en el proceso de desasimilación tenemos un cambio en la *identidad* de las partículas<sup>106</sup>. Aquí la pérdida de

información es del mismo *tipo* que la registrada en el juego de dados.

La correspondencia entre dados y partículas para este proceso se representa en la parte inferior de la figura 7.4.

Tanto en el juego de dados como en el proceso de desasimilación hay una evolución que implica un cambio en la *identidad* de las partículas. En el primer caso partimos de  $N$  dados, todos a cero, mientras que en el experimento real partimos del isómero  $d$  puro. Al cabo de un tiempo,  $N/2$  de los dados han cambiado a uno, y  $N/2$  moléculas han adquirido una nueva identidad, la forma  $1^{107}$ . Esta correspondencia es menos forzada y más natural que la establecida entre el juego de dados y el proceso de expansión. La evolución del sistema puede describirse del mismo modo que en el caso de la expansión del gas. Para entender la evolución de este otro experimento no hay más que cambiar  $D$  e  $I$  por  $d$  y  $l$ . La figura 7.9 (que es una síntesis de las figuras 7.1 y 7.3) muestra las tres fases del proceso de desasimilación y la correspondencia tanto con el experimento de expansión del gas como con el juego de dados.

Las respuestas al «qué» y al «por qué» son las mismas que antes. La respuesta al «cómo», en cambio, es ligeramente distinta<sup>108</sup>. No obstante, como ya hemos señalado, la cuestión del «cómo» no es importante para comprender la segunda ley. Lo único que importa es la diferencia de entropía entre los estados inicial y final.



*Figura 7.9*

Y ahora el «plus»: en el capítulo 5 hemos considerado algunos procesos hipotéticos donde se registraba el cambio de color, sabor u olor en un sistema de dados. En principio, estos procesos pueden materializarse. Supongamos que tenemos dos isómeros con estructuras moleculares diferentes que les confieren colores, olores o sabores diferentes. Poniendo en práctica el experimento de la isomerización espontánea podríamos registrar el cambio de color de amarillo a verde (como en el primer ejemplo del capítulo 5), o del olor *A* a una mezcla de olores *A* y *B* (como en el segundo ejemplo), o del sabor ácido al agridulce (como en el tercer ejemplo). Estos cambios pueden registrarse de manera continua en un sistema homogéneo<sup>109</sup>. Es difícil encontrar un experimento físico análogo al cambio de tono (el cuarto ejemplo), ya que las partículas no emiten ondas sonoras por sí solas. En cuanto al último ejemplo del capítulo 5, es imposible encontrar un análogo factible. La temperatura es un fenómeno complejo que depende de una distribución continua de

velocidades. Examinaremos un proceso que involucra cambios de temperatura en la sección 7.5.

A estas alturas debería estar claro qué es lo que cambia (eso que llamamos entropía) y por qué cambia como lo hace, ya sea en el juego de dados, en el proceso de expansión o en el proceso de desasimilación (figura 7.9).

### **§. Resumen de la evolución del sistema hacia el estado de equilibrio.**

Volvamos al experimento simple descrito en la figura 7.2. Partimos de  $N = 10^{23}$  partículas en  $I$ . Recordemos que una configuración *específica* es una lista detallada de qué partículas están en qué compartimentos. Una configuración *inespecífica* es una descripción de cuántas partículas hay en  $I$  y cuántas en  $D$ . Siempre que se mantenga la separación, no habrá *cambio* ni en la configuración específica ni en la configuración inespecífica<sup>110</sup>. El sistema no evolucionará en el sentido de ocupar nuevos estados si éstos no son accesibles.

Ahora suprimamos la barrera. El número total de estados específicos pasa a ser  $2^N$ , porque cada partícula puede estar o en  $I$  o en  $D$ . El número total de estados,  $W$  (*total*), se fija durante el intervalo entero de tiempo que tarda el sistema en alcanzar el equilibrio.

Obviamente, en cuanto se retira la barrera tienen lugar cambios observables. Puede ser un cambio de color, sabor, olor o densidad. Se trata de manifestaciones diferentes del mismo principio

subyacente. Pero hay algo que cambia en todas estas manifestaciones. ¿Qué es?

Lo que cambia es la configuración, o estado, o suceso *inespecífico* y hay diversas maneras de asignar a estos estados un número que podemos representar gráficamente para seguir su evolución. ¿Por qué cambia? No porque haya una ley de la naturaleza que diga que los sistemas deben evolucionar del orden al desorden, o de una información perdida baja a una información perdida más alta. No es la *probabilidad* de los estados inespecíficos lo que cambia (las probabilidades son fijas)<sup>111</sup>. *Es el estado inespecífico mismo el que pasa de tener una probabilidad baja a tener una probabilidad elevada.*

Sigamos la evolución del sistema justo después de la apertura de la barrera, y supongamos, en aras de la simplicidad, que abrimos una compuerta lo bastante pequeña para permitir el paso de una sola partícula en un lapso de tiempo corto. En el momento de abrir la compuerta, el estado inespecífico consiste en *un solo* estado específico perteneciente a la condición inmediatamente posterior a la apertura de la barrera (es decir, cuando hay cero partículas en *D*). Obviamente, cuando el proceso aleatorio se pone en marcha (sea el juego de dados o las partículas de gas colisionando con las paredes del recipiente y de vez en cuando atravesando el agujero) la primera partícula que pasa de un compartimento a otro lo hace de *I a D*, lo que se traduce en un nuevo estado, que llamaremos inespecífico-1. Como hemos analizado detalladamente en el capítulo 4, hay una elevada probabilidad de que el sistema se quede como está o



ascienda de nivel, y una probabilidad muy baja de que el sistema vuelva a un estado inespecífico inferior. La razón es bien simple. La probabilidad de que cualquiera de las  $N$  partículas cruce la frontera es la misma para todas. Llamemos  $p_1$  a esa probabilidad (que viene determinada por la velocidad del movimiento, el tamaño de la compuerta, etcétera). Sea cual fuere su valor, la probabilidad de pasar de inespecífico-1 a inespecífico-0 es la probabilidad de que la única partícula en  $D$  pase a  $I$ , que no es otra que  $p_1$ , mientras que la probabilidad de pasar de inespecífico-1 a inespecífico-2 es  $(N - 1)$  veces  $p_1$ , simplemente porque hay  $(N - 1)$  partículas en  $I$ , y cada una tiene una probabilidad  $p_1$  de pasar de  $I$  a  $D$ . El mismo razonamiento vale para justificar por qué será mucho más probable que el sistema pase de inespecífico-2 a inespecífico-3, de inespecífico-3 a inespecífico-4, etcétera. Cada estado inespecífico superior abarca un número mayor de estados específicos y, por ende, es más probable. Como hemos visto en los capítulos 3 y 4, esta tendencia ascendente, muy acentuada al principio, se va atenuando a medida que el sistema se acerca a inespecífico- $N/2$ , que es la línea de equilibrio. Esta línea marca el estado inespecífico más probable, ya que abarca el mayor número de estados específicos.

Hay que tener cuidado de no confundir el número de estados específicos pertenecientes a inespecífico- $N/2$  con el número total de estados del sistema, que es  $W$  (*total*). Este último es el *total* de estados específicos incluidos en todos los estados inespecíficos posibles. Por ejemplo, para  $N = 10$  tenemos<sup>112</sup>

$$\begin{aligned}
 W(\text{total}) &= W(\text{inespecífico-0}) + W(\text{inespecífico-1}) + W(\text{inespecífico-2}) \\
 &\quad + \dots \\
 &= 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 2^{10}
 \end{aligned}$$

Como hemos visto en los capítulos 2 y 3, la probabilidad de un suceso inespecífico es la suma de las probabilidades de los sucesos específicos que comprende.

Por ejemplo, para  $N = 10$ , inespecífico-1 incluye 10 sucesos específicos, la probabilidad de cada uno de los cuales es  $(1/2)^{10}$ . La probabilidad del suceso *inespecífico* no es más que diez veces ese número, esto es:

$$\text{Prob}(\text{inespecífico-1}) = 10 \times (1/2)^{10}$$

Para inespecífico-2 tenemos  $10 \times 9/2 = 45$  sucesos específicos, todos los cuales tienen la misma probabilidad de  $(1/2)^{10}$ . Por lo tanto, la probabilidad de inespecífico-2 es:

$$\text{Prob}(\text{inespecífico-2}) = 45 \times (1/2)^{10}$$

En la tabla siguiente se listan las probabilidades de todos los sucesos inespecíficos para  $N = 10$ . Nótese una vez más que el valor máximo se sitúa en  $N/2$ , que en este caso es 5.

Suceso inespecífico	Número de sucesos específicos	Probabilidad
0	1	$1/2^{10}$
1	10	$10/2^{10}$
2	45	$45/2^{10}$
3	120	$120/2^{10}$
4	210	$210/2^{10}$
5	252	$252/2^{10}$
6	210	$210/2^{10}$
7	120	$120/2^{10}$
8	45	$45/2^{10}$
9	10	$10/2^{10}$
10	1	$1/2^{10}$

La figura 7.10 muestra el número de sucesos específicos pertenecientes a cada suceso inespecífico para diferentes valores de  $N$  ( $N = 10$ ,  $N = 100$  y  $N = 1000$ ), y abajo se representan los mismos datos como probabilidades de los sucesos inespecíficos.

Se puede ver claramente que, a medida que  $N$  aumenta, el *número* de estados específicos pertenecientes a los estados inespecíficos maximales también se acrecienta. En cambio, la probabilidad del estado inespecífico maximal *decrece* con  $N$ . Así, a medida que  $N$  aumenta, la distribución de probabilidad de los sucesos inespecíficos se reparte sobre un rango mayor de valores. La aparente agudeza de la distribución, tal como se aprecia en la parte inferior de la figura 7.10, significa que, aunque las desviaciones del estado inespecífico maximal son mayores en valor *absoluto* cuanto mayor es  $N$ , su valor *relativo* disminuye a medida que aumenta  $N$ .

Por ejemplo, la probabilidad de observar desviaciones de, digamos, un  $\pm 1\%$  del estado inespecífico maximal se hace minúscula cuando  $N$  es muy grande.

Ahora calculemos la probabilidad de que el sistema se encuentre en cualquiera de los estados inespecíficos entre, digamos,  $N/2 - N/100$  y  $N/2 + N/100$ , es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre *alrededor* del estado inespecífico maximal, con desviaciones arriba y abajo dentro del 1% de  $N$ . Esta probabilidad es ya casi 1 para  $N = 10\,000$  (véase la figura 7.11). Para valores de  $N$  del orden de  $10^{23}$ , podemos permitir desviaciones del 0,1% o del 0,001% y seguir obteniendo una probabilidad cercana a 1 de encontrar el sistema en la línea de equilibrio o su vecindad.

Lo que hemos averiguado es sumamente importante y crucial para la comprensión de la segunda ley de la termodinámica. La probabilidad del estado inespecífico maximal  $N/2$  decrece con  $N$ : pero para valores de  $N$  muy grandes, del orden de  $10^{23}$  o más, tenemos una certeza casi absoluta (es decir, una probabilidad muy cercana a 1) de que el sistema se encuentre en un estado inespecífico muy próximo al de equilibrio. Cuando  $N = 10^{23}$ , podemos permitir desviaciones ínfimas de la línea de equilibrio, pero el sistema pasará la mayor parte del tiempo en los estados inespecíficos dentro de este margen estrecho en torno a la línea de equilibrio.

Recordemos una vez más que el número *total* de estados específicos posibles del sistema es  $2^N$ , y que todos tienen *la misma* probabilidad, de manera que cada uno será visitado con una

frecuencia extremadamente baja,  $(1/2)^N$ . En cambio, los estados inespecíficos (de los que hay  $N + 1$ ) son más o menos probables en función del número de estados específicos que abarcan.

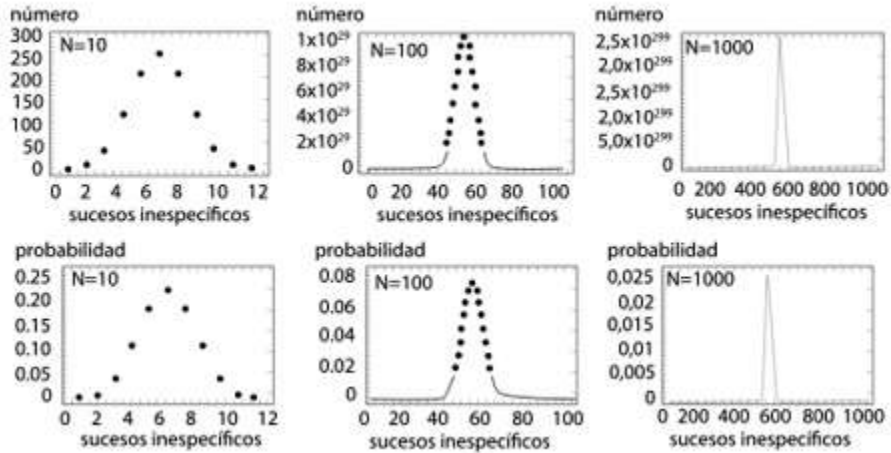


Figura 7.10

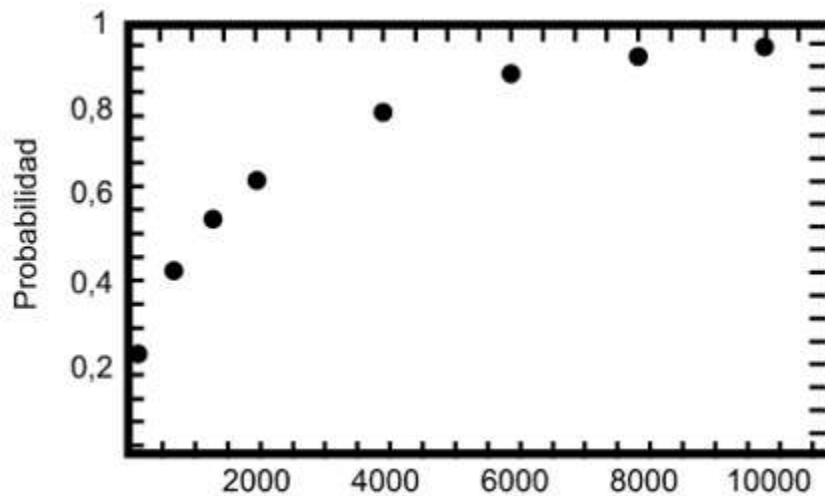


Figura 7.11

Los estados inespecíficos en o cerca del maximal  $N/2$  tendrán una probabilidad cercana a uno, es decir, casi la misma probabilidad de estar en cualquiera de los estados específicos totales<sup>113</sup>.

Ya es hora de aclarar la relación entre la *línea* de equilibrio y el *estado* de equilibrio del sistema experimental. En el equilibrio, un sistema experimental pasa una fracción de tiempo *mayor* en la *línea* de equilibrio (mayor en comparación con los otros estados inespecíficos). Pero no necesariamente pasa allí *todo* el tiempo. El *estado* de equilibrio experimental o termodinámico del sistema es el estado para el que todos los  $W$  (*total*) sucesos específicos son accesibles y tienen igual probabilidad. Pero como no podemos distinguir entre estados inespecíficos muy cercanos a la línea de equilibrio, el sistema pasará casi *todo* el tiempo en la vecindad de la *línea* de equilibrio. Aun así, habrá desviaciones. Las hay de dos tipos. Las desviaciones minúsculas son muy frecuentes, pero son *inobservables*. Las desviaciones grandes son observables, pero son tan raras que «*nunca*» las vemos. Por lo tanto, el *estado* de equilibrio del sistema es (casi) el mismo que el suceso inespecífico de la línea de equilibrio y su vecindad inmediata.

Dada la importancia de este punto, repetiré el argumento con otras palabras.

Consideremos el siguiente experimento. Tenemos dos compartimentos del mismo volumen  $V$ . Uno contiene  $N$  partículas etiquetadas,  $1, 2, \dots, N$ , y el otro contiene otras  $N$  partículas etiquetadas,  $N + 1, N + 2, \dots, 2N$ .<sup>114</sup> Ahora retiramos la separación entre los compartimentos. Al cabo de un tiempo nos preguntamos cuál es la probabilidad de observar *exactamente* el estado inicial. La respuesta es:  $2^{-2N}$ . Luego nos preguntamos cuál es la probabilidad de observar *exactamente*  $N$  partículas en cada compartimento,

etiquetas aparte. Ésta es una probabilidad mucho mayor<sup>115</sup>. Sin embargo, decrece con  $N$ , como puede verse en la figura 7.10. La probabilidad de observar el estado inespecífico  $N$ , aunque muy alta en comparación con los otros estados inespecíficos posibles, sigue siendo muy pequeña. Lo que se observa en la práctica no es el estado maximal *exacto*, sino un grupo de estados inespecíficos en la vecindad de la línea de equilibrio. Esta vecindad incluye todos los estados inespecíficos experimentalmente indiscernibles<sup>116</sup>.

¿Y qué podemos decir de otros procesos más complicados? Hemos examinado en detalle la expansión de un gas, donde elegíamos un único parámetro para describir la evolución del sistema, a saber, si la partícula estaba en  $I$  o en  $D$ . En el experimento de desasimilación también elegíamos un único parámetro para describir el curso de los hechos, a saber, si la partícula estaba en la forma  $l$  o en la forma  $d$ . Todo lo dicho sobre el proceso de expansión puede trasladarse casi *literalmente* al proceso de desasimilación. No hay más que cambiar «estar en  $I$ » o «estar en  $D$ » por «estar en la forma  $l$ » o «estar en la forma  $d$ ».

