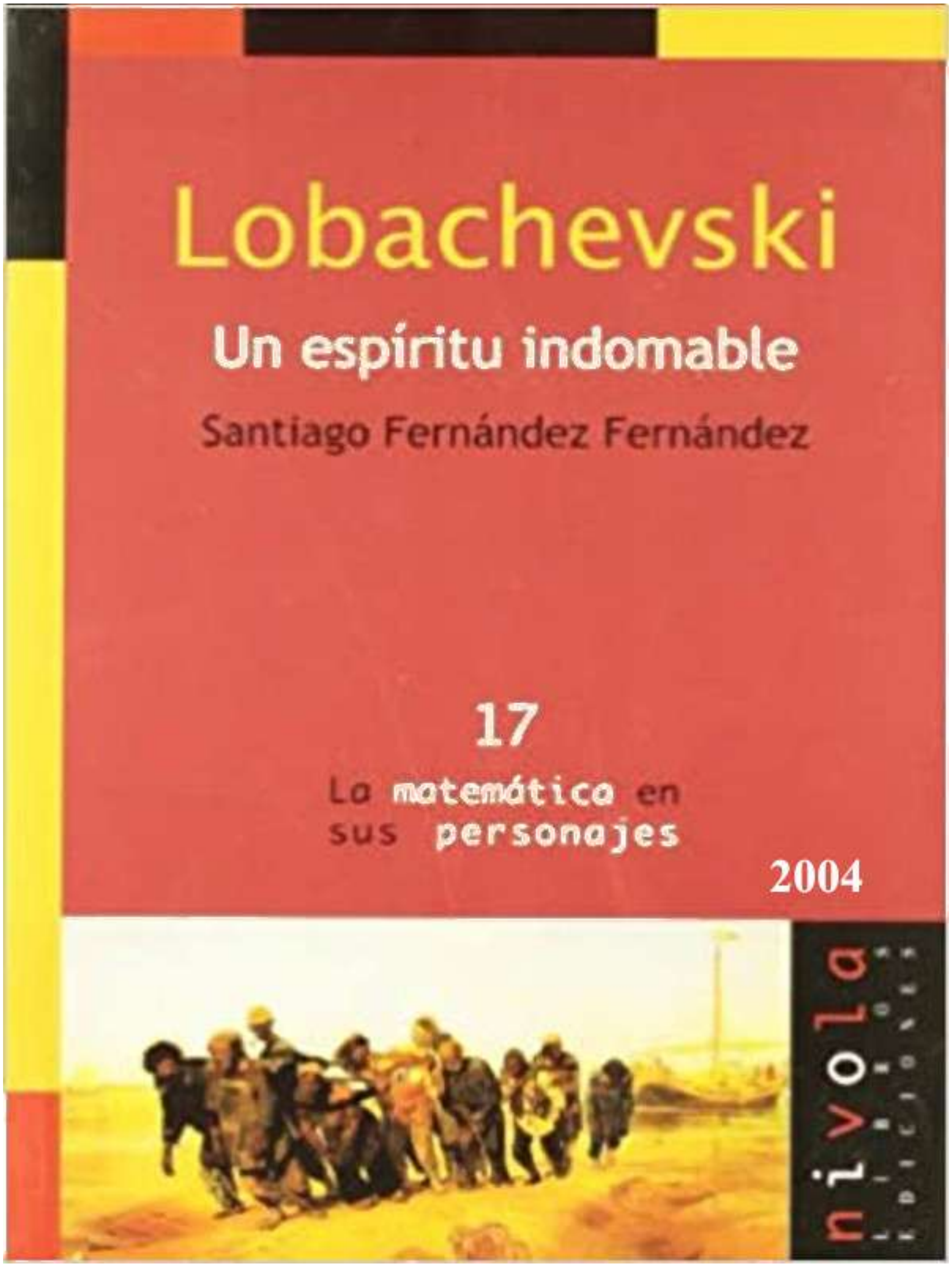

Lobachevski
Un espíritu indomable
Santiago Fernández Fernández
17
La matemática en sus personajes
2004
nivola

## Reseña

Venerado y vilipendiado a un tiempo, Lobachevski se cierne imponente sobre la matemática del siglo XIX. Al igual que sucede a la mayoría de los mitos, el Lobachevski real está oculto por capas de negligencia y desconocimiento. Su fantástica obra, argumentaban muchos, no era otra cosa que herejía matemática, una senda falsa.

Lobachevski es una personalidad abrumadora, un soñador empedernido, un hacedor de mundos imposibles pero reales. Lobachevski es, para muchos, una persona desconocida. Este libro cuenta la historia de un hombre sencillo, pero sagaz, obstinado y profundo desde el punto de vista matemático.

# Índice


Introducción

1. El estudiante Lobachevski
2. El imperio ruso y la dinastía de los Romanov
3. Profesor en la Universidad de Kazán
4. Los *Elementos* de Euclides
5. El problema de las paralelas
6. Los precursores de la geometría no euclidiana
7. Las primeras investigaciones geométricas
8. Acerca de los principios de geometría
9. Rector de la Universidad de Kazán
10. Investigaciones geométricas de la teoría de las paralelas
11. Últimos años
12. Gauss, Bolyai, Riemann. Los otros Padres de las geometrías no euclidianas
13. Los modelos geométricos
14. Fundamentación de la geometría

Cronología

Bibliografía

El autor

*A mi mujer, Ana y a mis hijas,*
*Nora e Iris*

## Introducción

Debía tener yo unos dieciséis años cuando uno de mis profesores nos habló de un sabio griego que se llamaba Euclides. Nos comentó que era matemático, y que había dedicado toda su vida a escribir sobre aspectos científicos, pero lo más sobresaliente es que había creado un edificio majestuoso que aún estaba en pie; sin embargo, añadía, con los años se ha descubierto que ese majestuoso edificio tiene algunas fisuras (seguramente nos citaría algo relativo al quinto postulado), los esfuerzos por enmendar el asunto, nos seguía diciendo, han dado lugar a teorías matemáticas muy importantes, que a la postre han servido para revolucionar la geometría, la física y la ciencia en general. En aquellos años, nadie me habló de geometrías no euclidianas, ni de Bolyai, ni de Lobachevski, creo recordar que Gauss sí me fue presentado, pero como un genio precoz de la aritmética.

Al año siguiente, hacía yo preuniversitario, un profesor llamado Fermín Demás volvió a incidir tímidamente en el tema. En la Facultad de Matemáticas curiosamente nadie mentó el asunto de una manera organizada a pesar de haber cursado dos asignaturas de geometría. En resumen, las llamadas geometrías no euclidianas eran para mí todo un enigma.

Sin embargo, tuve la suerte de tener como profesor, y posteriormente como compañero de departamento, a Emiliano Aparicio, formado en la escuela matemática rusa y amante de dicha cultura. Sus detalladas exposiciones plagadas de anécdotas biográficas me cautivaron. Durante varios años hablé con él de varios de sus matemáticos preferidos: Kolmogórov, Lobachevski y Vinogradov, entre otros. Y así fue como decidí acercarme a las creaciones científicas de esos grandes matemáticos rusos. Desde el principio, no sé muy bien por qué, Lobachevski fue uno de mis preferidos.

Años después cayó en mis manos una extensa biografía de Lobachevski escrita por Kagan, lo que hizo que conociera mejor su figura. Durante años traté de entender mejor al matemático ruso, pero su geometría rayaba lo irracional o mejor dicho presentaba una realidad poco imaginable.

Hace dos años le propuse a Jesús Fernández, editor del libro, escribir sobre Lobachevski, él aceptó amablemente e inmediatamente me puse a organizar mis lecturas e ideas, sin saber muy bien en qué me metía.

Este libro aborda la vida y obra del gran matemático ruso Nicolai Lobachevski, creador de una de las geometrías no euclidianas, la geometría hiperbólica, junto al húngaro J. Bolyai y el matemático alemán C. F. Gauss. Durante dos décadas, Lobachevski, desempeñó el cargo de rector de la Universidad de Kazán con una energía y entrega verdaderamente admirables. En palabras de Clifford (1845-1879), Lobachevski era bastante más que un matemático, calificándole como *el Copérnico de la geometría.* Pero la geometría es sólo una parte del más amplio campo que renovó.

En el recorrido del libro también he tratado de mostrar la evolución del llamado *problema de las paralelas*, que tuvo un desenlace sorprendente: el nacimiento de las geometrías no euclidianas.

Para abordar el citado problema me he basado en criterios históricos y cronológicos. De referencia obligada resultan las excelentes obras de Bonota (1951) y de J. Gray (1992), sus aportaciones han sido fundamentales y he recurrido a ellas en multitud de ocasiones.

Desde luego el libro ha sido para mí todo un reto intelectual, y además era necesario ubicar al personaje en un país y en una época.

Los capítulos cuatro, cinco y seis los dedico a estudiar el denominado *problema de las paralelas*, comienzo con la figura de Euclides y finalizo con las aportaciones de los llamados precursores de las geometrías no euclidianas: Saccheri, Lambert, Schweikart y Taurinus.

El capítulo doce está dedicado íntegramente a los otros padres de la geometría hiperbólica: Gauss y J. Bolyai. En los dos últimos capítulos se afronta la repercusión filosófico-matemática que ha tenido el nacimiento de las nuevas geometrías. Los demás capítulos están dedicados íntegramente a estudiar la figura de Lobachevski.

Afrontar la biografía científica de un personaje tan complejo como Lobachevski lleva muchas horas de investigación, reflexión, lectura y escritura. Ha sido un trabajo arduo tanto para mí como para muchos de mis seres queridos, pero ampliamente recompensado ya que he tenido la oportunidad de conocer más profundamente a un personaje sorprendente.

En este largo caminar he tenido algunas ayudas inestimables. Comenzaré por las personas que revisaron los primeros borradores y me aportaron sus generosas reflexiones de cara a mejorar el escrito, me refiero a Marta Macho, y a Raúl Ibáñez, profesores de la Universidad del País Vasco; ellos, durante algunos días se dedicaron a discutir conmigo aquellos apartados más oscuros que eran susceptibles de mejora.

También a Antonio Aparicio, pues sus traducciones de algunos artículos rusos fueron de vital importancia para que yo comprendiera mejor el espíritu científico ruso de principios del siglo XIX. No quiero olvidarme de Antonio Pérez que puso su tiempo de descanso, su saber y su cariño en la mejora y presentación del manuscrito. Ni tampoco del editor, Jesús Fernández, su ánimo y apoyo han sido cruciales para que yo siguiera con esta empresa. Por supuesto a mi familia: Iris, Nora y Ana, ellas generosa y pacientemente han sabido soportarme durante muchos días y muchas noches, a ellas las he dedicado el libro porque han tenido una infinita paciencia conmigo; espero que cuando mis hijas Iris y Nora sean mayores puedan leer el libro y comprender por qué les fui robando tiempo para estar conmigo.

## Notaciones

Usamos notaciones habituales en geometría. Los puntos se representarán por letras mayúsculas A, B, C,... , P, Q, y las rectas por letras minúsculas f, m, n,... , p, q. El segmento de extremos A y B se denotará por AB, y su longitud por *long (AE).* También se denotará por AB la recta que pasa por los puntos A y B.

Los ángulos se representarán por letras griegas α, β, γ,... , salvo los ángulos interiores de un polígono de vértices A, B, C,..., que se podrán representar por A, B, C

# Capítulo 1
# El estudiante Lobachevski

*"Las grandes obras las sueñan los genios, las ejecutan los luchadores, las disfrutan los felices y las critican los inútiles crónicos".*
*Proverbio árabe*

## §. Los primeros años

Cuando el joven C. F. Gauss (1777-1855) había cumplido quince años, nacía en una localidad rusa llamada Nizhni Nóvgorod un niño, que con el paso de los años se convertiría en uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos. Nueve años antes había muerto Leonhard Euler.

Nikolai Ivanovich Lobachevski vino al mundo el 1 de diciembre de 1792. Su padre, Iván Maksimovich Lobachevski, era una persona humilde que trabajaba en una pequeña oficina dedicada a la inspección de tierra. Su madre, Praskovia Aleksandrova, era una mujer enérgica, inteligente y muy preocupada por la educación de sus hijos. Debido a su constancia y tesón la familia Lobachevski pudo salir adelante.

Nikolai era uno de los tres hijos de esta humilde familia. Cuando tenía siete años murió su padre, y ese mismo año, 1800, su madre trasladó la residencia a la populosa ciudad de Kazán buscando mejores horizontes para sus tres hijos.


## §. La ciudad de Kazán

Kazán está situada en el centro de la Rusia europea, al este de Moscú y a unos 800 kilómetros de distancia. Es la actual capital de la República de los Tártaros (Tatarstán).

Fue fundada por los mongoles en el año 1257, y conquistada por los rusos en 1552, que la fortificaron y la salpicaron de multitud de pequeñas iglesias ortodoxas.

Quedó destruida casi por completo en 1774, en el transcurso de la revuelta que protagonizaron los cosacos, pero durante el reinado de Catalina II fue reconstruida casi en su totalidad.

A principios del siglo XIX era una ciudad bastante grande (tenía de 20.000 a 25.000 habitantes), muy animada y, en opinión de sus contemporáneos, extraordinariamente pintoresca.

*La ciudad de Kazán en una litografía antigua.*

La ciudad se encontraba muy dispersa por montes y valles, la mayoría de sus construcciones eran de madera y las pocas casas de mampostería que había eran poco sólidas. La población era bastante variopinta y la cuarta parte estaba constituida por tártaros.

El nivel cultural de la población de Kazán era más bien bajo. Sus centros docentes, hasta mediados del siglo XVIII, eran exclusivamente religiosos y habían sido creados por el régimen zarista con el propósito de incorporar a la población musulmana y pagana a las enseñanzas ortodoxas.

Entre los monumentos de interés histórico y artístico destacan el *Kremlin* (ciudadela) -cuya parte más antigua data del siglo XV-, una iglesia del XVI, dos mezquitas del siglo XVIII y naturalmente su universidad.

En 1759 se inauguró un centro educativo de nivel medio (equivalente a un instituto de enseñanza secundaria), para que los jóvenes de Kazán se pudieran preparar debidamente para ingresar en la Universidad de Moscú o en la Academia de las Ciencias de San Petersburgo. Por problemas de tipo económico y político, el Gymnasium dejó de funcionar en el año 1788, aunque diez años más tarde, a petición del gobernador general de Kazán (el príncipe Mesherski), se abriría de nuevo. En el nuevo centro se enseñaban las siguientes materias: latín, francés, alemán, tártaro, lógica, filosofía práctica, geometría, trigonometría, hidráulica, mecánica, física, química, historia natural, arquitectura civil, agrimensura, derecho político, artillería, táctica, arte de las fortificaciones, dibujo, esgrima y danza.

Un simple vistazo a las asignaturas impartidas nos indica que el Gymnasium respondía a los gustos y necesidades de las capas privilegiadas, preparando a sus hijos -especialmente- para las carreras militares.

El nuevo centro fue llamado Gymnasium Imperial, y disponía de una excelente biblioteca donde había libros y manuscritos de gran valor.

Su apertura fue una de las razones fundamentales por las que la viuda Praskovia Aleksandrova se instaló por un tiempo en la ciudad de Kazán. En noviembre de 1802 solicitó la admisión de sus hijos en el Gymnasium.

*Plano de la fachada principal del Gymnasium Imperial de Kazán.*

Nikolai tenía nueve años, sus hermanos Aleksei y Aleksander contaban siete y once años respectivamente. Después de duros exámenes fueron admitidos los tres. Una vez superada la difícil prueba, la madre de Nikolai escribió una carta a los responsables educativos y les hizo saber su falta de medios para pagar los estudios de sus hijos. La nota iba acompañada de una petición de ayuda económica a la corona. Esta, después, de estudiar la petición se hará cargo de todos los gastos de formación. Por tanto, los esfuerzos maternos fueron recompensados con creces ya que sus tres hijos estaban en disposición de acceder a una importante educación.

La vida escolar en el Gymnasium -según citan varios internos- era extremadamente severa:

> *"Los alumnos se levantaban mucho antes del alba, la luz en todo el recinto era tenue, alumbrada por unas velas de sebo que despedían un desagradable olor, el frío en los dormitorios era extremo, la disciplina muy severa obligaba a los internos a ir formados en filas de manera constante... además los alumnos no podían mantener correspondencia directa con sus familiares, las cartas eran entregadas previamente a sus vigilantes de dormitorio, los cuales decidían el destino de la correspondencia..."*

Sin embargo, en este ambiente hostil y lúgubre, Nikolai conoció a un joven profesor de matemáticas muy motivador: Grigori Ivanovich Kartashevski, persona interesada por la ciencia en general y por las matemáticas en particular. Kartashevski se inspiraba en obras de matemáticos célebres de la época, especialmente en el libro *Eléments de géométrie* del matemático francés A. M. Legendre (1752-1833) publicado en el año 1794.

*Grigori Ivanovich Kartashevski*

Las enseñanzas de este libro y su autor tuvieron una repercusión muy notable -como posteriormente veremos- en los trabajos de geometría de Lobachevski.

En el verano de 1807, Lobachevski, terminó sus estudios en el Gymnasium y se incorporó a la Universidad de Kazán. Su expediente académico era brillante y a los quince años ya era capaz de leer memorias científicas en francés, alemán y latín. Resulta significativo que, a pesar de la modesta educación recibida en su casa, los tres hermanos fuesen capaces de terminar sus estudios de manera tan admirable.

## §. La Universidad de Kazán

Para reforzar la cultura rusa en una región hostil para el imperio ruso, el zar Alejandro I aprobó en 1804 la constitución de la Universidad Imperial de Kazán, que se crea en 1805.

La universidad disfrutaba de unos estatutos bastantes progresistas para la época: tenía amplia autonomía, los profesores y el rector eran elegidos por la propia universidad, y la posibilidad de editar sus propias publicaciones sin la obligación de someterlas a la censura (tan habitual en esa época). Incluso tenía una policía propia.

Sin embargo, era una universidad con muchas deficiencias. En los primeros años carecía hasta de edificios, el cuerpo de profesores era escaso y poco preparado y los únicos estudiantes que accedían a ella eran los provenientes del Gymnasium.

*El edificio principal de la Universidad de Kazán.*

Además no había ni manuales ni centros de enseñanza asociados, y los únicos laboratorios estaban situados en las dependencias del Gymnasium.

El nombramiento de S. Ya. Rumovski como protector del distrito docente de Kazán sería de vital importancia para el futuro de la universidad, ya que Rumovski era un importante astrónomo que había trabajado con Euler, M. V. Lomonósov y otros hombres ilustres de ciencia. Era un personaje singular y el único hombre de ciencia entre los responsables docentes.

Cuando le confiaron el protectorado Rumovski era muy mayor, tenía más de 70 años, pero, a pesar de su edad, en poco tiempo pudo organizar de una manera muy digna las facultades de matemáticas y de física.

Al principio, la Universidad de Kazán era una superestructura del Gymnasium, muchos de los docentes del mismo accedieron a dar clases en ella. Entre ellos cabe citar a G. 1. Kartashevski, que fue nombrado profesor de matemáticas, haciéndose cargo de la cátedra de matemáticas superiores. Rumovski completó el plantel de profesores con docentes extranjeros, especialmente venidos de Alemania. En el año 1808, a invitación Rumovski, tomó posesión de la cátedra de matemáticas M. F. Bartels (1769-1833), un matemático competente y un excelente pedagogo.

*Martin F. Bartels*

Bartels conocía personalmente a Gauss, con el que había coincidido en Braunschweig, y era considerado como un profesor muy concienzudo y trabajador. Permaneció en la Universidad de Kazán durante 12 años (de 1808 a 1820). En ese periodo se le encargaron varias materias: análisis, geometría, mecánica analítica y el desarrollo de cursos especiales para los alumnos más aventajados, entre los que se encontraba Lobachevski.