Por supuesto, hay procesos más complicados que involucran muchos más «parámetros» para describir los hechos: una molécula puede estar aquí o allá, puede tener esta o aquella velocidad, puede ser uno u otro isómero (o complementaria de moléculas mayores), etcétera.

Para comprender la segunda ley, basta con entender un proceso, el más simple, el mejor. Es lo que hemos hecho. El principio es el mismo para todos los procesos; sólo difieren en los detalles. Unos

son fáciles y otros más difíciles de describir. Algunos procesos son tan complicados que todavía no sabemos cómo describirlos. A veces ni siquiera sabemos cuántos parámetros están involucrados en el proceso. Vamos a describir brevemente algunos procesos de complejidad y dificultad crecientes.

### **§. Mezcla de tres componentes.**

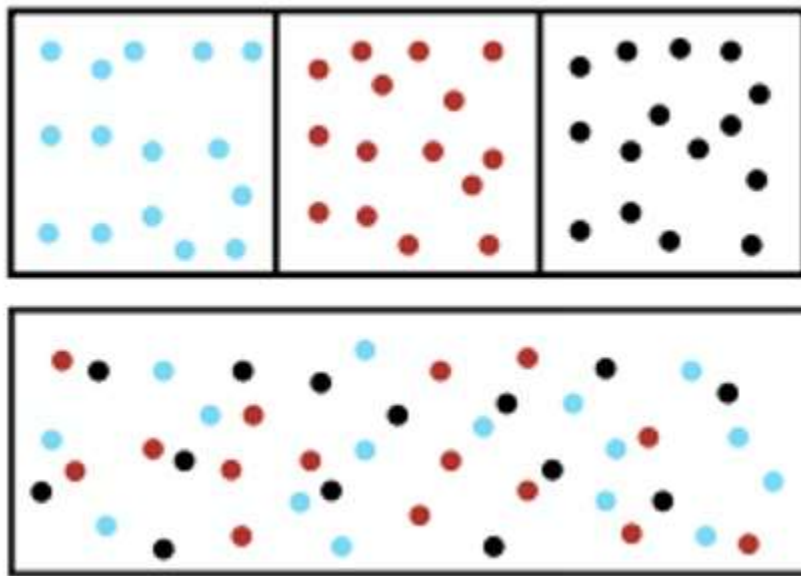
Supongamos que partimos de tres gases diferentes,  $N_A$  moléculas  $A$  en un volumen  $V_A$ ,  $N_B$  moléculas  $B$  en un volumen  $V_B$  y  $N_C$  moléculas  $C$  en un volumen  $V_C$  (figura 7.12).

Como antes, retiramos las separaciones entre compartimentos y observamos lo que ocurre. Si las moléculas tienen el mismo color, no veremos ningún cambio, pero podemos medir las densidades o concentraciones de cada tipo de molécula en cada punto y registrar los cambios. Si las moléculas tienen distintos colores, olores o sabores, podemos seguir la evolución del color, olor o sabor de la mezcla después de retirar las separaciones.

¿Cómo podemos describir con un solo número aquello cuyo cambio estamos observando? Incluso con esta clase de experimento relativamente simple, la construcción del «índice» numérico (que necesitamos para registrar la evolución del sistema) no es un asunto sencillo. Primero tenemos que definir los sucesos específicos de nuestro sistema. Un suceso específico en este caso podría ser: «molécula 1 del tipo  $A$  en  $V_A$ , molécula 2 del tipo  $A$  en  $V_B$ ,... molécula 1 del tipo  $B$  en  $V_A$ , molécula 2 del tipo  $B$  en  $V_C$ , etcétera». ¡Una descripción ciertamente larga!



Reconocemos que muchos de estos sucesos específicos nos resultan indistinguibles. Por ejemplo, el suceso «molécula 1 del tipo A en  $V_A$ , molécula 2 del tipo A en  $V_B$ , etcétera» es indistinguible del suceso específico «molécula 1 del tipo A en  $V_B$ , molécula 2 del tipo A en  $V_A$ , etcétera» (aquí el «etcétera» da a entender que el resto de la descripción es la misma en ambos casos).



*Figura 7.12*

Los sucesos inespecíficos serán del estilo de «una molécula de A en  $V_A$ , 15 moléculas de B en  $V_B$ , 20 moléculas de C en  $V_C$ , etcétera». Aquí se ignoran las etiquetas de las moléculas en cada compartimento; lo que importa es que haya una molécula A *cualquiera* en  $V_A$ , 15 moléculas de B *cualesquiera* en  $V_B$  y 20 moléculas de C *cualesquiera* en  $V_C$ .

Hecho esto, tenemos que calcular las probabilidades de todos los sucesos inespecíficos. Esto no es tan fácil en el caso general. Como en el experimento de expansión, damos por sentado que todos los sucesos específicos tienen la misma probabilidad, que es  $1/W$  (*total*). Por lo tanto, podemos calcular la probabilidad de cada suceso inespecífico simplemente sumando las probabilidades de los sucesos específicos que comprende. Pero aquí un suceso inespecífico no viene determinado por un solo número, como era el caso del proceso de expansión. Para registrar la evolución de los sucesos inespecíficos necesitamos un número único. Ese número no es otro que la información perdida, el número de preguntas binarias que tenemos que hacer para averiguar en qué estado específico se encuentra el sistema, conocido el estado inespecífico. Ese mismo número, más una constante que determina las unidades, es la entropía del sistema, que está definida para cada estado inespecífico<sup>117</sup>. Ya podemos seguir la evolución del sistema desde la retirada de las separaciones hasta que alcanza el estado de equilibrio final. Si lo hacemos, deberíamos comprobar que la información perdida ha aumentado en el proceso.

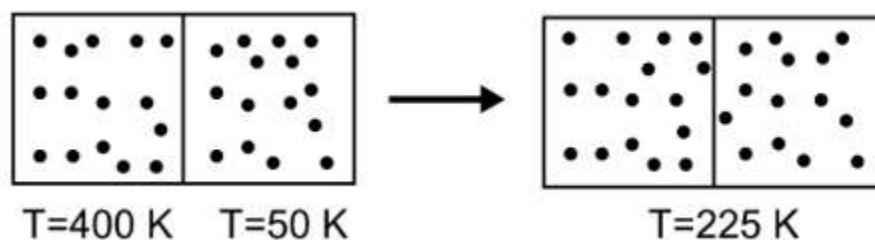
### ***§. Transferencia de calor de un gas caliente a un gas frío.***

En el capítulo 5 hemos descrito un «experimento» con datos que implicaba cambios de temperatura. Allí decíamos que el experimento en cuestión era muy poco realista. Aquí examinamos un experimento real que involucra cambios de temperatura. Este experimento es importante por varias razones. En primer lugar, es

uno de los procesos clásicos donde se verifica un aumento de entropía. De hecho, fue uno de los procesos más simples para los que se formuló la segunda ley (véase el capítulo 1). En segundo lugar, es importante poner de manifiesto que lo que cambia en este proceso es lo mismo que en los otros procesos que hemos visto: la información perdida. En tercer lugar, entenderemos por qué no hemos podido concebir una analogía con dados de este proceso.

Considérese la siguiente experiencia. Inicialmente tenemos dos compartimentos aislados del mismo volumen y con el mismo número de partículas de gas, digamos argón, pero a distinta temperatura: uno a  $T_1 = 50\text{ K}$  y otro a  $T_2 = 400\text{ K}$  (figura 7.13). Si los ponemos en contacto (mediante una placa conductora del calor entre ambos compartimentos, o simplemente retirando la separación y dejando que las partículas de gas se mezclen) observaremos que la temperatura del gas caliente disminuye, mientras que la del gas frío aumenta. En el equilibrio tendremos una temperatura uniforme  $T = 225\text{ K}$  en todo el sistema.

Es evidente que se transfiere calor, o energía térmica, del gas caliente al gas frío. Para entender cómo cambia la entropía en este proceso necesitamos algo de matemáticas. Aquí intentaré ofrecer una impresión cualitativa de dicho cambio entrópico.



*Figura 7.13*

Para empezar, hay que decir que la temperatura está ligada a la distribución de velocidades moleculares. En la figura 7.14 se ilustra la distribución de velocidades de los dos gases en el estado inicial. Como puede verse, la distribución correspondiente al gas frío es más estrecha, mientras que la del gas caliente es más ancha. En el equilibrio térmico, la distribución tiene una anchura intermedia (la curva a trazos en la figura 7.14).

Lo que observamos experimentalmente se interpreta al nivel molecular como el cambio en la distribución de velocidades moleculares. Parte de la energía cinética del gas caliente se transfiere al gas frío, con lo que en el equilibrio final se alcanza una distribución intermedia.

Ahora fijémonos en las dos curvas de la figura 7.15, que muestra las distribuciones de velocidades del sistema entero antes y después del contacto térmico. ¿Podemos decir cuál de las dos distribuciones es más ordenada o *desordenada*? ¿Podemos decir en cuál de las dos distribuciones la *dispersión* de la energía cinética es más uniforme o abarca un rango más amplio de valores?<sup>118</sup> Yo diría que la distribución final (la curva a trazos) parece más ordenada, y que parece tener una dispersión menor. Obviamente, éste es un juicio altamente subjetivo. Por ésta y otras razones que discutiremos en el próximo capítulo, no me parece que la entropía pueda describirse adecuadamente ni como «desorden» ni como «dispersión de la energía». En cambio, identificarla con la información o la

información perdida sí me parece adecuado. Por desgracia, esto no se puede probar sin matemáticas. Me limitaré a citar un resultado demostrado por Shannon en 1948<sup>119</sup>. La distribución final de velocidades es la que tiene *información* mínima, o información perdida máxima. Aunque este resultado no puede intuirse mirando la curva, puede demostrarse matemáticamente.

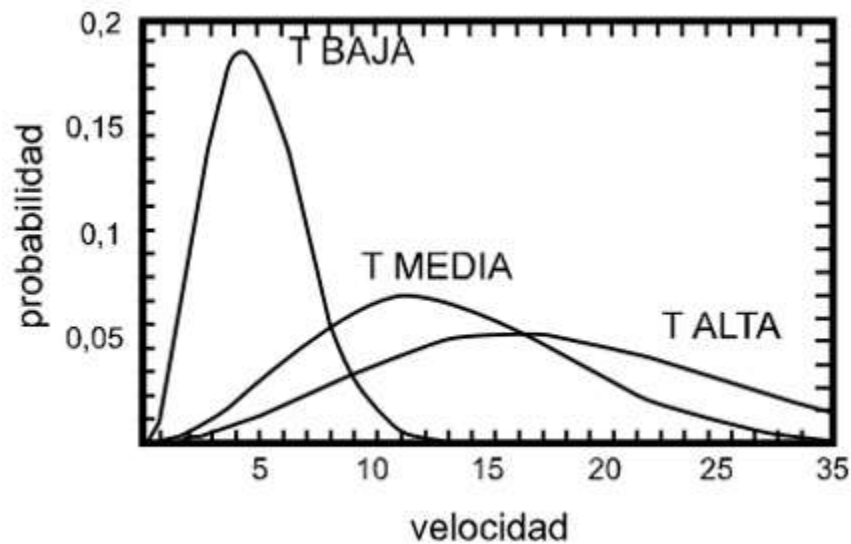


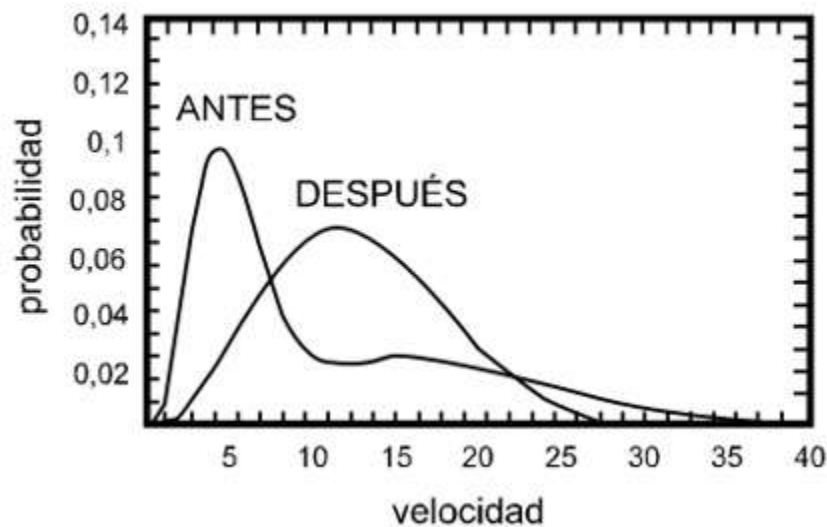
Figura 7.14

De nuevo tenemos un *número* único relacionado con la entropía, cuya evolución puede registrarse<sup>120</sup>.

Por último, recordemos que en el juego de dados descrito en el capítulo 5 empleábamos dados con sólo dos estados, caliente y frío, igualmente probables. Para hacer el experimento más realista, deberíamos haber imaginado dados con un número *infinito* de caras (cada una correspondiente a una velocidad molecular). También tendríamos que haber modificado las reglas del juego para describir

la evolución hacia el equilibrio (no podemos cambiar la velocidad de las partículas al azar, porque la energía cinética total debe conservarse). Todo esto es difícil de trasladar al juego de dados, por lo que uno debería guardarse de tomar ese modelo como algo cercano a un sistema físico real.

En el ejemplo que nos ocupa, hemos seguido experimentalmente un parámetro, la temperatura. Pero la temperatura viene determinada por un número infinito de parámetros: todas las velocidades posibles. Por supuesto, es imposible registrar la velocidad de cada partícula. Lo que registramos es la temperatura, que es una medida de la velocidad molecular *media*.



*Figura 7.15*

Pero la *cosa* que cambia, lo que llamamos entropía, no es más que la cantidad de información perdida; una cantidad que puede expresarse como la distribución de velocidades antes y después del contacto entre los dos gases a diferente temperatura.

La «fuerza impulsora» de este proceso también es la misma que la del proceso de expansión y el juego de dados: el sistema procederá de un estado de baja probabilidad a un estado más probable.

Cuanto más parámetros tenemos para describir los hechos, la contabilidad se hace más difícil. Muy pronto nos encontramos con procesos (como el que tiene lugar desde que un huevo cae al suelo hasta que alcanza el equilibrio, suponiendo que el huevo y el suelo están en una caja aislada del resto del mundo) imposibles de describir. En tales procesos no sólo cambia la distribución de velocidades de las moléculas, sino sus posiciones y sus estados internos (vibraciones, rotaciones, etcétera). Es virtualmente imposible describir estos cambios en detalle, y menos aún calcular las probabilidades de los sucesos posibles. Pero creemos que los principios que gobiernan los cambios que tienen lugar son los mismos que en el experimento de expansión simple. En principio, creemos que existe una magnitud llamada entropía que se describe mejor como la información perdida que cambia en el mismo sentido para cualquier proceso espontáneo dentro de un sistema aislado. En otras palabras, la segunda ley gobierna la multitud de sucesos que se despliega en tales procesos.

Es tentador incluir los procesos vitales en la misma categoría de procesos gobernados por la segunda ley. Pero creo que, en esta fase de nuestra comprensión de la «vida», sería prematuro hacerlo. Es imposible describir y enumerar todos los «parámetros» que cambian en cualquier proceso vital. Personalmente pienso que los procesos

vitales, como los inanimados, también están regidos por la segunda ley. Volveré a hablar de los procesos vitales en el próximo capítulo.

Como hemos visto, el cambio puede describirse a varios «niveles». Al nivel más fundamental, lo que cambia es el *estado* específico, o la *configuración* específica, del sistema. En los juegos de dados, un dado concreto pasa de 2 a 4, por ejemplo; en el proceso de expansión, una partícula concreta pasa del compartimento *I* al compartimento *D*. por ejemplo, y en el proceso de desasimilación, una molécula concreta pasa de la forma *l* a la forma *d*. Lo que podemos registrar es una propiedad del estado inespecífico. Cada estado inespecífico abarca muchos estados específicos, entre los cuales no *queremos* distinguir (como cuando registramos sólo la suma de los resultados de *N* dados) o no *podemos* distinguir *en principio* (como cuando una partícula de gas concreta pasa de *I* a *D*). Lo que registramos es algo que podemos medir (temperatura, frecuencia de ondas electromagnéticas, densidad, etcétera) o percibir con nuestros sentidos (color, olor, frío o calor, etcétera). Si queremos un número o un índice para registrar la evolución del sistema, el mejor y más general es la información perdida, o su equivalente la entropía.

¿Por qué pasa un sistema de un estado inespecífico a otro? Simplemente porque el nuevo estado inespecífico abarca muchos más estados específicos, y en consecuencia es más probable. De ahí que el sistema pase una fracción de tiempo mayor en el estado inespecífico final.



Por último, ¿por qué cuando un sistema alcanza el estado de equilibrio se queda ahí «siempre»? Simplemente porque el número de estados específicos pertenecientes a los estados en la vecindad de la línea de equilibrio es enorme, y cada uno de ellos contribuye con la misma probabilidad.

Así pues, un sistema siempre procederá de un estado inespecífico de baja probabilidad a un estado inespecífico altamente probable. Esto equivale a decir que los sucesos altamente probables ocurrirán con más frecuencia. Esto es de sentido común. Cuando el número de partículas es enorme, el número de sucesos elementales comprendidos por el mismo suceso inespecífico es tan grande que la frecuencia de los estados inespecíficos en la vecindad de la *línea* de equilibrio, a lo que nos referimos como *estado* de equilibrio, es prácticamente uno. Por lo tanto, cuando se alcanza este estado, el sistema se mantendrá «siempre» en él. Se trata de la misma conclusión a la que hemos llegado con el juego de dados descrito en el capítulo 6.