Bartels utilizaba los textos de la época: cabe citar el *Tratado de cálculo diferencial e integral,* en tres tomos, escrito entre 1797 al 1800 por S. F. Lacroix (1765-1843) (considerado -por su claridad y tratamiento de los temas- el mejor curso de análisis matemático de la época), los libros de Euler y el tratado de Cagnoli sobre trigonometría.

*Grabado de la ciudad de Nizhni Novgorod en el siglo XIX.*

La opinión que tenía Bartels de sus alumnos se resume en la siguiente frase:

*“Gracias a los grandes progresos de la mayor parte de mis alumnos, mis cursos me procuran una intensa satisfacción*

Con respecto a los cursos especiales, a los que siempre asistía Lobachevski, Bartels dedicó un apartado especial a la historia de las matemáticas.

Seguía un texto muy famoso en esa época, el libro del matemático francés J. E. Montucla, en el que se analizan con detalle los *Elementos* de Euclides y, en particular, el famoso quinto postulado. Parece muy probable que el interés de Lobachevski por los fundamentos de la geometría fuera estimulado por estas clases del profesor Bartels.

En 1810 la universidad contrató como profesor de astronomía a I. A. Litrow, catedrático de matemáticas y astronomía de la Universidad de Cracovia (Polonia). Por tanto, el plantel de profesores de las facultades de matemáticas y de física era más que aceptable.

## §. Los años de estudiante universitario

Nikolai Lobachevski ingresó en la universidad con quince años y cuatro años más tarde acabó su formación. Sus pensamientos iniciales iban encaminados hacia el estudio de la medicina; pero el contacto con los matemáticos, especialmente con el profesor Bartels, le hizo cambiar de opinión. A partir de ese momento las matemáticas fueron su pasión, que ya no abandonaría hasta el final de sus días.

La estima y buena opinión de Bartels queda reflejada en la siguiente carta:

> "... *Los progresos de Lobachevski son enormes, puede ser un excelente estudiante en cualquier universidad europea y acaricio la esperanza de que si se continúa perfeccionando, ocupará un lugar eminente en los medios matemáticos...”*
> *(carta de Bartels a Rumovski).*

En 1811 Lobachevski recibió el título de licenciado en física y matemáticas. Sus estudios fueron brillantes, con notas de sobresaliente en la mayoría de las asignaturas.

Por esa época, se recibieron en la universidad una serie de misivas para que se vigilara muy de cerca la conducta de los alumnos. En tales escritos, se obligaba-*”por orden suprema’’*- a las autoridades docentes a expulsar de la universidad a los estudiantes culpables de graves delitos e incluso a enrolarlos en el ejército. Como consecuencia de ello Lobachevski, que estaba bajo sospecha de haber participado en numerosas revueltas estudiantiles, se vio envuelto en un examen de conducta que le causó no pocos problemas.

Cuando el asunto llegó a conocimiento de Rumovski, éste hizo el siguiente informe:

> *"...Quiero hacer notar que el estudiante Nikolai Lobachevski es el primero en mala conducta, y lamento verle malgastar sus excelentes capacidades en su conducta indigna y que le recomiendo modificarla y enmendarse: Si rehusase seguir mi consejo y recibo una nueva queja con respecto a él, me veré obligado a informar al Señor Ministro de Instrucción Pública... "*

A pesar de su comportamiento, la universidad no podía perder a una cabeza tan privilegiada. En una reunión del consejo en la que se debía contratar a nuevos profesores, los docentes alemanes, especialmente Bartels, propusieron a Lobachevski como candidato *al grado de maestro.* El consejo, después de escuchar las alabanzas científicas dirigidas hacia Lobachevski por la mayoría de sus profesores, aceptó admitirle como candidato con la condición de que lamentara su mala conducta y prometiera enmendarse. Este procedimiento humillante le abrió las puertas de la docencia universitaria y el 3 de agosto de 1811 fue confirmado como profesor.

# Capítulo 2
## El imperio ruso y la dinastía de los Romanov

*"Podemos sin duda representar espacialmente un estado de cosas que vaya contra las leyes de la física, pero no uno que vaya contra la geometría".*
*Ludwig Wittgenstein*

### §. La Rusia del XVIII

Tras el ascenso al trono de Pedro I *el grande* en 1694, el reino moscovita pasó a denominarse imperio ruso. Para la inmensa población rusa este reinado fue opresivo y distante, y su rígida estructura normativa lo convertía prácticamente en un régimen de castas. La sorpresiva muerte de Pedro I, en 1725, abrió un periodo de inestabilidad que se prolongó hasta la subida al trono de Catalina II en 1762.

Este gran imperio, que durante el reinado de Pedro I *el grande* sólo contaba con trece millones de habitantes, tenía al término del reinado de la zarina Catalina II, en 1796, un territorio poblado por unos treinta millones de personas, cifra que superaba a la población de Francia.

A mediados del siglo XVIII, el imperio ruso se encontraba en un estado de feudalismo agrario. Las ciudades, aparte de San Petersburgo, Moscú, y algunas otras en el sur, estaban poco desarrolladas. No había prácticamente ni comercio ni industria, y la verdadera base de la economía era la agricultura, de la que vivía el 96% de la población. La tierra era propiedad del estado y de los grandes terratenientes. Los campesinos sólo eran siervos, sus amos poseían verdaderos feudos heredados de sus antepasados, quienes a su vez los habían recibido del zar, primer propietario, en reconocimiento por los servicios prestados.

Los zares y la nobleza eran los propietarios de la mayoría de las tierras rusas, por lo que los campesinos eran personas pobres. Los emperadores de Rusia eran verdaderos autócratas.

La servidumbre era tal que el señor tenía derecho de vida y muerte sobre sus siervos. No sólo les hacía trabajar como esclavos, sino que podía también venderlos, castigarlos, martirizarlos e incluso matarlos, casi sin problemas para su amo. Esta servidumbre de millones de esclavos era la base económica del estado.

La *sociedad* rusa se componía de tres estamentos, uno formado por el zar, su numerosa parentela, su corte, la nobleza, los magnates de la burocracia, la casta militar y el clero. Otro, él más inferior, lo componían los esclavos, los siervos campesinos y la plebe de las ciudades, sin noción alguna de sus derechos y sin la menor libertad. Entre ellos se situaba la clase media, constituida por los mercaderes, los funcionarios, empleados y artesanos.

El nivel cultural, en general, era muy bajo, pero conviene señalar un notable contraste entre la simple población trabajadora, rural y urbana, inculta y miserable, y las clases privilegiadas, cuya educación e instrucción era bastante avanzada.

Los siervos campesinos eran muy numerosos y cada vez estaba más descontentos. A finales del siglo XVIII, algunos hombres instruidos protestaron contra esta situación, pero sus protestas fueron aplastadas sin ningún miramiento. Durante este siglo la situación de la servidumbre se deterioraría hasta límites insospechados y sus amos conseguirían, bajo el reinado de Catalina II, el derecho de enviar a los siervos a Siberia (lugar típico de deportación) como convictos, sin proceso público. No es sorprendente que los campesinos se sublevaran una y otra vez en numerosas revueltas locales. A ojos de los intelectuales occidentales, el imperio ruso era un estado *"bárbaro y oriental".*

El primer movimiento francamente revolucionario, el de los *decembristas* (1825), tenía en su programa, en lo social, la abolición de la servidumbre y, en lo político, la instauración de una república o régimen constitucional.

En el periodo que nos interesa hay dos zares que es preciso conocer, ya que sus trayectorias políticas marcaron de manera definitiva la vida en el vasto imperio ruso: Pedro I *el grande* y Catalina II.

Pedro I *el grande* (1672-1725), zar de Rusia (1682-1725), nació en Moscú el 9 de junio de 1672, hijo del zar Alexis Mijailovich, y fue educado por profesores particulares. Posteriormente, estudió artes técnicas y mecánicas, en particular ciencias militares y navales. Desde 1682 hasta 1689, bajo la regencia de su hermanastra Sofía Alexeievna, compartió el trono con su hermanastro mayor, Iván IV, pero en 1689 los partidarios de Pedro derrocaron a Sofía y le instalaron a él como único dirigente.

Durante su reinado, Rusia se convirtió en una gran potencia europea.

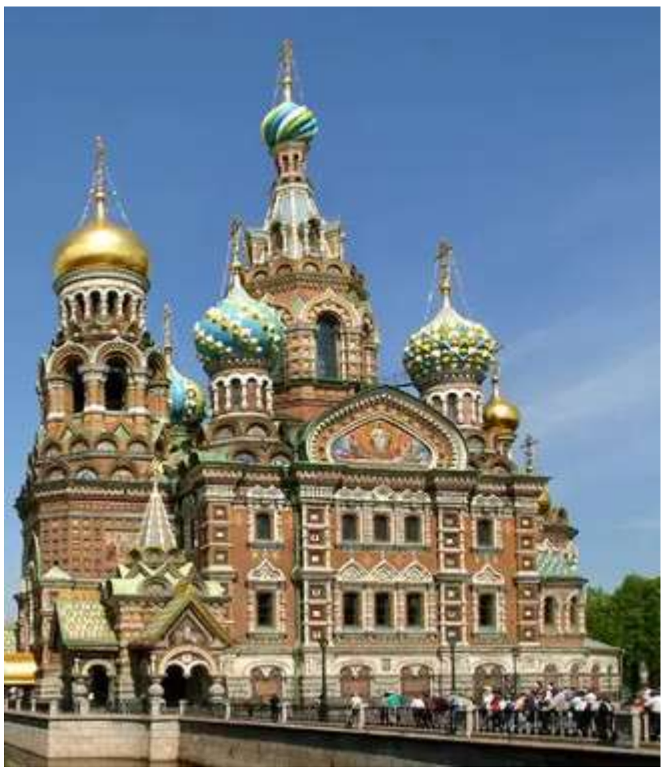
*Pedro I el grande*

Durante el reinado de Pedro I se sustituyó el alfabeto eslavo por uno similar al latino, se introdujeron los números arábigos, se publicó el primer periódico en ruso, se fundaron escuelas y se creó la famosa Academia de Ciencias de San Petersburgo.

***San Petersburgo, capital imperial***

*San Petersburgo (llamada Petrogrado en el periodo 1914 a 1924 y Leningrado en el periodo de 1924 a 1992) fue fundada en 1703 en la desembocadura del Nena por el zar Pedro el* *grande para europeizar a la atrasada nación rusa. Para su construcción fueron traídos miles de campesinos, artesanos y soldados.*

*Es una ciudad que nació de repente, no tuvo un proceso de desarrollo gradual y equilibrado. Se construyó a la fuerza, piedra a piedra, edificio a edificio... bajo la dirección de Pedro el grande. En 1715 fue declarada capital de Rusia y lo siguió siendo hasta 1918. Todavía hoy se la llama la capital del norte.*



*La iglesia de la Sangre Derramada.*

*Arquitectos de todo el mundo participaron en la construcción de la ciudad. Sus palacios color pastel, sus parques, el trazado de sus avenidas, la geometría de la ciudad, sus* *puentes, sus pináculos brillantes y cúpulas doradas, hacen de San Petersburgo una ciudad de ensueño.*

*Museo de Antropología y Etnografía de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.*

*La ciudad está situada sobre 44 islas del delta del río Neva y es famosa por sus puentes, sus museos y, por supuesto, por sus noches blancas en las que el sol brilla las 24 horas del día. Es conocida como la Venecia del norte.*

*Es una ciudad que cautivó a muchos poetas y que se convirtió en el escenario de la literatura rusa del siglo XIX. Por ella se mueven tanto el personaje de Raskolnikov de Crimen y castigo de Dostoievski, como Eugene Onegin de Pushkin.*

*En el siglo XIX la ciudad fue testigo de la lucha contra la opresión zarista. Aquí se avivaron las llamas tempranas de la* *revolución de diciembre de 1825, impulsada por un pequeño grupo de oficiales aristocráticos, los llamados decembristas.*

*San Petersburgo fue la capital de Rusia durante dos siglos. A orillas del Neva se desarrollaron con rapidez las ciencias y florecieron las artes. Allí nacieron la Academia de Ciencias y la Academia de Bellas Artes.*

Pedro I realizó reformas internas de un gran calado: la subordinación de los boyardos (nobleza rusa) y de la iglesia al trono, el fomento de la industria, el comercio y la educación, y la reorganización del aparato administrativo del estado para hacerlo más moderno y eficiente, creando ministerios especializados. Hizo también una reforma del ejército que permitió a personas sin título nobiliario la posibilidad de acceder al cuerpo de oficiales. En definitiva, sentó las bases del gran imperio ruso. Falleció el 8 de febrero de 1725 en San Petersburgo.

## §. Catalina II *la grande* (1729-1796), emperatriz de Rusia (1762-1796)

Catalina II *la grande* se llamaba en realidad Sophie Fredericke Auguste von Anhalt-Zerbst y había nacido en Stettin (actual ciudad de Szczecin, en Polonia) el 2 de mayo de 1729, hija de un príncipe alemán. Sus padres, cosas de la vida, habían visto con disgusto su nacimiento, pues deseaban un varón. Catalina recibiría una educación con la que no podía aspirar más que a un mediocre matrimonio.

Sin embargo, en 1745 se casó con el gran duque Pedro de Holstein, heredero del trono ruso y en 1754 dio a luz un hijo, el futuro emperador Pablo. El marido de Catalina accedió al trono como Pedro III en 1762, pero era una persona excéntrica y sumamente despectivo con sus súbditos y el 9 de julio de 1762, siguiendo una práctica habitual en la Rusia del siglo XVIII, la guardia imperial le derrocó y colocó en el trono a Catalina. Pocos días después fue asesinado. Catalina llevaría a cabo los sueños imperiales de Pedro I, aumentando territorialmente su imperio, principalmente a costa de Polonia y Turquía

*Catalina II la grande*

La zarina conocía bastante bien la literatura de la Ilustración francesa, que ejerció una gran influencia sobre su propio pensamiento político, y mantuvo un estrecho contacto con Voltaire y con el enciclopedista Denis Diderot. Además prestó apoyo económico a varios escritores franceses, y el mismo Diderot fue huésped de su corte en 1773. Los enciclopedistas franceses la denominaron la *Minerva rusa y la Semíramis del norte.*

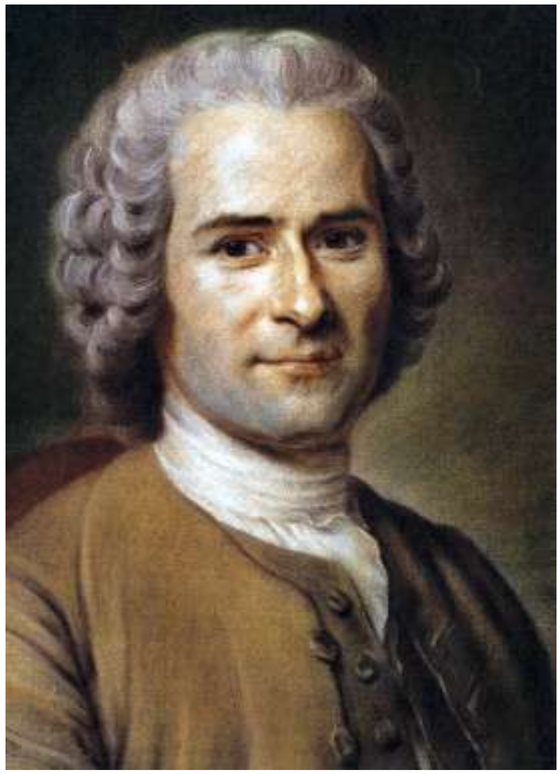
El objetivo de Catalina era el poder aplicar algunas de las ideas ilustradas a la racionalización y reforma de la administración del imperio ruso, pero desgraciadamente no logró su objetivo.

La soberana trazó un ambicioso plan integral de educación que abarcaba desde la enseñanza primaria hasta la creación de cinco universidades, pero por distintos motivos este plan no logró ponerse en práctica, deteniéndose en la enseñanza secundaria.

En los primeros años de su reinado, Catalina trató de ganarse el apoyo de la nobleza y, a pesar de su declarado aborrecimiento de la servidumbre, hizo mucho por extender esta institución concediendo a las clases acomodadas y a la nobleza privilegios tales como la concesión de tierras, títulos, cargos y siervos para trabajar.

El malestar de los campesinos culminó en una gran rebelión (1773-1775), encabezada por el cosaco Yemelián Pugachov, que hizo estragos en la mayor parte de la cuenca del río Volga y en los montes Urales, antes de ser definitivamente aplastada por las fuerzas militares. Como respuesta a la rebelión en el año 1775 se llevó a cabo una importante reforma de la administración provincial con el fin de conseguir un mejor control del imperio.

Durante su reinado, el territorio del imperio ruso se extendió enormemente gracias a dos guerras contra el imperio otomano (1768-1774) y (1787-1791) y a la anexión de Crimea (1783).



*Jean-Jacques Rousseau*

Además Rusia logró controlar la costa norte del mar Negro. Por último, el control ruso sobre Polonia y Lituania hizo aumentar de manera considerable el poderío de su imperio.

Las relaciones entre Rusia y Francia se deterioraron de tal manera que Catalina se mostró implacable contra los republicanos franceses. Hubiera incluso llegado hasta la misma Francia, de no ser porque el 16 de septiembre de 1796 dejó de latir su corazón.

Catalina ha sido considerada como una mujer inteligente, culta, sagaz, muy hábil, apasionada y que desempeñó un papel clave en el desarrollo de Rusia como estado moderno, pero a pesar de sus esfuerzos por modernizar el país la vida del pueblo ruso prácticamente no resultó alterada.


*Rusia durarte el reinado de Catalina II la grande.*

**Alejandro I**

*Alejandro I (1777-1825), zar de Rusia (1801-1825) abolió muchos castigos bárbaros y crueles infligidos en aquella época y estableció un sistema administrativo más ordenado con la creación de ocho ministerios en 1802. Mejoró las condiciones* *de vida de la servidumbre y fomentó la educación, duplicando el número de universidades rusas con la fundación de las de San Petersburgo, Kharkov y Kazán. Alejandro I fue aliado de Prusia y enemigo de Napoleón durante un tiempo. No obstante, en 1807, después de las batallas de Eylau y Friedland, se alió con Francia. Rompió esta alianza y en 1812 Napoleón invadió Rusia, acción que concluyó con la pérdida de su ejército y una trágica retirada de Moscú.*

*La llamada Guerra Patria convirtió a Rusia en la primera potencia del continente.*

*Zar Alejandro I*

*Posteriormente, Alejandro I desempeñó un papel destacado en la coalición europea que provocó la caída de Napoleón. En 1815 promovió la Santa Alianza junto con Austria y Prusia con* *el fin de garantizar el mantenimiento del orden absolutista y reprimir cualquier intento de alterar la situación política en Europa. Los últimos años de su reinado se caracterizaron por un talante reaccionario y despótico. Le sucedió su hermano Nicolás I.*

La falta de una burguesía urbana y de funcionarios cultos fueron algunos de los obstáculos principales en ese intento de situar al imperio ruso al nivel de otras naciones europeas.

## §. Rusia a principios del siglo XIX

A comienzos del siglo XIX, Rusia era una de las grandes potencias europeas. A lo largo de la primera mitad de este siglo continuó -aunque muy lentamente- el proceso de desaparición de la servidumbre y se produjo un progreso particularmente notable en la industria.

A Catalina II le sucedió su hijo Pablo I, emperador desde 1792 hasta 1801. En este corto reinado inició una política contraria a la de su madre, persiguió con extrema dureza las ideas de los intelectuales rusos, impuso la censura cultural, el exilio interno e incluso prohibió los viajes al exterior del país. En 1801 el descontento de casi todas las capas sociales era muy grande, lo que propició la conspiración contra el emperador y su posterior asesinato. Le sucedió su hijo Alejandro I, que pretendió implantar una monarquía constitucional pero sin abandonar el gobierno autocrático.

En los primeros años de mandato trató de estabilizar el país ya que quería un reino en paz. Sin embargo, en 1805, el emperador francés Napoleón le declaró la guerra y el imperio ruso, introducido de lleno en una economía de guerra, sufrió lo indecible. La guerra napoleónica afectó muy negativamente a la economía rusa y muchas provincias occidentales y centrales fueron devastadas.