En este punto, ya hemos adquirido una comprensión plena del porqué de la evolución de dos procesos: la expansión de un gas ideal y el proceso de desasimilación.

Si queremos, podemos formular nuestra propia versión de la segunda ley: *un gas ideal que ocupa un volumen inicial  $V$  siempre se expandirá espontáneamente para ocupar un volumen mayor, digamos  $2V$ ; si el sistema está aislado, nunca observaremos el proceso inverso*. Es fácil probar que esta formulación es equivalente a las de Clausius y Kelvin (véase el capítulo 1). Para verlo,

supongamos que nuestra formulación de la segunda ley no se cumple; esto es, a veces un gas que ocupa un volumen  $2V$  se condensa espontáneamente en un volumen  $V$ . Si esto fuera cierto, podríamos recurrir a un truco simple para levantar pesos: sólo tendríamos que colocar el peso sobre el gas comprimido y esperar que volviera a expandirse. La contracción espontánea también podría servir para transferir calor de un cuerpo frío a uno caliente. El truco es el mismo que el empleado para demostrar la equivalencia de las formulaciones de Kelvin y de Clausius.

### **§. Test de comprensión de la segunda ley.**

Ahora que hemos entendido la actuación de la segunda ley en los juegos de dados y hemos traducido el lenguaje de los dados al lenguaje de las partículas reales en un recipiente, es hora de que el lector se examine con el mismo diseño experimental que se muestra en la figura 7.2. Supongamos que nunca hemos oído hablar de la segunda ley, pero conocemos y aceptamos los siguientes supuestos<sup>121</sup>:

- 1)** La materia está constituida por gran número de átomos o moléculas, del orden de  $10^{23}$ .
- 2)** Un sistema de  $10^{23}$  átomos de un gas ideal puede estar en multitud de estados específicos (o sucesos específicos, o configuraciones específicas) que se suponen igualmente probables.
- 3)** Todos los sucesos específicos pueden agruparse en sucesos inespecíficos (como los de la figura 7.5).

- 4)** Cada suceso inespecífico (excepto 0 y  $N$ ) consiste en un enorme número de sucesos específicos indiscernibles (como los del lado derecho de la figura 7.5).
- 5)** La probabilidad de cada suceso inespecífico es la suma de las probabilidades de *todos* los sucesos específicos que lo constituyen. El tiempo relativo que pasa el sistema en cada suceso inespecífico es proporcional a su probabilidad.
- 6)** Hay un suceso inespecífico que contiene un número máximo de sucesos específicos. Por lo tanto, el sistema pasa la *mayor* parte del tiempo en este estado maximal.
- 7)** No podemos distinguir entre sucesos inespecíficos que difieren sólo en un número pequeño de partículas (digamos entre inespecífico- $10^{23}$  e inespecífico- $10^{23} \pm 1000$ , o entre inespecífico- $10^{23}$  e inespecífico- $10^{23} \pm 10^6$ ).

El supuesto 7° es esencial. En mi opinión, este supuesto (que en realidad es un hecho) no se destaca lo suficiente en los libros de *texto* de termodinámica. Sin él, podríamos seguir toda la construcción de la segunda ley, pero al final no llegaríamos a la conclusión de que la entropía debe mantenerse *estrictamente* constante en el equilibrio, y debe cambiar *estrictamente* en un solo sentido (ascendente). El hecho de que no *observemos* ningún decrecimiento de la entropía en el equilibrio, y sí *observemos* una entropía estrictamente creciente en un proceso espontáneo, se debe a dos razones:

**1)** Hay pequeñas fluctuaciones, y ocurren con mucha frecuencia, pero son *inobservables* e *inconmensurables*, porque son demasiado pequeñas para poderse ver o medir.

**2)** Las fluctuaciones *observables* y *medibles* no son imposibles, pero son tan extremadamente raras que nunca resultan *observables* ni *medibles*.

Ahora formularé preguntas para que el lector las responda y luego compruebe si sus respuestas coinciden con las mías (entre paréntesis).

Partimos de un sistema de  $N$  partículas (con  $N$  del orden de  $10^{23}$ ) en un volumen  $V$ . En la figura 7.2 se muestra un sistema simplificado a modo de ilustración. Inicialmente, la separación entre ambos compartimentos no permite que las partículas crucen de un lado a otro.

**Pregunta:** ¿Qué observamos?

**Respuesta:** (Nada; cualquier magnitud medible tendrá el mismo valor en cada punto del sistema, y ese valor no cambia con el tiempo).

Luego abrimos una minúscula portezuela entre los compartimentos izquierdo ( $I$ ) y derecho ( $D$ ), lo bastante pequeña para que sólo una partícula la atraviese cada cierto intervalo corto de tiempo, digamos  $t = 10^{-8}$  segundos<sup>122</sup>. En este intervalo de tiempo hay una probabilidad, que denotaremos como  $p^1$ , de que una partícula *específica* atraviese la portezuela. Puesto que los átomos son

idénticos, cualquier partícula tiene la misma probabilidad  $p^1$  de pasar al otro lado.

**Pregunta:** ¿Cuál es la probabilidad de que *alguna* de las  $N$  partículas atraviese la portezuela dentro del intervalo de tiempo  $t$ ?

**Respuesta:** (Obviamente, dado que hemos supuesto que la portezuela es lo bastante pequeña para que no puedan cruzarla dos partículas en el intervalo de tiempo  $t$ , la probabilidad de que la partícula  $l$  pase al otro lado es  $p_l$ , la probabilidad de que la partícula 2 pase al otro lado es  $p_2$ ... y la probabilidad de que la partícula  $N$  pase al otro lado es  $p_N$ . Puesto que todos estos sucesos son disjuntos, la probabilidad de que alguna partícula pase al otro lado es  $N$  veces  $p_1$ , o  $N \times p_1$ ).

**Pregunta:** Muy bien. ¿Qué ocurrirá en el primer intervalo de tiempo  $t$ ?

**Respuesta:** (O una partícula pasará de  $I$  a  $D$ , o no ocurrirá nada).

**Pregunta:** Correcto. Supongamos que tenemos que esperar un intervalo  $t$ , y otro más, hasta que la primera partícula cruza la portezuela.

**Pregunta:** ¿Qué partícula será la primera en cruzar?

**Respuesta:** (No sabemos *cuál* de las partículas cruzará la portezuela, pero sea cual sea, sólo puede pasar de  $I$  a  $D$ ).

**Pregunta:** ¿Por qué?

**Respuesta:** (Simplemente porque al principio no hay partículas en  $D$ , por lo que la primera en cruzar debe proceder de  $I$ ).

**Pregunta:** Correcto. Ahora esperemos hasta que la siguiente partícula atraviese la portezuela. ¿Qué ocurrirá?

**Respuesta:** (Dado que ahora tenemos  $N - 1$  partículas en  $I$  y sólo una en  $D$ , la probabilidad de que alguna de las  $N - 1$  partículas que están en  $I$  pase al otro lado es mucho mayor que la probabilidad de que la única partícula en  $D$  vuelva a  $I$ . Así pues, es mucho más probable [las posibilidades son  $N - 1$  a  $1$ ] que observemos el paso de una segunda partícula de  $I$  a  $D$ ).

**Pregunta:** Correcto. Esperemos de nuevo a que otra partícula cruce la portezuela.

¿Qué ocurrirá?

**Respuesta:** (De nuevo, puesto que las posibilidades relativas de que una partícula pase de  $I$  a  $D$  y de  $D$  a  $I$  son  $N - 2$  a  $2$ , es mucho más probable que veamos pasar una tercera partícula de  $I$  a  $D$ ).

**Pregunta:** En efecto, ¿y en el siguiente paso?

**Respuesta:** (Lo mismo. Ahora las posibilidades de que alguna partícula pase de  $I$  a  $D$  son  $N - 3$  a  $3$ , lo cual es algo menos que antes, pero, dado que  $N = 10^{23}$ , las posibilidades son abrumadoramente favorables al paso de una partícula de  $I$  a  $D$  y no al revés).

**Pregunta:** ¿Qué ocurrirá en los siguientes millones, o billones, de pasos?

**Respuesta:** (La respuesta vuelve a ser la misma cada vez. Si hay  $n$  partículas en  $D$  y  $N - n$  partículas en  $I$ , y si  $n$  es muy pequeño en comparación con  $N/2$ , un millón o incluso un billón sigue siendo un número muy pequeño en comparación con  $10^{23}$ , así que seguirá siendo más probable el paso de una partícula de  $I$  a  $D$  que en sentido contrario).

**Pregunta:** ¿Qué pasa cuando  $n$  se hace igual (o casi igual) a  $N/2$ ?

**Respuesta:** (Las posibilidades de pasar de  $I$  a  $D$  son aproximadamente  $N - n$  a  $n$ , lo que para  $n = N/2$  significa  $N/2 : N/2$  o, equivalentemente, 1:1).

**Pregunta:** ¿Y qué ocurrirá?

**Respuesta:** (Una cosa es lo que *ocurrirá* y otra lo que veremos. Lo que *ocurrirá* es que, por término medio, pasarán tantas partículas de  $I$  a  $D$  como de  $D$  a  $I$ . Lo que *veremos* es una ausencia de cambio. Si  $n$  se desvía de  $N/2$  en unos cuantos miles o millones de partículas, la desviación será demasiado pequeña para ser apreciable. Si la desviación es lo bastante grande, entonces quizá podríamos *verla o medirla*. Pero una desviación de esa magnitud es muy improbable, así que **nunca** la observaremos).

**Pregunta:** Entonces, ¿qué veremos o mediremos de ahí en adelante?

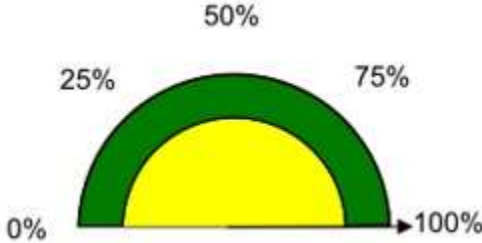
**Respuesta:** (No habrá cambios observables o medibles; el sistema alcanzará un estado de equilibrio donde el número de partículas en  $I$  y el número de partículas en  $D$  serán aproximadamente iguales).

**Pregunta:** Si las respuestas del lector han sido correctas, ha pasado el examen. Una pregunta más para ver si ha entendido el proceso de desasimilación. Supongamos que partimos de  $N$  moléculas, todas de la forma  $d$ , e introducimos una pequeña porción de catalizador. Siempre que una molécula, *cualquier*  $r$  molécula, tropieza con el catalizador, hay una probabilidad  $p_1$ , de que pase de  $d$  a  $l$  o de  $l$  a  $d$ . ¿Qué observaremos en este sistema?

**Respuesta:** (Valen las mismas respuestas de antes, cambiando los compartimentos  $I$  y  $D$  por los isómeros  $l$  y  $d$ . En vez de una portezuela que permite pasar de  $I$  a  $D$  y viceversa, el catalizador permite transformar  $d$  en  $l$  o  $l$  en  $d$ . Con esta traducción del lenguaje de los compartimentos  $I$  y  $D$  al lenguaje de los isómeros  $d$  y  $l$ , las respuestas son idénticas a las anteriores).

Llegados aquí, el lector ha entendido dos ejemplos del comportamiento de la entropía en un proceso espontáneo. Ha pasado el examen, y yo he cumplido mi misión. Si tiene interés en compartir algunas de mis especulaciones personales, le invito a leer el próximo capítulo.





*Fin del capítulo 7*

## Capítulo 8

### Reflexiones sobre el estatuto de la segunda ley de la termodinámica como ley física

#### Contenido:

§. *¿Cuál es la fuente del misterio?*

§. *La asociación de la entropía con el «desorden».*

§. *La asociación de la entropía con la información perdida.*

§. *¿Está íntimamente asociada la segunda ley con la flecha del tiempo?*

§. *¿Es la segunda ley de la termodinámica una ley física?*

§. *¿Podemos prescindir de la segunda ley?*

Si el lector me ha seguido hasta tan lejos y ha llegado a este último capítulo, ya debe sentirse cómodo con el concepto de entropía y con la segunda ley de la termodinámica. Si lanza un par de dados (reales) muchas veces, ya no debería sorprenderle que el valor  $\text{suma} = 7$  aparezca más veces que cualquier otro. Tampoco debería sorprenderle que, si lanza un centenar de dados simplificados (con «0» y «1» como únicos resultados posibles), la suma de los resultados de cada dado esté casi siempre en torno a 50. Y si lanza un millón de dados simplificados, ya no le causará perplejidad que «**nunca**» obtenga  $\text{suma} = 0$  o  $\text{suma} = 1.000.000$ . Sabemos que ambos resultados son *posibles*, pero tan infrecuentes que podemos pasarnos la vida entera jugando sin observarlos ni una sola vez.

Esto ya no nos sorprende porque el sentido común nos dice que los sucesos altamente probables se observarán con más frecuencia, mientras que los sucesos con una probabilidad extremadamente baja «**nunca**» se observarán.

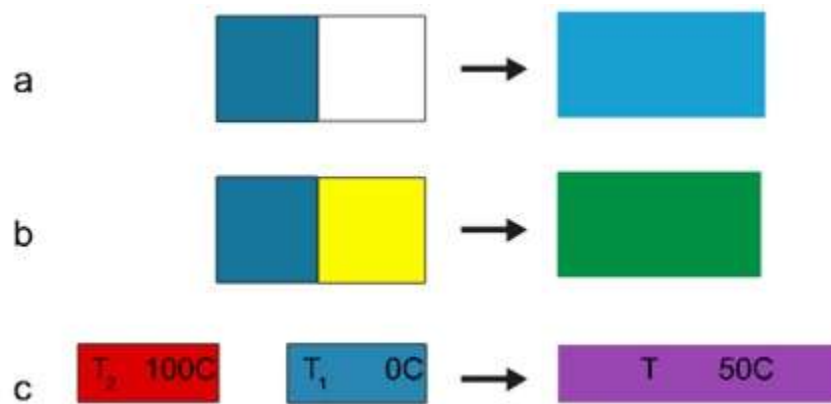
Si uno nunca ha oído hablar de la constitución atómica de la materia y observa que un gas coloreado inicialmente contenido en un compartimento fluye hasta llenar los dos compartimentos de un recipiente, tal como se muestra en la figura 8.1a; o que dos compartimentos con dos gases diferentes (uno amarillo y otro azul, por ejemplo) se transforman en un todo de color (verde) homogéneo, tal como se muestra en la figura 8.1 b; o que un cuerpo caliente a  $T_2 = 100\text{ °C}$ , tras entrar en contacto con un cuerpo frío a  $T_1 = 0\text{ °C}$ , se enfría hasta una temperatura intermedia, tal como se muestra en la figura 8.1c, uno *debería* sentirse perplejo. ¿Por qué fluye el gas de una cámara a otra? ¿Por qué dos gases coloreados se transforman en una mezcla monocolor? ¿Por qué las temperaturas del cuerpo caliente y del cuerpo frío se transforman en una única temperatura intermedia? ¿Cuáles son las fuerzas ocultas que impulsan todos estos fenómenos, siempre en el mismo sentido y nunca en el opuesto? De hecho, hasta que no se descubrió y aceptó la naturaleza atómica de la materia<sup>123</sup>, todos estos fenómenos estuvieron envueltos en el misterio.

«Misterio» quizá no sea la palabra adecuada. La palabra «desconcerto» puede que describa mejor la situación. La única razón para sentirnos desconcertados es que no tengamos ninguna comprensión de por qué los fenómenos descritos proceden en un

sentido particular. Pero lo mismo vale para cualquier ley física. Cuando se acepta la ley como un hecho, nos parece que es natural y tiene sentido<sup>124</sup>. La segunda ley no es una excepción: el hecho de que tales procesos sean tan comunes y corrientes implica que progresivamente se vayan percibiendo como «naturales» y «con sentido».

Ahora bien, si sabemos que un gas consiste en un gran número de átomos o moléculas, del orden de  $10^{23}$ , agitándose y colisionando incesantemente millones de veces por segundo, entonces sabemos que las leyes de la probabilidad deben imponerse, y se acabó el misterio. No hay más misterio en todos esos procesos que en el hecho de que no nos toque el gordo en la lotería.

Me gustaría creer que, a estas alturas, incluso quienes nunca hayan oído hablar de la «entropía» y la «segunda ley» antes de leer este libro se estarán preguntando por qué la palabra «misterio» se ha asociado con estos conceptos. Ya no hay motivo para inquietarse al oír la palabra «entropía» o desconcertarse por la «fuerza» invisible que impulsa al gas a llenar el compartimento vacío. Tampoco hay necesidad de seguir leyendo este libro. Mi misión de explicar los «misterios de la segunda ley» se ha completado en el capítulo anterior, donde hemos alcanzado una comprensión plena de la segunda ley.

*Figura 8.1*

En este capítulo me tomaré la libertad de exponer algunas reflexiones personales sobre la segunda ley. Algunas de mis ideas no cuentan con un respaldo universal. Aun así, me he aventurado a expresarlas y arriesgarme a suscitar la crítica de científicos cuyo parecer puede ser diferente y más correcto que el mío.