# Capítulo 3
## Profesor en la Universidad de Kazán

*"Las matemáticas son una gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía".*
*Isócrates*

A punto de cumplir los 19 años, Lobachevski ya era docente de la Universidad de Kazán. Comenzaba su vida como pedagogo y creador.

En los primeros años la influencia del profesor Bartels fue crucial, ya que le puso en contacto con las grandes obras del siglo XVIII. Lobachevski y su amigo I. M. Simonov asistieron a unas lecciones dictadas por Bartels. En ellas estudiaron concienzudamente la famosa obra, en cinco volúmenes, *Tratado de mecánica celeste* (1799) de Laplace. Los progresos de Lobachevski, en opinión de Bartels, fueron muy satisfactorios:

> *"Como saben mis distinguidos y respetables colegas, al comienzo del año he aceptado dirigir los estudios avanzados de los maestros Lobachevski y Simonov, y de rendir cuentas de ellos a ustedes... En el transcurso de mis lecciones les he expuesto la mayor parte del primer volumen y una parte sustancial del segundo volumen de la notable obra de Laplace... Aunque Simonov haya hecho excelentes progresos en matemáticas, Lobachevski le sobrepasa, sobre todo en lo que concierne a las matemáticas superiores...*

*...Esta breve comunicación de nuestro eminente matemático, quien con el tiempo se hará de un nombre glorioso,... ”*

*Informe de Bartels al Consejo de Universidad,*

*10 de julio de 1812.*

Bartels, como buen pedagogo, también le sugirió a Lobachevski la lectura de las grandes obras de la época, y una de ellas fue la primera obra del joven Gauss, titulada *Disquisitiones arithmeticae* (1801).

Es de señalar que, en ese periodo, Lobachevski apenas tuvo contacto con las obras de geometría más importantes de la época. No se sabe muy bien cómo llegaron a sus manos los manuales de los ilustres geómetras franceses.

En cuanto a la docencia, le encargaron tutorizar a los nuevos alumnos, labor que consistía en repasar el material ya impartido. Además, era encargado de dar clases en verano a los funcionarios de las distintas administraciones que querían elevar su nivel de conocimientos científicos: sus clases se centraban en la aritmética y la geometría.

En esos años, en palabras de sus compañeros, su labor fue altamente satisfactoria y él estaba muy orgulloso de sus clases.

La Universidad de Kazán, al igual que otras universidades del país, necesitaba mejoras, pero la organización oficial de las universidades rusas debió aplazarse pues Rusia acababa de entrar en guerra contra Napoleón, lo que obligó a la evacuación de buena parte de Moscú. La ciudad de Kazán se convirtió en un centro de acogida de todo tipo de centros e instituciones de Moscú. Fueron años de enorme sacrificio para el pueblo ruso, ya que el imperio napoleónico estaba a sus puertas y era de vital importancia para el país luchar con todos los recursos disponibles contra el invasor.

Es posible que la valía de Lobachevski le salvara de acudir al frente en defensa de su país. Pero justamente en ese año, 1812, murió el protector Rumovski y la Universidad de Kazán tomó otro aire. El nuevo protector, M. A. Saltykov, cesó al rector, se preocupó de organizar los planes de estudios de las facultades, dio más autonomía a la universidad y separó al Consejo de la Universidad del Consejo del Gymnasium.

Con estos cambios la Universidad de Kazán se convertiría, a partir de 1813, en un verdadero centro superior.

Cuando Lobachevski tenía 21 años, en 1814, él y Simonov fueron nombrados profesores adjuntos de física y matemáticas. Ese mismo año, el profesor Bartels fue elegido decano de la facultad.

El nombramiento suponía más responsabilidad y nuevos requerimientos para Lobachevski. Al poco de ser nombrado le correspondió impartir dos cursos, uno sobre matemáticas puras y otro sobre geometría práctica, pero desgraciadamente la salud le jugó una mala pasada y no pudo comenzarlos ya que su médico le obligó a descansar una larga temporada, al término de la cual regresó con fuerzas renovadas.

Además, la nueva categoría profesional le obligaba a dar una serie de cursos y conferencias sobre diversos temas como álgebra, aritmética, trigonometría, geometría, teoría de números y cálculo diferencial e integral. En todos los casos, Lobachevski se preocupó de preparar con suma atención los materiales didácticos para que los alumnos comprendieran lo mejor posible la materia. El método de enseñanza fue, durante muchos años, objeto de sus reflexiones y años después dejaría plasmadas en un artículo sus revolucionarias e innovadoras ideas al respecto.

***Gauss***

*Cari Friedrich Gauss nació en Braunschweig (Alemania) el 30 de abril de 1777. Fue un niño prodigio y aprendió a leer, escribir y calcular a la edad de tres años. A los once años Gauss conoció a Bartels, que por aquel entonces era profesor ayudante en su escuela. Bartels habló de sus habilidades matemáticas al duque de Braunschweig y a los catorce años Gauss fue a la corte del duque para hacer una exhibición de sus dotes como calculista. El duque quedó impresionado y se convirtió en su protector. En 1795 comenzó a estudiar matemáticas en Universidad de Göttingen con una beca del duque.*

*Antes de 1800 Gauss ya había descubierto resultados matemáticos muy notables, entre ellos un método para construir, con regla y compás, el polígono regular de 17 lados. E incluso fue más allá, caracterizando los polígonos regulares construibles con ayuda de regla y compás. También hizo algunos descubrimientos fundamentales, entre los que se incluye el método de los mínimos cuadrados.*

*En 1799 demostró el teorema fundamental del álgebra, que afirma que toda ecuación algebraica tiene una raíz de la forma a + bi donde a y b son números reales, e i es la unidad imaginaria. Por esa época comenzó sus investigaciones sobre una geometría no euclídea, es decir, basada en axiomas distintos a los de Euclides, pero se negó a publicarlas.*

*En 1801 publicó el más famoso de sus libros, Disquisiciones aritméticas, obra responsable del desarrollo del lenguaje y de las notaciones de la rama de la teoría de números conocida como álgebra de congruencias.*

*A partir de 1800, Gauss se dedicó también al estudio de la astronomía. Sus métodos matemáticos para calcular las posiciones de los cuerpos celestes eran casi perfectos, y en 1807 pasó a dirigir el observatorio de Göttingen. Sobre los cuerpos celestes trataría su segunda obra, Theoria motus corporum coelestium (1809).*

*Durante su estancia en el observatorio construyó un heliotropo, con él que se pudo determinar de manera más precisa la forma del planeta. También estudió el magnetismo terrestre, por lo que en la actualidad la unidad de flujo*

*magnético lleva su nombre.*
*A partir del año 1820, en colaboración con el físico Wilhelm Weber, exploró muchas áreas de la física como electricidad, magnetismo, mecánica, acústica u óptica. En 1833 construyó el primer telégrafo.*
*Gauss, que había definido a las matemáticas como la reina de las ciencias y a la aritmética como la reina de las matemáticas, murió en la madrugada del 23 de febrero de 1855 y dejó a la humanidad uno de los mayores legados matemáticos.*

En esa época empleó varios libros de texto como ayuda para realizar sus notas: Teoría de números de Legendre, Disquisiciones aritméticas de Gauss, los libros citados anteriormente de S. F. Lacroix y el famoso libro *Aplicación del análisis a la geometría* del matemático francés G. Monge. Además, escribió dos pequeños manuales titulados *Geometría y Álgebra o cálculo de finitos.*
Llama la atención que no utilizara ninguno de los libros de L. Euler, a pesar de que el ilustre matemático tenía un enorme prestigio en las universidades rusas, no en vano había sido miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo durante dos periodos, con una estancia total de más de treinta años.
En julio de 1816, Lobachevski (que sólo tenía 24 años) fue propuesto como profesor extraordinario a petición de Bartels. Después de algunas dificultades, no del todo aclaradas, se reconoció su valía y se le confirmó en el cargo anteriormente citado.

Vamos a detenernos en las clases de Lobachevski del curso escolar 1816-1817, durante el cual había impartido, entre otros, un curso sobre geometría elemental. Se han conservado los apuntes de este curso del estudiante M. Temnikov, que tienen un interés histórico notable ya que muestran convincentemente que en este curso Lobachevski ya se planteaba el problema de la demostración del quinto postulado sobre las rectas paralelas basándose en los otros cuatro postulados. En cuanto a las ideas, sigue las investigaciones de Legendre, y primero construye una geometría absoluta cuyos teoremas son independientes del quinto postulado; a continuación empieza a demostrar los teoremas que ya se basan en el postulado sobre las paralelas. Por tanto, en esa época sigue en la línea de demostrar el quinto postulado como consecuencia de los otros cuatro; no es casualidad este planteamiento, puesto que era prácticamente *la manera oficial* de abordar la cuestión. Como veremos, este problema se convirtió, a la postre, en la labor principal de toda su vida.

## §. Años difíciles. La influencia del protector Magnitski

Tras la creación de la Santa Alianza, la vida intelectual en el imperio ruso se volvió insoportable. Además, el emperador Alejandro I cayó en un profundo misticismo religioso que afectó a todas las acciones de su mandato. Para imponer una política tan reaccionaria se nombró ministro de educación al príncipe A. N. Golitsyn, que ejecutó al pie de la letra el espíritu que ya flotaba en el ambiente. La reacción contra el pensamiento progresista, instalado en la universidad, tuvo tales proporciones que muchos pensaron que todas las universidades de Rusia serían cerradas excepto la de Moscú.

En 1819, M. L. Magnitski, miembro de la dirección principal de las escuelas de toda Rusia, se dirigió a la Universidad de Kazán con el encargo de inspeccionarla, así como las escuelas adscritas. Durante el escaso mes que duró la inspección se ocupó especialmente de investigar a fondo el ambiente universitario: la vida de los estudiantes, las relaciones entre los profesores, los contenidos impartidos, etc.

A raíz de su inspección redactó un informe donde hacía resaltar de manera muy notable los defectos que había encontrado: desde la malversación de fondos hasta la mediocre calidad de la enseñanza. Magnitski concluía su intervención sugiriendo la clausura de la Universidad de Kazán.