En este capítulo planteo algunas preguntas e intento contestarlas. Comenzaré con una relativamente inocente: ¿por qué la segunda ley ha estado rodeada de misterio durante tanto tiempo? ¿Es porque contiene una semilla de conflicto entre la simetría temporal de las ecuaciones del movimiento y la irreversibilidad observada de los procesos naturales? Luego discutiré unas cuantas preguntas más, cuyas respuestas todavía son objeto de controversia. ¿Es realmente la entropía una medida del «desorden», y qué significa el orden o desorden de un sistema? ¿Cómo ha invadido la «información» un «territorio» que solía albergar sólo entidades físicamente medibles? ¿Está la segunda ley íntimamente asociada con la flecha del tiempo? ¿Cuál es el «estatuto» de la segunda ley de la termodinámica en comparación con otras leyes de la naturaleza? ¿Es también posible

que algún día la ciencia prescindiera de la segunda ley de la termodinámica al considerarla una redundancia, una reliquia de la visión pre atomista de la materia que no enriquece nuestro conocimiento del funcionamiento de la naturaleza?

### ***§. ¿Cuál es la fuente del misterio?***

En mi opinión, hay varias razones que dan pie al misterio que envuelve la segunda ley. La primera, y tal vez la más simple, es la propia palabra «entropía». Todo el mundo está familiarizado con conceptos como fuerza, trabajo, energía y demás. Cuando uno estudia física, encuentra las mismas palabras, aunque a veces con un significado bien diferente del ordinario. La cantidad de «trabajo» que me ha llevado escribir este libro no se mide en las mismas unidades de trabajo (o energía) que se usan en física. Igualmente, la «fuerza» ejercida sobre un político para que impulse un proyecto de ley no es la clase de fuerza que maneja la física. No obstante, los conceptos precisos de trabajo y fuerza tal como los define la física retienen algo del aire cualitativo de su significado cotidiano. Por eso no es difícil acomodarse al significado nuevo y más preciso conferido por la física a conceptos familiares como fuerza, energía o trabajo. En cambio, cuando uno tiene su primer encuentro con un neologismo como «entropía», levanta un aire de misterio que tiene un efecto extraño e incómodo. Si uno no es estudiante de física o química y por casualidad oye hablar de «entropía» a los científicos, le parecerá que ese concepto está más allá de su alcance, y más aún si los propios científicos se refieren a la entropía como un misterio.

León Cooper (1968), justo después de citar la explicación de Clausius de sus razones para la elección del término «entropía», comenta<sup>125</sup>:

*Al hacerlo así, en vez de extraer un nombre del cuerpo del lenguaje corriente (digamos «calor perdido»), consiguió acuñar una palabra que significaba lo mismo para todo el mundo: «nada».*

En líneas generales estoy de acuerdo con este comentario de Cooper, pero tengo dos objeciones. En primer lugar, la palabra «entropía» es desafortunadamente engañosa, lo cual no quiere decir que carezca de significado. Abramos un diccionario y leeremos: «Entropía, del griego antiguo, cambio, giro literario». Es evidente que el concepto de entropía no se corresponde con «transformación», ni «cambio», ni «giro». Como hemos visto, la entropía, tal como se define tanto en la formulación no atomista como en la formulación atomista de la segunda ley, es algo que cambia. Pero no es la «transformación» lo que se transforma, no es el «cambio» lo que cambia, y desde luego no es ningún «giro» lo que evoluciona.

Mi segunda objeción tiene que ver con la sugerencia casual de Cooper de que «calor perdido» podría haber sido una denominación más apropiada. Ciertamente, «calor perdido» tiene más sentido que «entropía». También concuerda con el significado universal atribuido a la entropía como «medida de la energía no disponible»<sup>126</sup>. Volveré a este significado de la entropía en la sección «La asociación de la entropía con la información perdida».

Hay una segunda razón para la aureola de misterio de la entropía, aparte de que sea un concepto con el que no estamos familiarizados. El hecho mismo de que tantos autores *digan* que la entropía es misteriosa la *convierte* en misteriosa. Esto se aplica tanto a divulgadores de la ciencia como a autores de libros de *texto* de termodinámica.

Un ejemplo lo brinda un libro muy reciente para el gran público brillantemente escrito por Brian Greene, donde podemos leer<sup>127</sup>:

*Y entre las características de la experiencia común que se han resistido a la explicación completa está una que se adentra en uno de los misterios no resueltos más profundos de la física moderna, lo que el gran físico británico Sir Arthur Eddington llamó «la flecha del tiempo».*

A continuación, Greene explica el comportamiento de la entropía recurriendo a las páginas de *Guerra y paz*, la novela épica de Tolstoi. Hay muchas maneras de desordenar las páginas de la citada novela, pero sólo una (o dos) de ponerlas en el orden correcto. A mí me parece que la cita anterior contribuye a perpetuar un misterio que ya no existe. Con unas cuantas frases más, Greene podría haber explicado fácilmente la «entropía», igual que ha explicado tantos otros conceptos de la física moderna. Por eso me extraña que diga que es «uno de los misterios no resueltos más profundos de la física moderna», cuando lo que debería haber escrito es que el misterio que envolvía la segunda ley ya es historia. Hay muchos autores que han escrito sobre la segunda ley con la



intención de *explicarla*, pero que de hecho han acabado perpetuando el misterio<sup>128</sup>.

Un ejemplo clásico es el libro de Atkins, *La segunda ley*, que comienza con las siguientes palabras<sup>129</sup>:

*Ninguna otra parte de la ciencia ha contribuido tanto a la liberación del espíritu humano como la segunda ley de la termodinámica. Pero, al mismo tiempo, pocos sectores de la ciencia se han mantenido tan recónditos. La sola mención de la segunda ley suscita visiones de pesados motores de vapor, matemáticas intrincadas, y una infinitamente incomprensible entropía.*

¿Cómo debemos interpretar estas tres frases? Por mi parte, no estoy en absoluto de acuerdo con ninguna de ellas. La primera frase es ambigua. No acabo de entender qué tiene que ver la segunda ley con «la liberación del espíritu humano». Pero lo que pretendo aquí no es discutir las opiniones de Atkins sobre la segunda ley. Si cito las tres frases que abren el libro de Atkins es para mostrar cómo contribuyen a perpetuar el misterio. La primera suscita grandes expectativas, y presumiblemente nos anima a leer el libro. Pero estas expectativas se ven en gran medida frustradas a medida que vamos leyendo. Las otras dos frases son manifiestamente descorazonadoras (una entropía «infinitamente incomprensible» no estimula precisamente el apetito a la hora de hincarle el diente). En muchos libros de *texto* de termodinámica, los autores dedican mucho tiempo a examinar diferentes manifestaciones de la segunda

ley, pero muy poco a lo que tienen en *común* todas esas manifestaciones. En vez de seleccionar uno o dos ejemplos simples de procesos que constituyen manifestaciones de la segunda ley, se presenta un cúmulo de ejemplos, algunos demasiado complicados para que resulten comprensibles. Leyendo todo eso, uno es incapaz de ver el bosque a través de los árboles<sup>130</sup>

En el capítulo 7 hemos examinado dos ejemplos relativamente simples que ponen de manifiesto la actuación de la segunda ley. En ambos casos sólo cambiaba un parámetro. En el primer ejemplo observábamos un cambio en la información *posicional* (partículas inicialmente confinadas en un volumen dado se dispersan y ocupan un volumen mayor). En el segundo ejemplo lo que cambiaba era la *identidad* de las partículas. En el experimento de la transferencia de calor de un cuerpo caliente a otro frío lo que cambiaba era la distribución de velocidades. Por supuesto, hay procesos más complicados que implican cambios en numerosos parámetros (o grados de libertad). A veces es difícil enumerarlos todos. Por ejemplo, los procesos implicados en la rotura de un huevo al caer al suelo implican cambios de posición, de identidad, de distribución de velocidades, de orientaciones y de rotaciones internas de las moléculas. Todo esto complica la descripción del proceso, pero el *principio* de la segunda ley es el mismo. Para entenderlo basta con fijarse en un proceso simple, y cuanto más simple mejor y más fácil de entender.

El libro de Atkins dedica un capítulo entero a «ver cómo la segunda ley da cuenta de la emergencia de las formas intrincadamente

ordenadas características de la vida»<sup>131</sup>. En mi opinión, esta promesa no se cumple. He leído el libro de Atkins de cabo a rabo y no he conseguido ver «cómo la segunda ley da cuenta de la emergencia de las formas intrincadamente ordenadas características de la vida».

Las promesas de esta clase contribuyen a la frustración de los lectores y les disuaden de esforzarse en comprender la segunda ley. Los fenómenos de la vida involucran procesos extremadamente complicados. Todo el mundo, científicos y no científicos, «sabe» que la vida es un fenómeno complejo, muchos de cuyos aspectos, incluida la mente y la conciencia, todavía no se comprenden bien. Así pues, hablar de la *vida* en un libro que se supone que *explica* la segunda ley deja al lector con la impresión de que la entropía, como la vida, es descorazonadoramente difícil de entender y muy misteriosa.

Es cierto que muchos científicos creen que todos los aspectos de la vida, incluida la conciencia, están sometidos en última instancia a las leyes de la física y la química, y que no hay ninguna entidad separada, como la mente, que no sucumba a dichas leyes. Personalmente también pienso así. Pero este argumento está lejos de haber sido probado y comprendido. Podría ser que algunos aspectos de la vida requieran una extensión de las leyes de la física y la química hoy conocidas, como ha sido sugerido lúcidamente por Penrose<sup>132</sup>. En mi opinión, por lo tanto, es prematuro tratar la vida como cualquier otro ejemplo de proceso termodinámico, por

fascinante que sea, en el contexto de la explicación de la segunda ley.

El misterio asociado a la entropía obedece también a otras razones más profundas. Durante más de un siglo, la segunda ley estuvo formulada en términos puramente termodinámicos, e incluso tras el advenimiento de la teoría molecular de la materia se siguió enseñando como una ley termodinámica, en términos macroscópicos. Este enfoque conduce inevitablemente a un callejón sin salida. De hecho, como proclamó (correctamente) mi primera profesora de termodinámica (véase el prefacio), no hay esperanza de comprender la segunda ley *dentro* del marco de la termodinámica. Para ver la luz, debemos recorrer los túneles de la termodinámica estadística, esto es, la formulación de la segunda ley sobre la base de un número inmenso de partículas indistinguibles. Si examinamos las diferentes formulaciones de la segunda ley dentro de la termodinámica clásica, se puede demostrar su equivalencia mutua. Se puede demostrar que la entropía que induce un proceso tal como la expansión de un gas es la misma que induce otro proceso tal como la mezcla de dos gases distintos. Algo más difícil es demostrar que también es la misma entropía que induce una reacción química, o la mezcla de dos líquidos. Y es imposible demostrar que es la misma entropía responsable del estropicio creado por el reventón de un huevo (aunque damos por sentado que sí es la misma, y que algún día, cuando el aparato matemático de la termodinámica estadística sea más poderoso, seremos capaces de demostrarlo). Pero, con independencia de cuántos procesos

espontáneos desentrañemos y podamos atribuir al inexorable incremento de entropía, al final nos encontraremos en un callejón sin salida. Nunca entenderemos cuál es la fuente subyacente de este ascenso irreversible de la entropía. La termodinámica no nos revela los sucesos moleculares subyacentes.

De no haberse descubierto y aceptado la naturaleza atómica de la materia<sup>133</sup>, nunca habríamos podido explicar la segunda ley, y ésta habría permanecido para siempre en el misterio.

Ésa era la situación a finales del siglo XIX y comienzos del XX. Aunque la teoría cinética del calor había conseguido explicar la presión, la temperatura e incluso la entropía en términos de los movimientos de átomos y moléculas, estas explicaciones se consideraban meras *hipótesis*. Científicos importantes e influyentes como Ostwald y Mach pensaban que el concepto de átomo, y las teorías basadas en su existencia, no deberían formar parte de la física. Su argumento era que, dado que nadie había «visto» los átomos de manera directa ni indirecta, su incorporación a cualquier teoría de la materia debía considerarse puramente especulativa.

La situación cambió drásticamente a comienzos del siglo XX. Fue Einstein quien contribuyó decisivamente a la derrota del éter y preparó el camino para la victoria de los atomistas. La aceptación de la interpretación molecular de la entropía de Boltzmann se hizo inevitable (véase el capítulo 1).

Pero el abrazo de la interpretación de Boltzmann no disipó el misterio. Se había abierto de par en par la puerta hacia una

comprensión plena de la naturaleza de la entropía, a pesar de lo cual el misterio persistió. ¿Por qué?

No estoy seguro de conocer la respuesta a esta pregunta. Pero sé, por experiencia *propia*, por qué el misterio ha estado flotando en el aire durante tanto tiempo. La razón tiene que ver, creo, con la controversia no resuelta suscitada por la asociación de la entropía con el «desorden», con la «información perdida» y con la «flecha del tiempo». Examinaré cada una de estas cuestiones por separado.

### **§. La asociación de la entropía con el «desorden».**

La asociación de la entropía con el desorden quizá sea la más antigua de las tres, pues hunde sus raíces en la interpretación de Boltzmann de la entropía. Los conceptos de orden y desorden son vagos y altamente subjetivos, y aunque es cierto que en muchos casos se puede correlacionar el incremento de entropía con un incremento del desorden, decir que «el proceder de la naturaleza es ir del orden al desorden» es lo mismo que decir que «el proceder de la naturaleza es ir de una entropía baja a una entropía elevada». Esto no explica el aumento del desorden en un proceso espontáneo. No hay ninguna ley de la naturaleza que imponga que los sistemas tienen que evolucionar del orden al desorden.

De hecho, no es cierto que un sistema evolucione siempre del orden al desorden. Si rechazo la identificación de la entropía con el desorden es, más que nada, porque orden y desorden son conceptos mal definidos y muy borrosos. Son demasiado subjetivos, a veces

ambiguos y en ocasiones totalmente engañosos. Consideremos los siguientes ejemplos:

En la figura 8.2 tenemos tres sistemas. A la izquierda tenemos  $N$  átomos de gas en un volumen  $V$ . En el centro, una parte de los  $N$  átomos ocupa un volumen  $2V$ . A la derecha, los  $N$  átomos se han distribuido uniformemente por todo el volumen  $2V$ . Fijémonos bien. ¿Alguien puede decir cuál de los tres sistemas es el más ordenado? Se podría argumentar que el sistema de la izquierda, donde los  $N$  átomos están confinados en la mitad del volumen disponible, está más ordenado que el de la derecha, donde los átomos están dispersos por el volumen entero. Esto es plausible cuando la entropía se asocia con la información perdida (véase más adelante) pero, en lo que respecta al orden, personalmente no veo que ninguno de los sistemas de la figura esté más ordenado o desordenado que el resto.

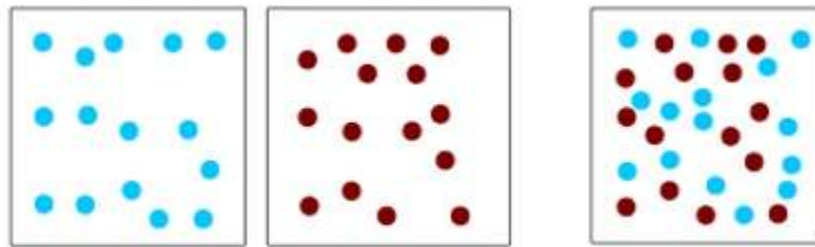
Ahora consideremos los dos sistemas representados en la figura 8.3. En el sistema de la izquierda tenemos  $N$  partículas azules en una caja de volumen  $V$ , y  $N$  partículas rojas en otra caja del mismo volumen. A la derecha tenemos todos los átomos mezclados dentro del mismo volumen  $V$ . ¿Cuál de los sistemas está más ordenado? A mi juicio, el sistema de la izquierda está más ordenado, porque las partículas azules y las rojas están en cajas separadas, mientras que en el sistema de la derecha están mezcladas. «Mezclado» es, desde luego, un estado desordenado, coloquialmente hablando. De hecho, el mismo Gibbs describió la entropía como «grado de mezcla». Pero se puede demostrar que los dos sistemas mencionados tienen igual

entropía. Así pues, la asociación de la mezcla con el incremento del desorden y, por ende, de entropía no es más que una ilusión. El problema con los conceptos de orden y desorden es que no están bien definidos (el «orden», como la «estructura» y la «belleza», está en los ojos del observador).

No conozco ninguna definición *precisa* de orden y desorden que pueda servir para validar la interpretación de la entropía como una medida de desorden. Aun así, Callen (1985), en su conocido libro de termodinámica, escribe (pág. 380):



*Figura 8.2*



*Figura 8.3*

*De hecho, el marco conceptual de la «teoría de la información» erigido por Claude Shannon a finales de los cuarenta proporciona una base para la interpretación de la entropía en términos de la medida del desorden de Shannon.*



Y en la página siguiente Callen concluye:

*Para un sistema cerrado la entropía se corresponde con la medida cuantitativa de Shannon del máximo desorden posible en la distribución del sistema entre sus microestados permisibles.*

He enseñado termodinámica durante muchos años, y a menudo me he basado en el libro de Callen. Es un *texto* excelente. Pero, con el debido respeto a Callen y su libro, debo decir que los pasajes citados confunden al lector. He leído concienzudamente el artículo de Shannon «The Mathematical Theory of Communication», palabra por palabra y de cabo a rabo, y en ninguna parte he visto que Shannon defina o haga referencia al «desorden». Creo que Callen tergiversa a Shannon en los pasajes citados y en el resto de ese capítulo de su libro. ¿Para qué? Pues para «legitimizar» el recurso al concepto de *desorden* en la interpretación de la entropía. Esto no se corresponde con lo que escribe Shannon. Lo que Callen dice que es una definición de *desorden* en realidad es la definición de *información* de Shannon. En mi opinión, la redefinición de la información como desorden por parte de Callen no contribuye a la comprensión de la entropía. Como hemos visto en los capítulos 2 y 6, la concepción cualitativa y altamente subjetiva de la información se ha transformado, por obra de Shannon, en una medida cuantitativa y objetiva. Como también hemos visto, el concepto de información así destilado retiene el significado ordinario de la palabra «información». No ocurre lo mismo con el desorden. Por supuesto, uno puede definirlo como hace Callen, recurriendo

precisamente a la definición de *información* de Shannon. Pero, por desgracia, esta definición de «desorden» no tiene en general el mismo significado que tiene en el lenguaje ordinario, como demuestran los ejemplos anteriores<sup>134</sup>.