El zar Alejandro I optó, sin embargo, por una medida menos drástica e intentó solucionar la situación de la Universidad de Kazán poniendo en marcha una serie de acciones, entre ellas el nombramiento de un nuevo protector. Curiosamente, el mismo Magnitski fue propuesto como nuevo protector del distrito docente de Kazán.

Su plan de mejora y ordenamiento pivotaba sobre cinco acciones básicas:

1. Organizar la enseñanza del catecismo.
2. Expulsar a varios profesores considerados mediocres.

3. Potenciar los aspectos morales, políticos y económicos, colocando un responsable al frente de dichas secciones.
4. Reformar profundamente el sistema de enseñanza, estableciendo una reglamentación estricta para la mayoría de las materias.
5. Establecer un régimen pseudomilitar dentro del colectivo estudiantil.

Con el nuevo protector todos los profesores se sintieron observados e incluso perseguidos. Pero, ¿qué pensaba Magnitski sobre Lobachevski? La opinión que tenía por aquellos años era la siguiente:

> *"En la facultad de física y matemáticas, merece especial mención la sección de matemáticas por la valía de sus profesores. Puedo decir que es la única facultad bien organizada y con una enseñanza excelente... "*
>
> *"Es opinión generalizada que el profesor Lobachevski tiene excelentes conocimientos".*

El nuevo protector provenía de una familia noble, era una persona muy ambiciosa y además disponía de poderes ilimitados. Magnitski, que había sido educado bajo un régimen militar, no sentía ningún remordimiento por aplicar sus reglas con todo el rigor posible. De hecho, nada más tomar posesión de su cargo expulsó a nueve profesores lo que provocó un pánico generalizado entre el estamento docente. Por si fuera poco, los estudiantes fueron sometidos a un régimen draconiano y difícilmente soportable. Con sus medidas la vida cotidiana en la universidad se resintió considerablemente y muchos profesores extranjeros, especialmente alemanes, optaron por abandonarla. En definitiva, la influencia de Magnitski sobre la universidad fue muy negativa.

El profesor Bartels, viendo el panorama que se cernía sobre la universidad, aceptó, en el año 1820, una oferta para dar clases en la Universidad de Dorpat. Poco a poco, la Facultad Físico-Matemática se fue desmembrando y era urgente reorganizar su enseñanza. Magnitski propuso a Lobachevski que ocupase la cátedra de física y astronomía para cubrir el hueco dejado por el ilustre profesor Litrow, retirado en 1816, y al profesor Nikolski la cátedra de matemáticas.

*Lobachevski*

El impartir nuevas materias supuso para Lobachevski un nuevo desafío que acometió con todas sus energías.

Además, tras la marcha de Bartels, quedó vacante el puesto de decano y se lo ofrecieron a él a pesar de que sólo era profesor extraordinario. De repente se vio convertido en la piedra angular de su facultad.

Su valía fue también reconocida en otros estamentos universitarios, ya que era requerido para la mayoría de los proyectos docentes y administrativos. Algunas de sus tareas fueron las siguientes:

1. Le fue encomendado ordenar la enorme biblioteca central de la universidad, que ya disponía de unas decenas de miles de libros, manuscritos y códices, por cierto, completamente desordenados.
2. Se le nombró miembro del comité de construcción de los edificios universitarios, labor que consistía en poner en marcha las diversas construcciones que se erigieron por esa época en la universidad.
3. Organizó el laboratorio de física y la compra de nuevos materiales para el mismo.
4. Participó en el proyecto de la construcción de un observatorio astronómico que posteriormente él mismo utilizaría.
5. Fue nombrado redactor de una revista surgida en el seno de la universidad y que posteriormente se denominó *Memorias de la Universidad de Kazán.*

6. Formó parte del comité encargado de dirigir y controlar la actividad docente de todos los centros educativos del distrito de Kazán.

***Los decembristas***

*El movimiento denominado* los decembristas *(llamado así porque comenzó el 14 de diciembre de 1825) fue dirigido contra el régimen, y su programa iba, en lo social, hasta la abolición de la servidumbre y, en lo político, hasta la instauración de una república o régimen constitucional.*

*Perseguían los siguientes objetivos:*

1. *Proclamación de las libertades democráticas.*
2. *Supresión de la servidumbre.*
3. *Convocatoria de una asamblea constituyente.*

*Tuvo lugar cuando el emperador Alejandro I murió sin dejar un heredero directo. La corona, rechazada por su hermano Constantino, pasó al otro hermano, Nicolás. Curiosamente, el movimiento no surgió de las clases oprimidas, sino de los ambientes privilegiados. Los conspiradores, aprovechando los titubeos de la dinastía, ejecutaron sus proyectos, preparados desde hacía tiempo, y arrastraron a la rebelión, que estalló en San Petersburgo, a algunos regimientos de la capital y a oficiales del ejército imperial.*

*La rebelión fue sofocada tras un breve combate en la plaza del Senado entre los insurrectos y las tropas fieles al gobierno. El nuevo zar, Nicolás I, muy impresionado por los*

*acontecimientos, dirigió en persona la investigación y su represión fue cruel, los cinco principales cabecillas fueron ejecutados y varios centenares fueron deportados o encarcelados.*
*Una vez vencida la rebelión, Nicolás I, amedrentado, extremó el régimen despótico, burocrático y policial del imperio ruso, lo que influyó muy negativamente en la vida universitaria.*

Cualquiera de esas labores eran de por sí suficientes para una persona normal; sin embargo, Lobachevski parece que se multiplicaba. Sin duda, se convirtió en el personaje central de la universidad, todo el mundo le estimaba y reconocía su valía; el propio Magnitski, en esos primeros años, sentía un gran respeto por su persona. Pero lo más notable es que fuera capaz de no olvidar las matemáticas, de seguir estudiando, investigando, escribiendo e impartiendo clases. En esos años de enorme trabajo administrativo, Lobachevski fue capaz de crear los fundamentos de su notable teoría geométrica.
Magnitski estuvo siete años al frente del protectorado y su mandato coincidió con la muerte del zar Alejandro I y con la llamada rebelión de los decembristas lo que supuso un control aún más férreo sobre la vida universitaria. La mayoría de los historiadores coinciden en admitir que la influencia de Magnitski respecto a la vida universitaria fue muy negativa, incluso llegan a decir que su mandato dejó una huella dolorosa en todos los estamentos universitarios.

# Capítulo 4
## Los Elementos de Euclides

*"La belleza es, por tanto, una belleza geométrica, de esa clase que tanto hubiera apreciado Platón".*
*John Desmond Bernal (1901-1971)*

Euclides ha sido uno de los mayores creadores de toda la historia, la atracción y seducción de su modelo reside en que a partir de nociones elementales como punto, recta y círculo, y sólo cinco postulados que vinculan de manera casi obvia estas nociones, puede construirse teorema a teorema toda la geometría clásica, es decir, la totalidad de la geometría que conocía la humanidad hasta no hace mucho tiempo, y que Kant creyó la única posible: la que se corresponde con la forma en que vemos al mundo y sirve a los carpinteros, cartógrafos, arquitectos, agrimensores y para todos los usos diarios.

### §. Los *Elementos*

Los *Elementos* es un tratado matemático que se compone de 13 libros.

- Los 6 primeros versan sobre geometría plana.
- Los libros 7, 8 y 9 tratan sobre la teoría elemental de números.
- El libro 10 trata de la teoría de Eudoxo de los números irracionales. El matemático flamenco S. Stevin bautizó a este

libro como *"la cruz de los matemáticos"* por la dificultad que entraña su lectura.

- Los libros 11,12 y 13 están dedicados al estudio de la geometría del espacio

LOS SEIS LIBROS PRIMEROS DELA GEOMETRIA DE EVCLIDES.

Traduzidos en lẽgua Española por Rodrigo çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedratico de Cosmographia por su Magestad en la casa de la Contratació de Sevilla Dirigidos al illustre señor Luciano de Negrõ, Canonigo dela sancta yglesia de Sevilla.

Con licencia del Consejo Real, En Sevilla en casa de Alonso de la Barrera. 1576.

Esta tassado en ocho pesetas

Villaseñor

*La primera versión de Los 6 primeros libros de los Elementos en castellano se realizó en Sevilla en 1576.*

En un primer acercamiento se puede decir que los *Elementos* de Euclides son notables por la claridad con que las proposiciones son demostradas y presentadas. A este respecto escribió Proclo:

> *"Son singularmente admirables sus Elementos de geometría (de Euclides) por el orden que reina en ellos, la selección de los teoremas y problemas tomados como elementos y también la*

*variedad de los razonamientos desarrollados de todas las maneras y que conducen a la convicción"*

***Euclides***

*Se sabe poco de la vida de este genial matemático griego (fl. 300 a.C.).*

*Probablemente estudió en Atenas con discípulos de Platón y posteriormente enseñó geometría en Alejandría. Esta ciudad fue punto de encuentro de griegos, judíos y árabes, allí se conservó lo mejor del pensamiento heleno y a su universidad y biblioteca, se dice que con más de 700.000 documentos, fue llamado Euclides por Ptolomeo I Sóter (el grande), sucesor de Alejandro. Durante más de 20 años ejerció allí su labor docente y científica.*


*Euclides fue un prolífico escritor, a él se le atribuyen una serie de libros como los Cálculos (una colección de teoremas geométricos), los Fenómenos (una descripción del firmamento), la Óptica, la División del canon (un estudio matemático de la música), Porismas, La sección cónica, el Libro de falacias y, el más importante, los Elementos, que es un extenso tratado de matemáticas en 13 volúmenes sobre materias tales como* *geometría plana y del espacio, proporciones en general, propiedades de los números y magnitudes inconmensurables. Sin embargo, en la actualidad, la mayoría de los historiadores cree que alguna de estas obras, excepto los Elementos, le han sido atribuidas a Euclides erróneamente. Los historiadores también cuestionan la originalidad de algunas de sus aportaciones, en particular las secciones geométricas de los Elementos ya fueron planteadas por matemáticos anteriores, como Eudoxo. Sin embargo, se considera que Euclides hizo diversos descubrimientos en teoría de números.*

## §. Los libros de los Elementos

*"Es maravilloso que un hombre sea capaz de alcanzar tal grado de certeza y pureza haciendo uso exclusivo de su pensamiento".*
*Albert Einstein*

*"La lectura de Euclides a los 11 años fue uno de los grandes acontecimientos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor".*
*Bertrand Russell*

*Edición princeps de los Elementos de Euclides (1533).*

Los *Elementos* de Euclides han sido utilizados como libro de texto durante 2.000 años. La primera edición impresa de las obras de Euclides apareció en Venecia en 1482, fue una traducción del árabe al latín.