Para concluir esta sección, yo diría que el incremento del desorden (o cualquier término equivalente) puede asociarse a veces, pero no siempre, con el incremento de la entropía. Por otro lado, la «información» *siempre* puede asociarse con la entropía, lo que la hace superior al desorden.

### **§. La asociación de la entropía con la información perdida.**

Desde que Shannon propuso su definición del concepto de información, ésta se ha demostrado muy adecuada para la interpretación de la entropía<sup>135</sup>. En mi opinión, el concepto de información perdida no sólo ha contribuido a nuestra comprensión de la *cosa* que cambia (eso que llamamos entropía), sino que también nos ha acercado más al paso final de entender el comportamiento de la entropía como algo de sentido común. Pero esta opinión no es universal.

Sobre esta cuestión, Callen (1983, pág. 384) escribe: «Hay una escuela de termodinámica que contempla la disciplina como una ciencia de predicción subjetiva».

En un párrafo ya citado, anterior a los pasajes donde identifica la entropía con el desorden, Callen escribe:

*El concepto de probabilidad tiene dos interpretaciones distintas en el uso corriente. La «probabilidad objetiva» se refiere a una*

*frecuencia, o una ocurrencia fraccionaria; la afirmación de que «la probabilidad de que un recién nacido sea varón es algo menor que una mitad» es un enunciado sobre datos censales. La «probabilidad subjetiva» es una medida de una expectativa basada en una información subóptima. La evaluación por parte de un médico de la probabilidad (subjetiva) de que una criatura aún no nacida sea varón depende del conocimiento que tiene el médico de las historias familiares de los progenitores, de los datos acumulados sobre niveles hormonales maternos, de la claridad creciente de las imágenes por ultrasonidos y, finalmente, de una estimación bien informada, pero que sigue siendo subjetiva.*

Como he explicado en el capítulo 2 (en la sección «Probabilidad condicionada y probabilidad subjetiva»), discrepo de Callen en un sentido fundamental. Los dos ejemplos de Callen pueden ser objetivos o subjetivos según la condición *dada* o el conocimiento relevante que se tiene.

He vuelto a citar este párrafo del libro de Callen para mostrar que su argumento en pro del «desorden» es esencialmente falaz. Creo que Callen ha aplicado equivocadamente el argumento probabilístico para tachar la información de «subjetiva» y defender la identificación de la entropía con el desorden, que para él es «objetivo».

Un visitante extraterrestre que no tenga información sobre el censo de recién nacidos no tendría ni idea de las probabilidades de ser

niño o niña, y su asignación de dichas probabilidades sería totalmente subjetiva. Por otro lado, si dispusiera de la misma información y el mismo conocimiento, incluyendo las frecuencias de niños y niñas, y unas estadísticas hospitalarias fiables, su asignación de probabilidades sería inevitablemente *objetiva*.

Es desafortunado, y hasta irónico, que Callen descarte la «información» por subjetiva, y al mismo tiempo recurra a la definición de Shannon de la información, pero rebautizándola como «desorden». Al hacer esto sustituye una magnitud bien definida, cuantitativa y objetiva por el más subjetivo concepto de desorden. Si Callen no se hubiera servido de la definición de Shannon, el desorden habría seguido siendo una magnitud mal definida, cualitativa y altamente subjetiva.

A mi modo de ver, la cuestión no es si la información o el desorden son conceptos objetivos o subjetivos. Lo que importa es que las nociones de orden y desorden no son conceptos científicamente bien definidos. La información, en cambio, sí es una magnitud científicamente bien definida, tanto como un punto o una línea en geometría, o la masa o la carga de una partícula en física.

En su libro *El fin de las certidumbres*, Ilya Prigogine (1997) cita las siguientes palabras de Murray Gell-Mann(1994):

*Entropía e información están estrechamente relacionadas. De hecho, la entropía puede verse como una medida de ignorancia. Cuando sólo se sabe que un sistema está en cierto macroestado, la entropía de dicho macroestado mide el grado de ignorancia del microestado en el que se encuentra, contando el número de*

*bits de información adicional que se requieren para especificarlo, con todos los microestados tratados como igualmente probables*<sup>136</sup>.

Estoy completamente de acuerdo con Gell-Mann, pero Prigogine hace esta crítica:

*Creo que este argumento es insostenible, porque implica que es nuestra propia ignorancia, nuestra imprecisión, lo que lleva a la segunda ley.*

¿Insostenible? ¿Por qué? La razón de que dos premios Nobel tengan visiones diametralmente opuestas de la entropía reside en una comprensión deficiente del concepto de información.

En mi opinión, Gell-Mann no sólo tiene razón, sino que se cuida de decir que «la entropía *puede* verse como una medida de ignorancia... La entropía... mide el grado de ignorancia». No dice *nuestra propia ignorancia*, como entiende equivocadamente Prigogine.

En efecto, como hemos visto en el capítulo 2, la información es una medida que *está ahí* en el sistema (o en el juego del capítulo 2). Dentro de la «teoría de la información», la magnitud «información» no tiene nada de subjetiva. Gell-Mann emplea el término «ignorancia» como sinónimo de «falta de información». Como tal, la ignorancia también es una magnitud objetiva que pertenece al sistema, y que no es lo mismo que *nuestra ignorancia*, que puede ser objetiva o subjetiva. Este malentendido de la interpretación informacional de la entropía como concepto subjetivo es bastante

corriente. Citaré otro párrafo del prefacio del libro de Atkins, *La segunda ley*<sup>137</sup>:

*He omitido deliberadamente cualquier referencia a la relación entre teoría de la información y entropía. Existe el peligro, me parece a mí, de dar la impresión de que la entropía requiere la existencia de alguna entidad cognoscitiva capaz de poseer «información» o de ser «ignorante» en cierto grado. De ahí a la presunción de que la entropía está en la mente y, por ende, es un aspecto del observador, sólo hay un pequeño paso.*

El rechazo de Atkins de la interpretación informacional de la entropía sobre la base de que esta «analogía» conduciría a la «presunción de que la entropía está en la mente» es irónico. En lugar de hablar de información, emplea los términos «desorden», «desorganizado» y otros, que a mi juicio están mucho más «en la mente».

El caso es que entropía e información no sólo son conceptos «análogos», sino que pueden hacerse idénticos.

Vuelvo a insistir en que la interpretación de la entropía como una medida de información no puede servir para *explicar* la segunda ley de la termodinámica. La afirmación de que la entropía es una magnitud siempre creciente en cualquier proceso espontáneo (dentro de un sistema aislado) *no se explica* diciendo que es «el modo que tiene la naturaleza de incrementar el desorden» o «el modo que tiene la naturaleza de incrementar la ignorancia». Éstas son descripciones posibles de la *cosa* que cambia en un proceso

espontáneo. Como descripción, el término «información» es aún más apropiado que «entropía» a la hora de denotar lo que cambia.

Antes de acabar esta sección, hay que mencionar un problema persistente que ha obstaculizado la aceptación de la interpretación informacional de la entropía. Recordemos que la entropía se *definió* como calor dividido por temperatura. Como tal, tiene unidades de energía dividida por temperatura. Estos dos conceptos son tangibles, medibles y están bien definidos. Entonces, ¿de qué manera la «información», que es una magnitud adimensional<sup>138</sup>, un número que no tiene nada que ver ni con la energía ni con la temperatura, puede asociarse con la entropía, una magnitud *definida* sobre la base de la energía y la temperatura? Creo que ésta es una objeción muy válida que merece un examen más detenido. De hecho, el mismo Shannon reconoció que su medida de la información sólo se puede identificar con la entropía si se multiplica por una constante  $k$  (ahora conocida como la constante de Boltzmann) que tiene unidades de energía dividida por temperatura. Esto en sí mismo no contribuye demasiado a probar que dos conceptos aparentemente muy distintos son en realidad idénticos. Pero creo que hay una razón más profunda para la dificultad de dicha identificación. Me explayaré sobre esta cuestión a dos niveles. En primer lugar, nótese que, en el proceso representado en la figura 8.1c, el cambio de entropía implica una cantidad de calor transferido, además de una diferencia de temperatura inicial. Pero esto es sólo un ejemplo de proceso espontáneo. Considérese la expansión de un gas ideal representada en la figura 8.1a, o la

mezcla de dos gases ideales representada en la figura 8.1b. La entropía aumenta en ambos casos. Pero, también en ambos casos, no hay cambio de energía, ni transferencia de calor, ni la temperatura tiene nada que ver. Si llevamos a cabo estos dos procesos en condiciones de aislamiento, entonces el cambio de entropía será independiente de la temperatura, y obviamente no habrá ninguna transferencia de calor de un cuerpo a otro. Estos ejemplos sugieren que el cambio de entropía *no necesariamente* tiene que ver con la energía y la temperatura.

El segundo punto quizá pertenezca a un nivel más profundo. Las unidades de entropía (Joule/Kelvin) no sólo son innecesarias, sino que la entropía *no debería* venir expresada en función de dichas unidades. La inclusión de la energía y la temperatura en la definición original de la entropía es un accidente histórico, una reminiscencia de la era pre atomista de la termodinámica.

Recordemos que la temperatura se definió antes que la entropía y antes que la teoría cinética del calor. Kelvin introdujo la escala absoluta de temperatura en 1854, y Maxwell publicó su artículo sobre la distribución de velocidades moleculares en 1859. Esto condujo a la *identificación* de la temperatura con la energía cinética media de los átomos o moléculas del gas de turno<sup>139</sup>. Una vez confirmada y aceptada esta identificación de la temperatura como una medida de la energía cinética media de los átomos, ya no había razón para mantener las viejas unidades de temperatura. Había que redefinir la temperatura absoluta, denotada provisionalmente por  $\tilde{T}$ , como  $\tilde{T} = kT$ . La nueva temperatura  $\tilde{T}$  tendría unidades de energía,



así que la constante de Boltzmann  $k$  ya no sería necesaria<sup>140</sup>. La ecuación de la entropía sería simplemente  $S = \ln W$ , ¡y la entropía sería una magnitud adimensional!<sup>141</sup>

Si la teoría cinética de los gases hubiera sido anterior a Carnot, Clausius y Kelvin, el cambio de entropía se habría definido igualmente como energía dividida por temperatura, pero esta razón habría sido adimensional. Esto no sólo simplifica la fórmula de la entropía de Boltzmann, sino que facilita la *identificación* de la entropía *termodinámica* con la información de Shannon.

Como escribió G. N. Lewis (1930): «Una ganancia de entropía siempre significa una pérdida de información, y nada más».

Esta afirmación casi profética se hizo dieciocho años antes de que naciera la teoría de la información, y deja bien claro que Lewis consideraba que entropía e información son *conceptualmente* idénticas.

Shannon (1948) demostró que la entropía *es formalmente* idéntica a la información. Se dice que John von Neumann aconsejó a Claude Shannon que empleara el término «entropía» para referirse a la información, porque<sup>142</sup>: «Nadie sabe lo que es la entropía en realidad, así que en cualquier debate siempre estarás en ventaja».

Sin entrar en la controversia sobre la objetividad o subjetividad de la información, sea como fuere, creo que la entropía puede *identificarse*, conceptual *y* formalmente, con la información. La identificación de ambas se consigue redefiniendo la temperatura como unidades de energía<sup>143</sup>. Esto elimina automáticamente la constante de Boltzmann del vocabulario de la física, lo que

simplifica la fórmula de Boltzmann para la entropía y nos libera de la pesada losa que ha dificultado la interpretación de la entropía como información durante más de un siglo. Ya es tiempo también de cambiar no sólo las unidades de entropía para convertirla en una magnitud adimensional<sup>144</sup>, sino la propia palabra «entropía». Como ahora se reconoce, entropía no significa «transformación», «cambio» o «giro». Significa «información». ¿Por qué no prescindir de un término que no significa «nada», como señaló Cooper, y ni siquiera transmite el significado que pretendía transmitir Clausius al elegirlo? ¿Por qué no sustituirlo por un vocablo más simple, familiar, con más sentido y mejor definido como es «información»? Esto no sólo disiparía buena parte del misterio asociado a la extraña palabra «entropía», sino que facilitaría la aceptación de la sugerencia de John Wheeler de «contemplar el mundo físico como hecho de información, con la energía y la materia como incidentes»<sup>145</sup>. Antes de concluir esta sección, debo dar una justificación de mi segunda objeción al comentario de Cooper citado en la página 197.

Estoy de acuerdo en que «calor perdido» sería preferible a «entropía». Pero tanto la expresión «calor perdido» como la expresión «energía no disponible» se aplican a  $T\Delta S$  (el producto de la temperatura y el incremento de entropía) y no al cambio de entropía en sí. La asociación frecuente de la entropía con el «calor perdido» o la «energía no disponible» se debe a que es la entropía la que aporta la unidad de energía. Pero si uno define la temperatura como unidades de energía, entonces la entropía se hace adimensional. Así pues, al formar el producto  $\dot{T}\Delta S$ , ahora es la temperatura la que aporta la

unidad de energía. Esto facilitaría la interpretación de  $\bar{T}\Delta S$  (y no el incremento de entropía) como «calor perdido» o «energía no disponible».

También quiero añadir un último comentario sobre nomenclatura. Brillouin (1962) ha propuesto la palabra «neguentropía» en vez de «información». Pero esto equivale a cambiar un término simple, familiar e informativo por otro más vago y esencialmente engañoso. Por mi parte, yo sugeriría sustituir la palabra entropía por «neguinformación», «información perdida» o «incertidumbre».

Por último, hay que decir que, aunque identifiquemos la entropía con la información, hay una diferencia muy importante entre la información termodinámica (la entropía) y la información de Shannon que se emplea en telecomunicación o cualquier otra rama de la ciencia. Me refiero a la enorme diferencia de magnitud entre ambas<sup>146</sup>.

Como hemos visto, la asociación entre entropía y probabilidad no sólo disipa el misterio, sino que reduce la segunda ley a una cuestión de mero sentido común. Quizá sea irónico que la visión atomista de la materia que nos ha llevado a una comprensión plena de la entropía generara de entrada un nuevo, y aparentemente más profundo, misterio.

### ***§. ¿Está íntimamente asociada la segunda ley con la flecha del tiempo?***

A diario vemos numerosos procesos que aparentemente transcurren en un solo sentido, desde la mezcla de dos gases hasta la

descomposición de un vegetal o animal muerto. Nunca observamos la inversión de estos fenómenos. Es casi natural pensar que el sentido en el que tienen lugar estos procesos, concordante con el transcurso del tiempo, es el correcto. Sobre esta cuestión. Brian Greene escribe<sup>147</sup>:

*Damos por sentado que hay una dirección en el despliegue de las cosas en el tiempo. Los huevos se rompen, pero no se recomponen; las velas se funden, pero no se remodelan; las memorias son del pasado, nunca del futuro; la gente envejece, no rejuvenece.*

Pero Greene añade:

*Las leyes aceptadas de la física no exhiben semejante asimetría; las leyes tratan cada sentido del tiempo, adelante y atrás, por igual, sin distinción, lo que origina un enorme rompecabezas.*

¡Por supuesto! Durante casi un siglo, los físicos han estado intrigados por el conflicto aparente entre la segunda ley de la termodinámica y las leyes de la dinámica<sup>148</sup>. Como lo expresa Greene, «no sólo las leyes (de la física) conocidas no nos dicen por qué vemos desplegarse los acontecimientos en un solo orden, sino que nos dicen que, en teoría, podrían ir en el orden inverso. La cuestión crucial es por qué nunca vemos tal cosa. Nadie ha contemplado un huevo reventado des reventándose, y si esas leyes

tratan igualmente el reventarse como el des reventarse, ¿por qué ocurre lo primero y nunca lo segundo?».

Desde que Waddington asociara la segunda ley de la termodinámica con la flecha del tiempo, los científicos se han esforzado en resolver esta aparente paradoja. Las ecuaciones del movimiento son simétricas en cuanto al sentido del tiempo. Nada en ellas sugiere que un cambio deba ir en una dirección y no en la opuesta. Por otro lado, muchos procesos que vemos a diario proceden en una dirección y nunca en la opuesta. Ahora bien, ¿está la segunda ley realmente asociada a esta flecha del tiempo?

La respuesta clásica a esta pregunta es que si vemos una película al revés, enseguida nos daremos cuenta de que la acción está yendo hacia atrás, aunque no nos lo digan. Por ejemplo, si vemos que un huevo reventado en el suelo de pronto se recompone espontáneamente y salta para aterrizar intacto sobre la mesa, sonreiremos e invariablemente reconoceremos que la película está discurriendo al revés. ¿Por qué? Porque sabemos que un proceso de esta clase no puede retroceder en el tiempo.

Pero ¿y si un día nos sentamos en la cocina, vemos un huevo reventado en el suelo, y de pronto el huevo revierte a su estado entero y luego salta hasta lograr situarse encima de la mesa?

Por fantástico que pueda parecer, nuestra asociación del proceso de rotura del huevo con la flecha del tiempo es tan fuerte que no creeríamos lo que viesen nuestros ojos, y probablemente miraríamos a nuestro alrededor para ver si alguien nos está engañando con algún truco. O, si entendemos la segunda ley, podríamos

convencernos de que hemos tenido la inmensa fortuna de observar un proceso *real*, en el sentido del tiempo *correcto*, que es *extremadamente raro pero no imposible*.

Se trata de la misma conclusión a la que llega el físico del libro de George Gamow, *Breviario del señor Tompkins en el país de las maravillas*<sup>149</sup>. Cuando el personaje de Gamow ve que el *whisky* de su vaso comienza a hervir espontáneamente por arriba, a la vez que se forman cubitos de hielo por debajo, sabe que este proceso, aunque extremadamente improbable, *puede* ocurrir de hecho. Puede que se asombre de observar un suceso tan extraordinario, pero no busca a ningún operador que esté pasando al revés la «película» de su vida. He aquí ese delicioso pasaje del libro de Gamow:

*El líquido en el vaso se cubrió de un burbujeo violento, y una tenue nube de vapor comenzó a ascender lentamente hacia el techo. Pero lo que resultaba particularmente extraño es que la bebida estuviera hirviendo sólo en una franja comparativamente pequeña en torno al cubo de hielo. El resto de la bebida seguía estando bastante fría. « ¡Piensen en ello!», continuó el profesor con voz temblorosa. «Les estaba hablando de fluctuaciones estadísticas en la ley de la entropía, ¡y ahora mismo estamos viendo una!». Por un azar increíble, posiblemente por primera vez desde que la Tierra comenzó a existir, las moléculas más veloces se han juntado todas accidentalmente en una parte de la superficie del agua, y el líquido ha comenzado a hervir por sí solo. En los miles de millones de años que vendrán, probablemente seguiremos*

*siendo las únicas personas que han tenido la oportunidad de observar un fenómeno tan extraordinario. El profesor miró la bebida, que ahora se estaba enfriando lentamente. « ¡Vaya golpe de suerte!», exclamó feliz.*

Pero nuestra asociación de los procesos espontáneos con la flecha del tiempo no es más que una ilusión. Una ilusión creada por el hecho de que nunca en la vida hemos visto un proceso que transcurra «en sentido contrario». La asociación de la ocurrencia natural de los procesos espontáneos con la flecha del tiempo es casi siempre válida (casi siempre, pero no absolutamente siempre).

En su delicioso libro, George Gamow intentó explicar los resultados difíciles de aceptar de la teoría de la relatividad y de la mecánica cuántica narrando las aventuras de un físico, el señor Tompkins, en un mundo donde uno podía ver y experimentar dichos resultados. Gamow intentó imaginar cómo se vería el mundo si la velocidad de la luz fuera mucho menor a 300.000.000 metros por segundo, o cómo vería el mundo alguien que viajara a velocidades próximas a la de la luz. En ese mundo uno podría contemplar fenómenos que casi *nunca* se experimentan en el mundo real.

Similarmente, podemos imaginar un mundo donde la constante de Planck ( $h$ ) fuera muy grande, y donde experimentaríamos fenómenos increíbles como, por ejemplo, atravesar tranquilamente una pared (efecto túnel) y otros fenómenos por el estilo que *nunca* experimentamos en el mundo real donde vivimos.

Tomando prestada una de las fantasías de Gamow, podemos imaginar un mundo donde la gente vive mucho tiempo, mucho más que la edad del universo, digamos  $10^{10/30}$  años<sup>150</sup>.

En un mundo así, al realizar el experimento de la expansión de un gas, o el de la mezcla de gases, deberíamos ver algo parecido a lo que hemos observado con el sistema de diez dados. Si comenzamos con todas las partículas en un compartimento, primero observaremos una expansión hasta que las partículas ocupen todo el volumen del sistema. Pero «de vez en cuando» también observaremos visitas al estado original. ¿Cuán a menudo? Si vivimos  $10^{10/30}$  años y el gas contiene alrededor de  $10^{23}$  partículas, entonces deberíamos observar visitas al estado original muchas veces a lo largo de nuestra vida. Si viéramos una película del gas en expansión, no reconoceríamos si va hacia delante o hacia atrás. No tendríamos la sensación de que unos fenómenos son más naturales que otros, por lo que no deberíamos tener un sentido de «flecha del tiempo» asociado con el incremento (o decremento ocasional) de la entropía. Así pues, el hecho de que no observemos la restauración espontánea de un huevo roto o la separación espontánea de dos gases no se debe a que exista un conflicto entre la segunda ley de la termodinámica y las ecuaciones del movimiento o las leyes de la dinámica. No hay tal conflicto. Si viviéramos «lo suficiente», llegaríamos a ver estos procesos invertidos. La conexión entre la flecha del tiempo y la segunda ley no es absoluta, sino sólo «temporal», a una escala de unos pocos miles de millones de años.



Habría que añadir que en el contexto de la asociación de la segunda ley con la flecha del tiempo, algunos autores invocan la experiencia humana que distingue el pasado del futuro. Es cierto que recordamos sucesos del pasado, *nunca* del futuro. También sabemos que podemos influir en los sucesos futuros, pero *nunca* en los pasados. Comparto plenamente estas experiencias. La única pregunta que me hago es qué tiene que ver esta experiencia humana con la segunda ley, o con cualquier otra ley de la física.

Esto nos lleva a la sección siguiente.

### **§. ¿Es la segunda ley de la termodinámica una ley física?**

En la mayoría de *textos* de mecánica estadística se remarca que la segunda ley no es absoluta. Hay excepciones. Aunque es extremadamente raro que ocurra, la entropía puede disminuir «de vez en cuando».

A propósito de este aspecto de la segunda ley, Greene dice que «no es una ley en el *sentido convencional*». Como cualquier ley de la naturaleza, la segunda ley de la termodinámica tiene una base experimental. Su formulación en términos del incremento de entropía recoge, de manera muy sucinta, el rasgo común de un enorme número de observaciones. En su formulación termodinámica o, mejor, no atomista, la segunda ley no admite excepciones. Como cualquier otra ley física, se declara absoluta, sin excepciones. Pero cuando la contemplamos desde el punto de vista molecular, nos damos cuenta de que admite excepciones. Aunque sea un suceso raro, extremadamente raro, la entropía puede bajar

en vez de subir. Se *reconoce* así el carácter no absoluto de la segunda ley. De ahí el comentario de Greene de que no es una ley «en el sentido convencional», porque parece ser «menos absoluta» que las otras leyes de la física.

Ahora bien, ¿qué es una ley en el sentido convencional? ¿Es absoluta la ley de Newton de la inercia? ¿Es absoluta la constancia de la velocidad de la luz? ¿Podemos realmente afirmar que una ley física es absoluta? Sabemos que estas leyes no han dejado de cumplirse en los pocos milenios durante los cuales se han registrado observaciones. Podemos extrapolarlas a millones o miles de millones de años examinando el registro geológico o las radiaciones emitidas desde poco después del «big bang», pero no podemos afirmar que dichas leyes han sido *siempre* las mismas, o lo seguirán siendo en el futuro, sin excepciones. Todo lo que podemos decir es que es *improbable* que en los próximos millones o miles de millones de años encontremos alguna excepción de alguna ley de la física. De hecho, no hay ninguna razón, ni teórica ni experimental, para creer que las leyes de la física son absolutas.

Desde este punto de vista, la segunda ley ciertamente «no es una ley en el sentido convencional», pero esto no la *debilita*, como sugiere Greene, sino que la *fortalece*.

El hecho de que *admitamos* la existencia de excepciones a la segunda ley la hace más «débil» que otras leyes de la física sólo cuando esas otras leyes se consideran válidas en un sentido *absoluto*. Pero el reconocimiento de la extrema rareza de las excepciones a la segunda ley no sólo la fortalece, sino que la

convierte en la más poderosa de todas las leyes físicas. De cualquier ley física podemos afirmar que no se esperan excepciones al menos a  $10^{10}$  años vista. Pero las excepciones a la segunda ley sólo son esperables una vez cada  $10^{10.000.000.000}$  o más años.

Así pues, la segunda ley es *absoluta* y no admite excepciones cuando se formula en el marco de la termodinámica clásica (no atomista). Pero cuando se formula como sucesos moleculares, su violación está permitida. Aunque suene paradójico, la «debilidad» relativa de la formulación atomista convierte a la segunda ley en la más fuerte de todas las leyes físicas, incluyendo la propia segunda ley en su formulación termodinámica (no atomista). En otras palabras, el carácter *no absoluto* que hemos aceptado de la segunda ley en su versión atomista es de hecho más absoluto que el pretendido carácter *absoluto* de la segunda ley en su versión no atomista<sup>151</sup>.

En el contexto de la cosmología moderna, la gente especula sobre el sombrío destino del universo, que acabará alcanzando un estado de equilibrio térmico o «muerte térmica». ¡¿Podría no ser así?!

En el otro extremo de la escala de tiempo, se ha especulado que, si admitimos que la entropía siempre aumenta, entonces, en el «principio», el universo debe haber partido de un valor de entropía más bajo.

¡¿Podría no ser así?!

Además, esta última especulación entra en conflicto directo con la Biblia:

1. *En el principio Dios creó el cielo y la tierra.*

## 2. Y la tierra estaba sin formar y vacía.

(Génesis 1, 1-2).

א. בְּרֵאשִׁית בְּרָא אֱלֹהִים אֶת הַשָּׁמַיִם וְאֶת הָאָרֶץ:

ב. וְהָאָרֶץ הָיְתָה תוֹהוּ וָבוֹהוּ. עַל פְּנֵי תְהוֹמוֹתָיִם וְהָיְתָה מְרֻחָת עַל פְּנֵי הַמַּיִם:

La versión original hebrea incluye la expresión *tohu va bohu*, en vez de «sin formar y vacía». La interpretación tradicional de *tohu va bohu* es «caos total», o «desorden total», o si se prefiere, ¡máxima entropía!

Dicho esto, me aventuraría a proponer la provocativa idea de que la segunda ley de la termodinámica no es ni más «débil» ni más «fuerte» que las otras leyes de la física. Simplemente, no es una ley física, sino más bien un enunciado de puro sentido común.

Esto me lleva a la última cuestión.

### **§. ¿Podemos prescindir de la segunda ley?**

Si la segunda ley de la termodinámica no es más que un enunciado de sentido común, ¿debemos incluirla entre las leyes de la física y enseñarla como tal? Parafraseando esta pregunta, supongamos que nadie hubiera formulado nunca la segunda ley de la termodinámica: ¿podríamos *derivarla* puramente por inducción lógica y sentido común? Mi respuesta es que probablemente sí, siempre que hubiéramos descubierto la naturaleza atómica de la materia y el inmenso número de partículas indistinguibles que constituyen cada pedazo de materia. Creo que se puede deducir la segunda ley de

abajo arriba<sup>152</sup>. Desde luego podemos hacerlo en el caso simple de la expansión de un gas o la mezcla de dos gases diferentes (como hemos hecho al final del capítulo 7). Si desarrolláramos unas matemáticas altamente sofisticadas, también podríamos predecir el destino más probable de un huevo que cae al suelo<sup>153</sup>. Pero todas estas predicciones no se basarían en las leyes de la física, sino en las de la probabilidad, o lo que es lo mismo, en las leyes del sentido común.

Se puede objetar justificadamente que si yo consiguiera hacer tales «predicciones» sería porque me he beneficiado de los hallazgos de Carnot, Clausius, Kelvin, Boltzmann y otros, por lo que «predecir» un resultado que conocemos de antemano no sería una gran hazaña. Esto probablemente es cierto, así que reformularé la pregunta anterior. Supongamos que ninguno de los grandes científicos que fundaron la segunda ley hubiera existido, o que, caso de existir, nunca hubieran formulado la segunda ley. ¿Llegaría la ciencia a la segunda ley a través del puro razonamiento lógico, presuponiendo el conocimiento actualmente disponible de la naturaleza atómica de la materia y el resto de la física?

La respuesta a esta pregunta quizá sea ¡NO! No porque no se pueda *derivar* la segunda ley de abajo arriba aunque la derivación de arriba abajo nunca hubiera existido, sino porque la ciencia encontrará innecesario formular una ley física basada en la pura deducción lógica.



## **Autor**

ARIEH BEN-NAIM. Nació en 1934 en Jerusalén. Es doctor en química física por la Universidad Hebrea de Jerusalén, donde enseña termodinámica y mecánica estadística desde 1974. Especializado en bioquímica y biofísica, desde los años setenta hasta la actualidad ha impartido cursos en numerosas universidades de Europa y Estados Unidos y ha escrito numerosos artículos y libros dedicados a esta materia, entre los que destaca *Farewell to entropy* (2008).

## Notas

---

<sup>1</sup> Éste fue otro tema fascinante al que acabé dedicando mi tesis doctoral.

<sup>2</sup> En la página de la dedicatoria se muestra una imagen.

<sup>3</sup> Greene, B. (1999, 2004).

<sup>4</sup> Greene, B. (2004), pág. 12.

<sup>5</sup> En mecánica estadística estos términos corresponderían a micro estados y macro estados. En la mayor parte del libro tratamos con dados, y los dados son objetos macroscópicos. Por eso he preferido los términos «específico» e «inespecífico» en vez de «micro estado» y «macro estado».

<sup>6</sup> Morowitz (1992). pág. 69.

<sup>7</sup> Véase Ben-Naim (2007).

<sup>8</sup> Greene. B. (2004).

<sup>9</sup> Por formulación «no atomista» se entiende la discusión de la segunda ley sin ninguna referencia a la constitución atómica de la materia. A veces también se dice que las formulaciones de esta clase contemplan la materia como un continuo. Lo importante aquí es que tales formulaciones emplean sólo magnitudes macroscópicamente observables o medibles, sin referencia alguna a la constitución atómica de la materia. Esto *no* implica que las formulaciones no atomistas no valgan para la materia particulada. Como luego veremos, si la materia fuera en verdad continua y no estuviera constituida por átomos, la segunda ley no existiría.

<sup>10</sup> Esta es la opinión mayoritaria, aunque algunos autores citan a Carnot como el «inventor» o «descubridor» de la segunda ley.

<sup>11</sup> Técnicamente, se dice que los procesos son cuasi estáticos. A veces también se habla de procesos reversibles, aunque este término se aplica también a otro tipo de procesos donde la entropía no cambia. Por eso es más apropiado y preferible hablar de procesos cuasi estáticos.

<sup>12</sup> «Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego y las máquinas ajustadas para desarrollar esta potencia», por Sadi Carnot (1824).

<sup>13</sup> La segunda ley también puede formularse como la expansión espontánea de un gas. Como puede demostrarse, ésta y otras formulaciones también son equivalentes a las de Clausius y Kelvin.

<sup>14</sup> Citado por Cooper (1968).

<sup>15</sup> Por «tener sentido» se entiende aquí que se trata de una *experiencia* corriente, y no necesariamente una consecuencia lógica.

<sup>16</sup> «Siempre» en el dominio de los fenómenos que eran objeto de estudio en la época, lo que ahora conocemos como mecánica clásica.

<sup>17</sup> Para una fascinante mirada a la biografía de Boltzmann, véase Broda (1983), Lindley (2001) y Cercignani (2003).

<sup>18</sup> Por ejemplo, Loschmidt escribió en 1876 que la segunda ley no puede ser resultado de un principio puramente mecánico.

<sup>19</sup> Como ha señalado Greene (2004), hay que hacer notar que la «simetría temporal» no quiere decir que el tiempo mismo se invierta o dé marcha atrás, sino que se refiere a si los sucesos que tienen lugar en el tiempo con un orden temporal particular también pueden ocurrir en el orden inverso. Una expresión más adecuada podría ser «inversión de sucesos» o «inversión de procesos».

<sup>20</sup> En el marco de la mecánica clásica.

<sup>21</sup> Como veremos en los capítulos 7 y 8, el carácter no absoluto que hemos admitido de la formulación atomista de la segunda ley es de hecho más absoluto que el de la formulación no atomista. Sobre este asunto, Poincaré comentó: «... para ver la transferencia de calor de un cuerpo frío a uno caliente, no será necesario tener la visión aguda, la inteligencia y la destreza del demonio de Maxwell; bastará con un poco de paciencia» (citado por Leff y Rex, 1990).

<sup>22</sup> Es interesante señalar que los fundadores de la teoría cinética de los gases, como Maxwell, Clausius y Boltzmann, nunca publicaron ninguna explicación del movimiento browniano.



<sup>23</sup> Curiosamente, Einstein, quien elogiaba a Boltzmann por su interpretación probabilística de la entropía, nunca aceptó la interpretación probabilística de la mecánica cuántica.

<sup>24</sup> Una buena exposición de la teoría einsteiniana del movimiento browniano puede encontrarse en el libro de John Ridgen (2005). Una discusión completa y autorizada de la teoría del movimiento browniano, incluyendo el trasfondo histórico, ha sido publicada por Robert Mazo (2002).

<sup>25</sup> Quizá cabe mencionar que en el marco de las últimas teorías de los agujeros negros se habla de la «segunda ley de la termodinámica generalizada». (Bekenstein, 1980). A mí me parece que esta generalización no afecta a la fórmula de Boltzmann.