- *Libro I: Teoremas relativos a triángulos, rectas paralelas y perpendiculares, congruencias, etc. Tiene 23 definiciones, 5 postulados, 9 nociones comunes y 48 proposiciones (las páginas 47 y 48 son el teorema de Pitágoras).*
- *Libro II: Aritmética de la escuela pitagórica. Consta de 2 definiciones y 14 proposiciones.*
- *Libro III: Círculos, cuerdas, tangencias,... Consta de 11 definiciones* y *37 proposiciones.*

- *Libro IV: Construcciones con regla* y *compás de polígonos regulares. Consta de 7 definiciones y 16 proposiciones.*
- *Libro V: Teoría de la proporción según Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.). Consta de 18 definiciones y 25 proposiciones.*
- *Libro VI: Estudio de figuras semejantes, además contiene una generalización del teorema de Pitágoras. Consta de 4 definiciones y 33 proposiciones.*
- *Libro VII: Teoría de números. Consta de 22 definiciones y 39 proposiciones (la proposición I es el algoritmo de Euclides).*
- *Libro VIII: Teoría de números. Consta de 27 proposiciones.*
- *Libro IX: Teoría de números. Consta de 36 proposiciones.*
- *Libro X: Es un análisis detallado de varias longitudes irracionales. Consta de 36 proposiciones.*
- *Libro XI: Geometría de sólidos y esfera. Consta de 39 proposiciones (se utiliza el método de* exhaución de Eudoxo).
- *Libro XII: Geometría de sólidos y esfera. Consta de 18 proposiciones.*
- *Libro XIII: Geometría de sólidos, sólidos platónicos... Consta de 18 proposiciones.*

*“Los Elementos son una guía segura y completa para la consideración científica de los objetos geométricos*

## §. Estructura de los *Elementos*

Euclides asume una serie de propiedades que han de admitirse sin demostración, para ir deduciendo de ellas, sin otro recurso que la lógica, todo el conjunto de proposiciones. Estas propiedades o proposiciones básicas son las que él llamará axiomas, nociones comunes y postulados.

*Los Elementos. Manuscrito griego de Los siglos XI-XII (al final del texto se puede observar el famoso símbolo pitagórico del polígono estrellado de cinco puntas).*

Así, al comienzo de la mayoría de los libros que componen los *Elementos,* presenta una definiciones y unas nociones comunes (o axiomas) relativas a los temas desarrollados. Además, en el Libro I expone sus famosos cinco postulados en los que basa su construcción axiomática. Con estos elementos básicos y la argamasa de la lógica va construyendo, una tras otra, las proposiciones.

Las *definiciones* básicas que se proponen en el primero de los libros son 23, redactadas de la manera siguiente:

*1. Un punto es aquello que no tiene partes*

*2. Una línea es la longitud sin anchura.*

*3. Las fronteras (los extremos) de una línea son puntos.*

*4. La recta es aquella línea que se halla igualmente dispuesta con respecto a todos sus puntos.*

*5. La superficie es lo que posee únicamente longitud y anchura.*

*6. Las fronteras de una superficie son líneas.*

...

*10. Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.*

...

*15. Círculo es una figura plana limitada por una sola línea que se llama periferia, respecto a la cual son iguales las rectas que inciden sobre ella trazadas desde uno de los puntos situados en el interior de la figura.*

16. *Ese punto interior se llama centro del círculo.*

...

23. *Rectas paralelas son las que, estando en un mismo plano y prolongadas al infinito, no se encuentran.*

Las *verdades* o nociones comunes consideradas como universales y tautologías por sí mismas, son:

**1. Dos cosas iguales separadamente a una tercera son iguales entre sí.**

**2. Si a cosas iguales les agregamos iguales, obtenemos iguales.**

**3. Si de iguales quitamos iguales, obtenemos iguales.**

4. Si a desiguales agregamos iguales, obtenemos desiguales.

5. Si duplicamos iguales obtenemos iguales.

6. Las mitades de iguales son iguales entre sí.

**7. Las cosas que se pueden superponer son iguales.**

**8. El todo es mayor que una parte.**

9. Dos rectas no encierran espacio.

La edición crítica de Heiberg, recoge únicamente cinco nociones comunes (en negrita en la lista anterior).

Las nociones comunes, aquí expuestas, nos hablan de la igualdad, desigualdad, suma, resta, duplicación, y de la división en dos partes iguales de magnitudes. Conviene señalar que la séptima noción común hace referencia al movimiento.

Las afirmaciones o *postulados* relativos a los objetos básicos son las *verdades iniciales* del sistema. Los postulados permiten efectuar ciertas construcciones geométricas como unir puntos mediante líneas rectas y trazar círculos.

Los postulados se presentan de la manera siguiente:

1. Postúlese el trazar una recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
3. Y el describir cualquier círculo con cualquier centro y distancia.
4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
5. Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

Los tres primeros postulados hacen referencia a construcciones, el cuarto es en realidad una propiedad intrínseca de los ángulos rectos y el quinto tiene la apariencia de una proposición que habría que demostrar. También constatan la existencia de puntos, rectas y circunferencias con las que Euclides quiere construir toda su geometría.

El majestuoso edificio se completa con las *proposiciones,* que se deducen a partir de los postulados iniciales, del razonamiento lógico y de otras verdades o proposiciones anteriores. Estas proposiciones constituyen los *teoremas del sistema axiomático.*

Veamos una de las proposiciones y su correspondiente demostración.

En el Libro I, la primera proposición dice lo siguiente: *Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.*

Sea AB la recta finita dada.

Así pues, hay que construir sobre la recta dada un triángulo equilátero. Descríbase con el centro A y la distancia AB el círculo BCD [Post. 3], y con el centro B y la distancia BA descríbase a su vez el círculo ACE [Post. 3], y a partir del punto C donde los círculos se cortan entre sí, trácense las rectas CA, CB hasta los puntos A, B [Post. 1].

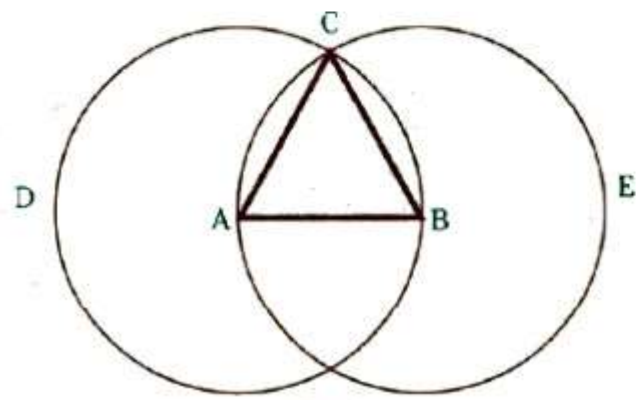


Fig. 1

Y puesto que el punto A es el centro del círculo CB, AC es igual a AB [Def. 15]; puesto que B es a su vez el centro del círculo CAE, BC es igual a BA [Def. 15]; pero se ha demostrado que CA es igual a AB; por tanto, cada uno de los segmentos CA, CB es igual a AB. Ahora las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí [N.C. 1]; por tanto, CA, AB, BC son iguales entre sí.

Por consiguiente, el triángulo ABC es equilátero y ha sido construido sobre una recta finita dada AB. Que es lo que había que hacer.

Si analizamos con detalle esta demostración podemos decir que:

1. Es muy elegante, se la suele presentar como el paradigma de la demostración euclídea.
2. Es de una claridad meridiana, y discurre por los pasos canónicos que Proclo enumera como: proposición, exposición, especificación, preparación y demostración.
3. Sin embargo, Euclides comete un grave error cuando da por supuesto que dos círculos se cortan en un punto (…y *a partir del punto* C *donde los círculos se cortan entre sí).* Es claramente verdad (desde un punto de vista intuitivo) pero en el tratado no aparece este asunto y por tanto habría que incluirlo.

## §. Fallos en los *Elementos*

En honor a la verdad se puede decir que el tratado escrito por Euclides es casi perfecto pero, mirado con la lupa del rigor, se pueden encontrar varios fallos que hacen tambalear ese majestuoso tratado, así:

A. Muchos de los términos que figuran en las definiciones no están a su vez definidos, tal es el caso de *frontera, ancho, longitud o inclinación.*
B. Varias de las 23 definiciones que aparecen en el primer libro (pasa lo mismo en los otros 12 libros) no son utilizadas en las demostraciones. Por tanto, se podría reducir el número de definiciones sin que afectara al planteamiento general de la obra.

C. En la mayoría de las demostraciones se utiliza la intuición geométrica reforzada con la figura consiguiente. Por ejemplo, se supone que dos circunferencias (secantes y no tangentes) se cortan en dos puntos y que una recta que pasa por un punto interior al círculo y otro exterior al mismo corta a la circunferencia en un punto que está entre los puntos anteriores

D. En la demostración de algunas proposiciones se utilizan implícitamente postulados y axiomas que previamente no han sido definidos. Se puede decir a éste respecto que la lista de los axiomas y postulados es demasiado pobre.

E. Uno de los fallos más sustanciales, ya que aparece en varias demostraciones, es el concepto de *movimiento.* No está definido explícitamente y sin embargo es constantemente utilizado. De hecho en la primera proposición o teorema del primer libro, el concepto de movimiento ya es empleado. Cabe observar que, según el significado del axioma VII, la igualdad de magnitudes y figuras geométricas también se define mediante movimientos.