<sup>26</sup> Hoy día, cualquier libro de física, en particular de mecánica estadística, da por sentada la estructura atómica de la materia. Es interesante señalar que uno de los primeros supuestos del libro *Statistical Thermodynamics* de Fowler y Guggenheim (publicado en 1939 y reimpresso en 1956) era: «Supuesto I: La constitución atómica de la materia». Los autores añaden el siguiente comentario: «Hoy esto apenas puede considerarse un supuesto, pero es relevante comenzar recordando que se hace, ya que cualquier referencia a las constituciones atómicas es ajena a la termodinámica clásica». Ningún libro actual de mecánica estadística explicita este supuesto, porque la naturaleza atómica de la materia es un hecho universalmente aceptado.

<sup>27</sup> Para simplificar y concretar, piénsese en  $N$  partículas distribuidas en  $M$  casillas. Una descripción completa del estado del sistema consiste en una especificación detallada de qué partícula está en qué casilla.

<sup>28</sup> La asociación de la entropía con el desorden se debe probablemente a Bridgman (1941, 1953). Guggenheim (1949) sugirió el término «dispersión» para describir la distribución entre gran número de estados cuánticos posibles. Una discusión exhaustiva de este aspecto puede encontrarse en Denbigh y Denbigh (1985).

<sup>29</sup> La teoría de la información fue concebida sin conexión con la termodinámica por Claude Shannon en 1948. Más adelante se vio que la medida de información de Shannon es idéntica (salvo una constante que determina las unidades) a la entropía de Boltzmann.

<sup>30</sup> Es interesante señalar que la palabra «adivinar», derivada del latín *adivinare*, contiene la raíz «divino». Cuando decimos que hemos «adivinado» algo no estamos dando a entender que poseemos la facultad de predecir sucesos, pero originalmente el término *adivinare* probablemente sí implicaba un poder divino para predecir el resultado de una experiencia o un juego. A propósito de esta creencia, Bennett (1998) escribe: «Los antiguos creían que lo que ocurría estaba controlado en última instancia por una deidad, no por el azar. El uso de mecanismos de azar para solicitar la dirección divina se conoce como adivinación, y el paso adoptado para asegurar la aleatoriedad tenía como único objetivo eliminar la posibilidad de interferencia humana, para así poder discernir la voluntad de la deidad».

<sup>31</sup> Hay otro significado de probabilidad más general, como medida de la plausibilidad de una proposición, dada cierta información o evidencia (Carnap, 1950, 1953; Jaynes, 2003). Emplearemos el término «probabilidad» tal como se hace en física. Siempre consideraremos sucesos, no proposiciones. No entraremos en la cuestión del significado de la probabilidad, la aleatoriedad, etcétera. Este tema se adentra en la filosofía. Como veremos en este capítulo, las preguntas sobre probabilidades siempre atañen a la probabilidad condicional. A veces la condición se formula como un suceso que ha ocurrido o tiene que ocurrir. Otras veces la condición puede contener una información o conocimiento acerca del suceso. Sin *ningún* conocimiento es imposible responder a ninguna pregunta sobre probabilidades.

<sup>32</sup> Hay que decir que «objetiva» aquí no implica «probabilidad absoluta». Toda probabilidad es condicionada, o sea, es relativa a una información o evidencia dada. Sólo es objetiva en el sentido de que, dada la misma información, todo el mundo estimaría la misma probabilidad. D'Agostini (2003) prefiere «inter-subjetividad» a «objetividad», mientras que otros hablan de probabilidad «menos subjetiva».

<sup>33</sup> Como me comentó uno de los lectores del borrador de este libro, hay una tendencia a concluir que la estimación del 1% es más «acertada» que la del 90%. Esto es cierto si empleamos el término «probabilidad» coloquialmente. Pero aquí nos interesa el significado

científico de la probabilidad. Supongamos que estimo que la probabilidad de obtener el resultado «4» al lanzar un dado es del 90%, y el lector estima que la probabilidad es del 1%. Lanzamos el dado y sale «4» (o «2», o cualquier otro resultado posible). ¿Cuál era la estimación correcta? La respuesta es: ¡ninguna! En este caso conocemos la probabilidad de ese suceso en particular, y el hecho de que se diera el suceso «sale un 4» en una única tirada no prueba nada acerca de su probabilidad. En nuestro ejemplo, la ocurrencia o no ocurrencia del suceso predicho (en este caso la aparición del Mesías el próximo lunes) no demuestra nada en relación con su *probabilidad*. De hecho, no resulta evidente cómo definir la probabilidad de tal suceso o siquiera si existe una probabilidad «correcta» del mismo.

<sup>34</sup> Nótese que este enunciado suena altamente subjetivo. Pero cualquiera que tenga sentido común y quiera servirse de la teoría de la probabilidad debe aceptar esta subjetividad.

<sup>35</sup> El uso del pasado o del futuro no implica que el tiempo intervenga en la definición de un suceso o de su probabilidad.

<sup>36</sup> Sólo consideraremos espacios muestrales finitos. La teoría de la probabilidad también maneja espacios infinitos o continuos, pero no los necesitamos en este libro.

<sup>37</sup> Excluimos de la presente discusión la cuestión de que el dardo se clave exactamente en un punto concreto, o una línea, como puede ser el perímetro del círculo, cuya probabilidad es despreciable en la práctica y nula en teoría. Emplearemos, los diagramas de Venn sólo como ilustración. En los cálculos de probabilidades de los capítulos que siguen siempre manejaremos espacios muestrales finitos.

<sup>38</sup> En realidad, estamos calculando la probabilidad condicionada de que el dardo se clave dentro del círculo, sabiendo que se clavará en el tablero.

<sup>39</sup> En matemáticas, la probabilidad es una *medida* definida para cada suceso, como la longitud, el área o el volumen de una región en una, dos o tres dimensiones, respectivamente. En el ejemplo de los diagramas de Venn, también tomamos el *área* de una región como medida de la probabilidad relativa.

<sup>40</sup> De hecho, el propio Kolmogorov era muy consciente de que eludía la cuestión del significado o la definición de la probabilidad. Ahora se acepta casi universalmente que la probabilidad es un concepto primitivo indefinible. Algunos autores de libros sobre probabilidad incluso se abstienen de definir el vocablo.

<sup>41</sup> Algunos autores se oponen al uso del término «*a priori*». Aquí lo usamos sólo en el sentido de que la evaluación de las probabilidades no depende de un experimento. A algunos autores tampoco les gusta el calificativo «clásica». D'Agostini (2003) prefiere llamar «combinatorio» a este método. Hay que decir, no obstante, que la «combinatoria» es una rama concreta de las matemáticas que trata del número de modos de hacer ciertas cosas, y que, como tal, no tiene nada que ver con la probabilidad. Aun así, el método *combinatorio* se usa para calcular probabilidades conforme a la definición *clásica*.

<sup>42</sup> Por supuesto, se supone no sólo que el dado es equitativo, sino que el método de su lanzamiento es «imparcial» o insesgado. La definición de un dado «equitativo», o su lanzamiento «aleatorio», también implica el concepto de probabilidad. También podríamos añadir que la teoría de la información ofrece una suerte de «justificación» para la elección de probabilidades iguales. La teoría de la información proporciona un método para la mejor estimación de las probabilidades basándose en lo que sabemos, todo lo que sabemos y nada más que lo que sabemos del experimento.

<sup>43</sup> En notación matemática, la definición es

$$Pr(H) = \lim_{N(\text{total}) \rightarrow \infty} \frac{n(H)}{N(\text{total})}$$

Esto puede interpretarse de dos maneras. O se efectúa una secuencia de experimentos y se estima el límite de la frecuencia relativa cuando el número de experimentos se hace infinito, o se lanza un número infinito de monedas a la vez y se cuentan las caras que salen. Uno de los supuestos fundamentales de la mecánica estadística es que ambos métodos darán el mismo resultado. Esta hipótesis es la semilla de toda una rama de las matemáticas conocida como teoría ergódica.

<sup>44</sup> De hecho, creemos que éste es el resultado correcto aun sin hacer el experimento. Estamos convencidos de que, mediante un experimento mental, el resultado convergerá hacia la probabilidad correcta. Si, por ejemplo, hacemos el experimento de lanzar un dado y hallamos que la frecuencia del suceso «par» se acerca a  $1/2$ , lo que es coherente con el resultado que hemos calculado aplicando la definición clásica, entonces la «corrección» de nuestra asignación de probabilidades contará con un respaldo adicional.

<sup>45</sup> En la figura 2.5 se han suprimido seis configuraciones (las enmarcadas por el rectángulo de puntos en la figura 2.4). Esto es así porque, a diferencia de las monedas o los dados, las partículas son indistinguibles. En la figura 2.6 se han suprimido otras cuatro configuraciones (las enmarcadas por el rectángulo de puntos y rayas en la figura 2.4). Esto es así porque la física prohíbe que dos partículas fermiónicas ocupen la misma casilla (es lo que se conoce como principio de exclusión de Pauli). Resulta que estas reglas se derivan de ciertos requerimientos de simetría sobre las funciones de onda del sistema de partículas. Por lo que sé, la asignación de probabilidades precedió al descubrimiento de los principios de simetría.

<sup>46</sup> Hay que decir que la introducción de la probabilidad condicionada y la independencia entre sucesos es exclusiva de la teoría de la probabilidad, y es lo que la diferencia de la teoría de conjuntos y la teoría de la medida.

<sup>47</sup> Nótese que la probabilidad condicionada sólo está definida para una condición cuya probabilidad es no nula. En el ejemplo anterior, se requiere que el suceso B no sea imposible.

<sup>48</sup> Aquí queremos subrayar el *cambio* en el grado de «objetividad» (o subjetividad) al pasar de la probabilidad de un suceso a la probabilidad condicionada.

<sup>49</sup> Aquí queremos subrayar el cambio en el grado de «objetividad» (o subjetividad) al pasar de la probabilidad de un suceso a la probabilidad condicionada.

<sup>50</sup> Por ejemplo, la probabilidad de sacar tres canicas rojas, cinco canicas azules y dos canicas verdes de una urna que contiene 100 canicas de cada color, 300 en total, *suponiendo* que las canicas son idénticas, que sacamos 10 canicas al azar, etcétera. Éste es un problema algo más difícil, y puede que el lector no sea capaz de resolverlo, pero la probabilidad «está ahí» en el suceso mismo. De forma similar, la probabilidad de encontrar dos átomos separados por cierta distancia en un líquido a una temperatura y una presión dadas, *suponiendo* que conocemos y aceptamos las leyes de la mecánica estadística y que sabemos que dichas leyes han sido extremadamente útiles para predecir muchas propiedades medias de propiedades macroscópicas, etcétera, ¡es una probabilidad objetiva! Aunque no sepamos calcularla, sabemos que «está ahí» en el suceso.

<sup>51</sup> Este ejemplo y el análisis de su implicación están extraídos de Falk (1979).

<sup>52</sup> Shannon (1948).

<sup>53</sup> Algunos autores prefieren referirse a la información desconocida como «incertidumbre». Aunque me parece un término apropiado, personalmente prefiero hablar de «información desconocida» o «información» a secas. Pienso que en el contexto de la aplicación de la teoría de la información a la mecánica estadística, desarrollada de manera persuasiva por Jaynes (1983) y Katz (1967), la palabra «información» es preferible.

<sup>54</sup> Por supuesto, hay muchas otras maneras de obtener esa información. Podemos preguntar «¿Dónde está la moneda?», o simplemente abrir todas las cajas y mirar dentro. Pero esto no se ajustaría a las reglas del juego. Hemos convenido en adquirir información sólo a base de preguntas *binarias*.

<sup>55</sup> Nótese que la «probabilidad» no se definió, sino que se introdujo axiomáticamente. La información se *define* como probabilidad. La definición general es: el sumatorio de  $\Pr\{i\}\log\Pr\{i\}$ , donde  $\Pr\{i\}$  es la probabilidad del suceso  $i$ . Esto tiene la forma de un promedio, pero se trata de un promedio muy especial.

<sup>56</sup> Si  $N$  es el número de posibilidades igualmente probables, entonces  $\log_2 N$  es el número de preguntas que tenemos que hacer para localizar la moneda; por ejemplo, para  $N = 8$ ,  $\log_2 8 = 3$ ; para  $N = 16$ ,  $\log_2 16 = 4$ ; para  $N = 32$ ,  $\log_2 32 = 5$ ; y así sucesivamente.

<sup>57</sup> Nótese que se supone que las monedas son idénticas. Todo lo que necesitamos saber es qué cajas están ocupadas o, de forma equivalente, qué cajas están vacías.

<sup>58</sup> La escritura explícita de esta clase de números no sólo requeriría un tiempo inimaginable, sino que podría ser que dicho lapso de tiempo no tuviera existencia física en absoluto. De acuerdo con la cosmología moderna, el tiempo podría haber comenzado con el «big bang», hace 15.000 millones de años, y podría terminar con el «big crunch», si tal cosa sucede en el futuro.

<sup>59</sup> Sólo usaremos logaritmos de base 10, aunque en teoría de la información es más conveniente emplear logaritmos de base 2.

<sup>60</sup> Nótese que podemos distinguir entre partículas *diferentes* e *idénticas*. No podemos discriminar con ninguno de nuestros sentidos entre partículas *idénticas* e *indistinguibles* (de ahí que coloquialmente se consideren sinónimos). Adviértase también que podemos pasar de partículas *diferentes* a *idénticas* de manera continua, al menos en teoría, pero no podemos pasar de partículas *idénticas* a *indistinguibles*. Las partículas o son distinguibles o son indistinguibles. La indistinguibilidad no es algo que observemos en la vida diaria, sino que es una propiedad que la naturaleza impone a las partículas.

<sup>61</sup> Los dos isómeros rotan la luz polarizada en distintas direcciones: *l* (de *levo*) a la izquierda y *d* (de *dextro*) a la derecha.

<sup>62</sup> B por Boltzmann y A por Arieh.

<sup>63</sup> La historia de estos y otros problemas probabilísticos de la primera época puede encontrarse en David (1962).

<sup>64</sup> El concepto «suceso inespecífico» se examinará en los capítulos siguientes.

<sup>65</sup> Véase la nota 30.

<sup>66</sup> Aquí aplicamos el calificativo «inespecífico» a un suceso; los detalles de los sucesos específicos comprendidos en él no se tienen en cuenta.

<sup>67</sup> Más adelante partiremos de una configuración arbitraria. Para comenzar supondremos que la configuración inicial es la de «todo ceros».

<sup>68</sup> El programa es muy simple. Primero elige un número de 1 a  $N$ , y luego cambia aleatoriamente la cara del dado situado en esa posición para obtener un nuevo resultado.

<sup>69</sup> Por «mano» entenderemos una partida entera consistente en un número predeterminado de «pasos».

<sup>70</sup> Como veremos en el capítulo 7, en la teoría molecular de la segunda ley, las configuraciones específicas e inespecíficas corresponden a los microestados y macro estados del sistema.

<sup>71</sup> Nótese, sin embargo, que la línea de equilibrio no caracteriza ninguna configuración *específica*. De hecho, se trata de una configuración inespecífica consistente en el máximo de configuraciones específicas para este juego en particular. El significado de la línea de equilibrio aquí se relaciona con (pero no es lo mismo que) el *estado* de equilibrio de un sistema termodinámico, tal como se discute en el capítulo 7.

<sup>72</sup> En los procesos reales, la temperatura es el principal determinante de la *velocidad* del proceso. Pero ni en este juego ni en los procesos reales nos fijaremos en este parámetro (véase también el capítulo 7)

<sup>73</sup> Recientemente se ha cuestionado incluso la constancia de las constantes físicas. En realidad no sabemos si constantes como la velocidad de la luz cambian o no a una escala de tiempo cosmológica (véase Barrow y Webb, 2005).

<sup>74</sup> Desde un punto de vista físico, el resultado es una onda electromagnética de cierta frecuencia. Esta onda específica penetra en el ojo y es enfocada en los conos retinianos, que envían un mensaje al cerebro, donde se procesa la información y percibimos esa señal como un *color*.

<sup>75</sup> Los resultados físicos son moléculas que son adsorbidas por receptores específicos estructuralmente complementarios situados en la superficie interna de la nariz. Desde ahí se transmite una señal al cerebro, donde es procesada para producir la percepción de un olor específico.

<sup>76</sup> Como en el caso de los olores, el sentido del gusto proviene de moléculas estructuralmente específicas adsorbidas por células sensibles situadas en las papilas gustativas de la lengua. Desde ahí se envía un mensaje al cerebro, donde es procesado para producir la sensación del sabor.

<sup>77</sup> Desde un punto de vista físico, las ondas sonoras que inciden en el tímpano producen vibraciones que se transmiten al oído interno. Desde ahí se envía un mensaje al cerebro, donde la información se procesa para producir la sensación de un tono específico.

<sup>78</sup> El sentido del tacto corre a cargo de células nerviosas situadas bajo la piel que responden a la presión y la temperatura. Estas células envían mensajes al cerebro, donde se procesan para producir las sensaciones de presión, temperatura y quizá también dolor.

<sup>79</sup> Este es un experimento extremadamente hipotético. En un experimento real que veremos en el capítulo 7, los dados serán reemplazados por partículas atómicas. Podemos imaginar moléculas de distintos colores, olores o sabores, pero no podemos asignar una «temperatura» a cada molécula. La temperatura que percibimos es consecuencia de la distribución de la energía cinética de las moléculas. Para simular algo parecido a un experimento real, deberíamos emplear dados con un número infinito de caras, que representarían las velocidades posibles de una molécula.

<sup>80</sup> También debemos presuponer un mecanismo que mantiene cada cara caliente y cada cara fría a la temperatura fijada. Aquí resulta bastante difícil impedir la transferencia de calor entre las distintas caras, así como mantener constante la temperatura de las caras tras tocarlas con las manos o con un termómetro.

<sup>81</sup> Esto no es realmente necesario, pero lo hacemos para que el comportamiento de la entropía sea coherente con el comportamiento de la entropía real que examinaremos en el capítulo 7.

<sup>82</sup> Una magnitud equivalente sería el cuadrado de  $n - N/2$ , es decir,  $(n - N/2)^2$

<sup>83</sup> Recordemos que empleamos los términos «siempre» y «nunca» en el sentido discutido al final del capítulo 4.

<sup>84</sup> Esto tampoco es esencial. Recordemos que, en el *teorema H* de Boltzmann, la magnitud  $H$  también decrece hacia el equilibrio (véase el capítulo 1).

<sup>85</sup> Si se quiere, se puede «normalizar» esta magnitud dividiéndola por  $N/2$  para obtener una función que varía de cero a uno.

<sup>86</sup> Como sólo nos interesa la variación de la entropía, basta con determinar la entropía hasta una constante aditiva, más una constante multiplicativa que determine las unidades de nuestra medida de la entropía. Véanse los capítulos 7 y 8.

<sup>87</sup> La definición también se aplica al caso más general donde la descripción inespecífica es «hay  $n_A$  que muestran la cara  $A$ ,  $n_B$  que muestran la cara  $B$ , etcétera, en un sistema de  $N$  dados».

<sup>88</sup> Nótese que podemos hablar de «información» o de «información perdida». La primera se aplica a la información que contiene el sistema. Nos referimos a la segunda cuando nos preguntamos cuánta información necesitaríamos adquirir para conocer el estado *específico* o la configuración *específica*.

<sup>89</sup> Se puede demostrar que este número es  $\log_2 N$ , es decir, el logaritmo en base 2 del número de dados. Nótese que, en este ejemplo,  $N$  es el número de dados y también el número de configuraciones específicas.

<sup>90</sup> Nótese que la información perdida de la que hablamos aquí es una función estrictamente creciente de  $N$  y de  $n$  (para  $n < N/2$ ). Al efectuar un experimento con dados, la información perdida que registramos se comporta como las gráficas que hemos visto en el capítulo 4 de la suma en función del número de pasos.

<sup>91</sup> El número de preguntas es  $\log_2 W$ , donde  $W = N!/(N-n)!n!$  es el número total de maneras de obtener  $n$  «unos» (o caras de una moneda) en  $N$  dados (o  $N$  casillas). Nótese que este número varía simétricamente en torno a  $n = N/2$ , donde  $W$  alcanza el valor máximo.

<sup>92</sup> Este aspecto ya fue discutido por Shannon (1948). Una exposición más detallada de este tema puede encontrarse en Ben-Naim (2007).

<sup>93</sup> En realidad, la entropía absoluta del sistema no interesa. Lo que importa, y lo que es medible, es la diferencia de entropía.

<sup>94</sup> Aquí hablamos de «sentido común» desde un punto de vista estrictamente lógico. Hasta hace muy poco, la teoría de la evolución estaba muy lejos de ser «de sentido común». Esto sólo cambió tras el descubrimiento del ADN y la consiguiente comprensión del mecanismo de la evolución al nivel molecular.

---

<sup>95</sup> Un enunciado más corriente es: «El sistema evoluciona hacia el desorden». Lo comentaremos en el capítulo 8.

<sup>96</sup> Nótese que hablo de los «sucesos inespecíficos», en plural y no en singular, correspondientes a la línea de equilibrio. Éstos tienen una probabilidad máxima, ¡pero no son únicos! Los sucesos inespecíficos a los que me refiero son el correspondiente a la línea de equilibrio y los de su vecindad inmediata.

<sup>97</sup> Aquí nos referimos al *estado de equilibrio* en el sentido termodinámico, que no es exactamente lo mismo que la línea de equilibrio. Esta distinción quedará clara más adelante.

<sup>98</sup> Esta clase de proceso se conoce como proceso cuasi estático. Si la compuerta es lo bastante pequeña, no necesitamos abrirla y cerrarla cada vez que pase un átomo. El estado del sistema no es de equilibrio, pero las magnitudes medibles, como densidad, temperatura, color, etcétera, cambiarán tan lentamente que será como si atravesáramos una secuencia de estados de equilibrio.

<sup>99</sup> Véase, no obstante, lo que hemos dicho de los fermiones y los bosones en el capítulo 2.

<sup>100</sup> En la mecánica clásica, si conocemos las posiciones y velocidades exactas de todas las partículas en un momento dado, en principio podríamos predecir las posiciones y velocidades de todas las partículas en cualquier momento futuro. Pero listar esta vasta cantidad de información no está a nuestro alcance, y menos aún resolver  $10^{23}$  ecuaciones cinéticas. El notable éxito de la mecánica estadística es una prueba monumental de la adecuación del tratamiento estadístico para los sistemas constituidos por un número inmenso de partículas.

<sup>101</sup> La predicción de las probabilidades a partir de la dinámica de las partículas plantea un problema profundo y difícil. Todos los intentos, de Boltzmann en adelante, han fracasado. En principio, no se pueden derivar probabilidades a partir de las ecuaciones deterministas de los movimientos de las partículas. Por otro lado, es bien sabido que un sistema con un gran número de partículas moviéndose al azar exhibe regularidades y comportamientos notablemente predecibles.

<sup>102</sup> Por supuesto, un sistema así no es factible. La realización de un experimento semejante equivale a conocer exactamente la posición y velocidad de cada partícula en cualquier momento.

<sup>103</sup> Los dos isómeros rotan el plano de la luz polarizada a la derecha (dextro) o a la izquierda (levo).

<sup>104</sup> Este proceso se ha llamado desasimilación, esto es, el inverso del proceso de asimilación, definido como la pérdida de identidad de las partículas. En algunos libros de *texto* se describe erróneamente como un proceso de mezcla. Para más detalles, véase Ben-Naim (1987, 2006).

<sup>105</sup> Esto resulta intuitivamente evidente. Puesto que, aparte de ser imágenes especulares uno del otro, ambos isómeros son idénticos, no hay razón por la cual una forma deba predominar sobre la otra en el equilibrio. Por las mismas razones que en el caso del proceso de expansión, habrá más o menos el mismo número de partículas en  $D$  y en  $L$  (suponiendo que los volúmenes de ambos compartimentos sean iguales).

<sup>106</sup> Hay que señalar que en un sistema de gas ideal sólo hay dos tipos de información: posiciones y velocidades. Las identidades de las partículas no constituyen una nueva clase de información. Pero el cambio de identidad sí contribuye a la variación de información (para más detalles, véase Ben-Naim, 2007).

<sup>107</sup> Siempre que hablamos de  $N/2$  partículas, queremos decir en la vecindad de  $N/2$ .

<sup>108</sup> En vez de la probabilidad de que un átomo atraviese el agujero y pase de  $D$  a  $I$ , o de  $I$  a  $D$ , tenemos la probabilidad de que un isómero adquiera energía suficiente (a través de las colisiones) para pasar de la forma  $d$  a la forma  $l$ , y viceversa, o para combinarse con el catalizador, que inducirá la transformación de un isómero en otro.

<sup>109</sup> También podríamos conseguir el mismo efecto mezclando dos gases diferentes, como en la figura 1.4. En tal caso, el color (o el olor, o el sabor) se registrará continuamente pero no homogéneamente, como en el proceso descrito en esta sección.

<sup>110</sup> Aquí hay que hacer una puntualización sutil. La información de la que estamos hablando es la situación de las partículas en  $I$  o  $D$ . Podríamos haber decidido dividir el sistema en un

número mayor de celdillas menores, digamos cuatro en  $D$  y cuatro en  $I$ . En tal caso, la *información* del estado inicial es diferente, ya que estaremos especificando qué partícula está en qué *celdilla*, lo mismo que la información del estado final. Sin embargo, la *diferencia* de información (y de entropía) es independiente de las divisiones internas, siempre que hagamos la misma subdivisión de ambos compartimentos (para más detalles, véase Ben-Naim, 2006, 2007).

<sup>111</sup> En el libro de Brillouin (1962) se hace la chocante afirmación de que «la probabilidad tiende a aumentar». Esto probablemente es un *lapsus linguae*. Lo que Brillouin seguramente quería decir es que *sucesos* de baja probabilidad evolucionan hacia sucesos de elevada probabilidad. Las probabilidades mismas no cambian.

<sup>112</sup> En general, esta igualdad puede derivarse de la identidad

$$(1+1)^N = 2^N = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

<sup>113</sup> Por «cerca» entendemos un porcentaje muy pequeño de  $N$ , digamos del 0,001%. Estos estados son tan próximos que resultan indistinguibles experimentalmente. Si partimos de un sistema con exactamente  $N/2$  elementos en cada compartimento, y luego suprimimos la separación, el número de estados aumenta de  $M/(N/2)!(N/2)!$  a  $2^N$ . Éste es un incremento enorme en el número de estados, pero, para  $N \approx 10^{23}$ , no apreciaremos ningún cambio en el sistema. Cada compartimento contendrá cerca de (pero no exactamente)  $N/2$  partículas.

<sup>114</sup> Aquí nos permitiremos suponer que las partículas pueden etiquetarse.

<sup>115</sup> Esta probabilidad es  $(2^N)/(M)^2 \times 2^{-2N}$ .

<sup>116</sup> No podemos distinguir entre estados inespecíficos o muy próximos (como entre  $N$  y  $N+1$ , o  $N+1000$ ). Esta indistinguibilidad es diferente de la indistinguibilidad entre estados específicos pertenecientes al mismo estado inespecífico. En el primer caso la indistinguibilidad es en la *práctica*, mientras que en el segundo la indistinguibilidad es en *principio*.

<sup>117</sup> Nótese de nuevo que, para definir la entropía de cada estado inespecífico, tenemos que abrir y cerrar las compuertas entre los compartimentos en cada punto donde queremos calcular la entropía. De esta manera permitimos que el sistema proceda a través de una secuencia de estados de equilibrio.

<sup>118</sup> A veces la entropía se describe como una medida de la dispersión de la energía. Hay que decir que el término «dispersión», como «orden», es apropiado a veces, pero no siempre, como evidencia este ejemplo.

<sup>119</sup> Shannon (1948, sección 20). Una discusión más detallada de este aspecto de la información perdida puede encontrarse en Ben-Naim (2007).

<sup>120</sup> Se sobrentiende que el proceso es cuasi estático, esto es, la transferencia de calor es lo bastante lenta para que el equilibrio dentro de cada gas prácticamente se mantenga a cada paso. Podemos imaginar un pequeño agujero que permite el paso de gas de un compartimento a otro, similar al caso descrito en el proceso de expansión. También podemos imaginar un material conductor muy estrecho que conecte ambos sistemas.

<sup>121</sup> Nótese que todo este conocimiento se supone aportado por la física. Es verdad, no obstante, que parte de este conocimiento se adquirió tras la formulación y el estudio de la segunda ley. Pero aquí presumimos que esta información no es dada de antemano.

<sup>122</sup> Este supuesto tan extremo no es esencial, pero es más fácil pensar que sólo pasa una partícula de un compartimento a otro cada vez.

<sup>123</sup> Cuando digo «hasta que no se descubrió y aceptó» quiero decir que *aún* no se había descubierto y aceptado. Si la materia no consistiera en átomos y moléculas, no habría habido misterio, porque no se daría ninguno de los fenómenos descritos. La segunda ley, tal como se formuló en el marco de la termodinámica clásica, no habría existido.

<sup>124</sup> «Tener sentido» no debe entenderse aquí en el sentido lógico, sino en el de la experiencia común y corriente.

<sup>125</sup> Véase el capítulo 1, página [31]. Volvemos a citar las palabras de Clausius sobre la elección del término «entropía». Clausius dice: «Propongo llamar a  $S$  la *entropía* de un cuerpo, que en griego significa transformación».

---

<sup>126</sup> Según la definición del Merriam-Webster's Collegiate Dictionary (2003).

<sup>127</sup> | Greene (2004).

<sup>128</sup> Una excepción es el libro de Gamow *Un, dos tres, infinito*, que abre una sección con el título «La misteriosa entropía», pero acaba así: «Como puede verse, no hay nada en ella que deba asustarnos».

<sup>129</sup> Atkins (1984).

<sup>130</sup> Es interesante señalar que «entropía» y «la segunda ley» figuran en los títulos de cientos de libros (véase la bibliografía). Hasta donde yo sé, ninguna otra ley de la física ha tenido el mismo tratamiento.

<sup>131</sup> Atkins (1984).

<sup>132</sup> Penrose (1989, 1994).

<sup>133</sup> Véase la nota 123 precedente.

<sup>134</sup> Además, Shannon construyó la medida de la información, o la incertidumbre, requiriendo que cumpliera ciertas condiciones. Estas condiciones son plausibles para la *información*, pero no para el desorden. Para leer más sobre este aspecto de la entropía, véase Ben-Naim (2007).

<sup>135</sup> Para la interpretación de la entropía sobre la base de la teoría de la información, véase Jaynes (1983).

<sup>136</sup> Los microestados y macroestados a que nos referimos aquí son lo que hemos llamado estados (o configuraciones, o sucesos) *específicos e inespecíficos*.

<sup>137</sup> Atkins (1984).

<sup>138</sup> Por «adimensional» se entiende carente de unidades.

<sup>139</sup> Esta identidad tiene la forma (para partículas atómicas de masa  $m$ )  $3kT/2 = m\langle v^2 \rangle/2$ , donde  $T$  es la temperatura absoluta,  $\langle v^2 \rangle$  es el promedio de los cuadrados de las velocidades atómicas, y  $k$  es la misma  $k$  que figura en la tumba de Boltzmann.

<sup>140</sup> Con esto la relación  $3kT/2 = m\langle v^2 \rangle/2$  se simplifica:  $3\tilde{T}/2 = m\langle v^2 \rangle/2$ . La constante  $R$  en la ecuación de estado para los gases ideales se transformaría en el número de Avogadro  $N_{AV} = 6,022 \times 10^{23}$ , y la ecuación de estado de un mol de gas ideal sería  $PV = N_{AV}\tilde{T}$  en vez de  $PV = RT$ .

<sup>141</sup> La fórmula de Boltzmann presupone que conocemos las configuraciones que cuentan en  $W$ . Hasta donde yo sé, esta ecuación no se discute en el marco de la termodinámica no relativista. En el caso de la entropía de un agujero negro, lo cierto es que no se sabe si esta relación es válida. Debo este comentario a Jacob Bekenstein.

<sup>142</sup> Tribus y McIrvine (1971).

<sup>143</sup> Como de hecho se hace en muchos campos de la física.

<sup>144</sup> Nótese que la entropía seguiría siendo una magnitud extensiva, esto es, sería proporcional al tamaño del sistema.

<sup>145</sup> Citado por Jacob Bekenstein (2003).

<sup>146</sup> Una pregunta binaria proporciona un bit (una unidad binaria) de información. Un libro típico contiene alrededor de un millón de bits. Se estima que todo el material impreso en el mundo contiene unos  $10^{15}$  bits. En mecánica estadística se manejan cantidades de información del orden de  $10^{23}$  y más bits. Podemos definir la información en dólares o euros. Si comprar un bit de información costara un céntimo, entonces la información de un libro típico costaría un millón de céntimos, o 10 000 euros. ¡Todo el dinero del mundo no nos alcanzaría para comprar la información contenida en un gramo de agua!

<sup>147</sup> Greene (2004, pág. 13).

<sup>148</sup> Aquí nos referimos a las leyes clásicas (newtonianas) o mecanocuánticas de la dinámica, que tienen simetría temporal. Hay fenómenos en el mundo de las partículas elementales que no son reversibles en el tiempo, pero nadie cree que constituyan las raíces de la segunda ley. Debo este comentario a Jacob Bekenstein.

<sup>149</sup> Gamow (1940, 1999).

<sup>150</sup> Habría que decir que, hasta donde sabemos, no hay ninguna ley natural que *limite* la longevidad de las personas o de cualquier sistema vivo. Podría ser que alguna simetría fundamental lo excluyera. Pero esto podría valer también para la velocidad de la luz o la constante de Planck. Si así fuera, entonces ninguna de las fantasías de Gamow podría



realizarse en cualquier «mundo» donde la velocidad de la luz o la constante de Planck tuviesen valores distintos.

<sup>151</sup> Aunque mis conocimientos de cosmología son mínimos, creo que lo que he expuesto en esta sección es también aplicable a la «segunda ley generalizada» que se usa en conexión con la entropía de un agujero negro (véase Bekenstein, 1980).

<sup>152</sup> Con esto no quiero decir que uno puede deducir la segunda ley resolviendo las ecuaciones del movimiento de las partículas, sino a partir del comportamiento estadístico del sistema. Lo primero es impracticable para números de partículas del orden de  $10^{23}$ .

<sup>153</sup> De nuevo, no pretendo predecir el comportamiento del huevo que revienta resolviendo las ecuaciones dinámicas de todas las partículas que lo integran. Pero en principio, conociendo todos los grados de libertad posibles de todas las moléculas componentes, podríamos predecir el destino más probable del huevo.