F. Se echan de menos unas reglas de inferencia lógica. Hay que tener presente que el empleo de la lógica con sus reglas se consideraba, en tiempos de Euclides, más bien como un producto espontáneo de la matemática y no como un requisito para ella.

G. Conviene notar que la distinción, que hace Euclides, entre nociones comunes y postulados no es clara. Por ejemplo,

H. la cuarta definición del Libro V es equivalente al llamado *postulado de Arquímedes.*

I. Aún siendo admirable el tipo de razonamiento empleado por Euclides, se pueden encontrar algunos errores en ciertas demostraciones

J. Algunas definiciones no son precisas. Así, por ejemplo la definición dada para una recta *(la recta es aquella línea que se halla igualmente dispuesta con respecto a todos sus puntos)* puede servir también para definir a otras muchas figuras: una espiral, una circunferencia, una hélice, etc.

Es cierto que en esa época no preocupaba excesivamente el rigor en las definiciones, el mismo Aristóteles decía al respecto:

> *"Los verdaderos objetos matemáticos son solamente sugeridos o iluminados mediante las figuras que se hacen".*

En resumen, podemos decir que el rigor de la lógica de Euclides se basa, en muchos casos, en intuiciones adquiridas por el hábito de nuestras representaciones espaciales y que los *Elementos* no resuelven satisfactoriamente el problema de fundamentar la geometría (enumeración de un número suficiente de definiciones, axiomas y postulados que sirvan de base para una demostración rigurosa de todos y cada uno de los teoremas que aparecen).

***Arquímedes***

*"Había más imaginación en la*

*cabeza de Arquímedes que en la de Homero"*
*Voltaire*

*Arquímedes (287-212 a.C.) nació en Siracusa, en la isla de Sicilia, que por aquel tiempo una era colonia griega, y fue amigo del rey Herón II de Siracusa que ejerció como su protector. En su juventud viajó por Egipto y fue por esa época cuando inventó el tornillo sin fin, ingenio que permitía sacar agua de los pozos y que todavía es utilizado hoy en día.*

*Parece que estudio en Alejandría con algunos de los discípulos de Euclides y fue en esta etapa de su vida cuando profundizó en los trabajos de sus ilustres predecesores (Eudoxo entre ellos) en geometría.*

*Arquímedes escribió muchos pequeños tratados, de los que bastantes de ellos han llegado hasta nosotros fundamentalmente gracias a traducciones latinas del siglo XIII en adelante. Sus obras más representativas son Sobre la cuadratura de la parábola, El método, Sobre la esfera y el cilindro (dos libros), Sobre espirales, Sobre la medida del*

*círculo, El arenario y Sobre los conoides y esferoides.*
*En Arquímedes hay que destacar su claridad expositiva y la perfección y el ingenio de sus demostraciones, así como el uso que hizo del método de exhaución (predecesor de nuestros actuales métodos de integración) para encontrar las áreas y los volúmenes de muchas superficies y cuerpos y para aproximar el número π.*
*Actualmente es considerado como el mayor genio de la matemática greco-alejandrina y uno de uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos.*[1]

## §. Intentos de mejora por parte de Arquímedes

Algunas de las deficiencias antes mencionadas ya fueron observadas por científicos de la antigüedad. Arquímedes amplió la lista de los postulados geométricos, tratando de dar más consistencia al edificio geométrico construido por Euclides, y en particular completó los aspectos relacionados con la medición de longitudes, áreas y volúmenes.

Con el objetivo de fundamentar mejor la geometría métrica, Arquímedes, introdujo cinco postulados más, el primero de los cuales dice lo siguiente:

> *"Entre todas las líneas con extremos comunes la recta es la más corta".*

[1] Más información en el libro Arquímedes. Alrededor del círculo de R. Torija Herrera, en esta misma colección de NIVOLA.

Pero el verdaderamente importante es el quinto de sus postulados, que dice:

> *“De dos líneas desiguales, dos superficies desiguales o dos cuerpos desiguales, la mayor resultará ser menor que la magnitud que se obtiene si se repite la menor un número adecuado de veces*

Esta afirmación es conocida como *postulado de Arquímedes* y ha resultado ser de una gran importancia. En términos más modernos se la puede expresar así:

> *“Para cualesquiera* $x$ *y* $x'$ *números reales, tal que* $x < x'$ *existe un número natural* $N$ *tal que* $Nx > x'$*’*

Después de Arquímedes también continuaron los intentos por precisar los postulados de la geometría de Euclides. Sin embargo, nadie agregó nada sustancial. El rigor de sus demostraciones se consideraba en general suficiente.

El tratado de Euclides, a pesar de los inconvenientes que hemos planteado, se convirtió en el libro a imitar, en el paradigma a seguir. La belleza de sus demostraciones, la claridad de sus planteamientos y el empleo de su lógica le convirtieron en el libro de matemáticas por excelencia.

# Capítulo 5
## El problema de las paralelas

> *"El ser humano es esencialmente contradictorio, y hasta el propio Descartes, piedra angular del racionalismo, creó los principios de su teoría a partir de tres sueños que tuvo.*
> *¡Lindo comienzo para un defensor de la razón!"*
> *E. Sábato*

El quinto postulado es la piedra angular sobre la que descansa la grandeza de Euclides. Dice Heath al respecto:

> *"Cuando se consideran los innumerables intentos realizados a través de veinte siglos para demostrar ese quinto postulado, muchos de ellos realizados por ilustres geómetras, no se puede por menos que admirar el genio del hombre que llegó a la conclusión de que tal hipótesis, necesaria para la validez de todo el sistema, es realmente indemostrable*

Sin embargo, esa piedra angular ha sido la causa de los más duros ataques a su sistema geométrico. Los cuatro postulados que lo preceden son enunciados sencillos y cortos. El quinto postulado es más enrevesado, su lectura nos da idea de una proposición más que de un postulado. Es posible que el mismo Euclides tuviera, inicialmente, esa misma idea. De hecho, la ordenación de sus proposiciones, así como la demostración que hace del recíproco del quinto postulado nos hace pensar en esta posibilidad.

Las situaciones derivadas al tratar de demostrar el quinto postulado, a partir de los otros cuatro, dieron lugar a un gran *enredo intelectual* que se conoce como el *problema de las paralelas.*

Todos los fracasos por demostrar el quinto postulado fueron agrandando más y más la figura de Euclides, pero también nos condujeron a la invención de nuevas geometrías.

La historia del problema de las paralelas es larga y en algunas ocasiones complicada; únicamente se exponen aquellos momentos que nos harán entender mejor el problema.

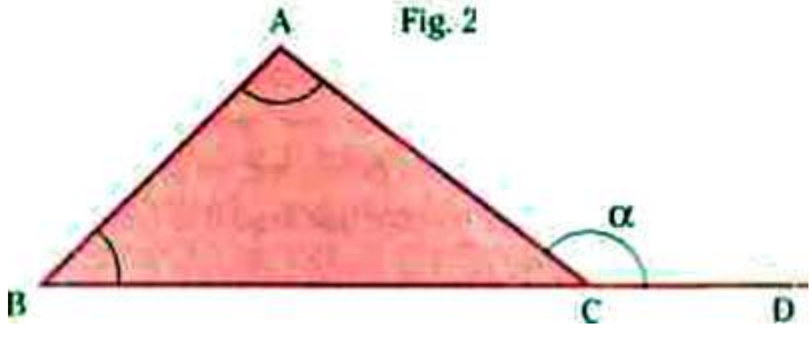
## §. Una proposición clave

El primer libro de los *Elementos* va demostrando una tras otra diversas proposiciones. En particular la proposición 16 dice lo siguiente:

> *"En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos"*

La Figura 2 es suficientemente explicativa:

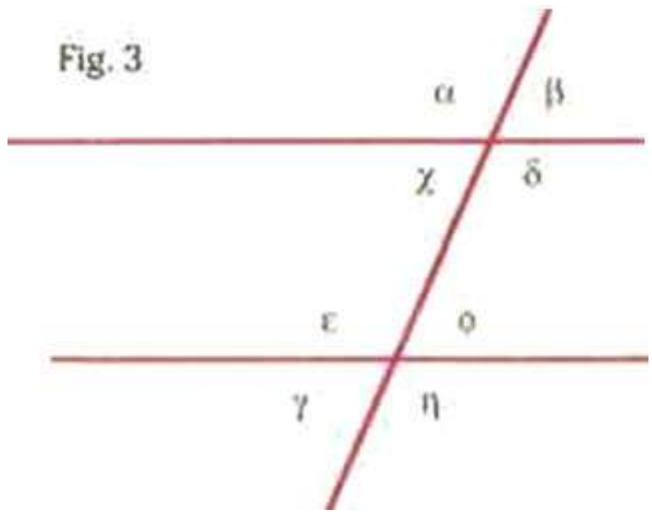
Fig. 2



En el triángulo ABC, el ángulo exterior DCA es mayor que los ángulos internos y opuestos B y A.

Basándose en ésta proposición, Euclides asienta su teoría de las paralelas, para ello realiza los siguientes razonamientos:

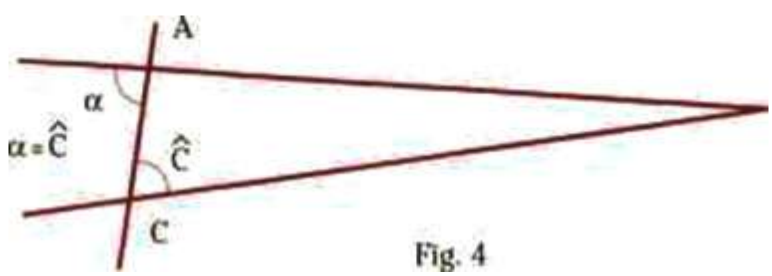
Dadas dos rectas en un mismo plano, si las cortamos por una tercera obtenemos ocho ángulos:




En los ángulos creados puede suceder, tomados dos a dos, que:

**1.** Los ángulos alternos-internos son iguales, es decir χ = φ ó δ = ε.

En ese caso las rectas son paralelas, pues si se cortasen se formaría un triángulo, ABC (Fig. 4) en el que uno de los ángulos exteriores sería igual a uno de los interiores no adyacente, lo que contradice la proposición 16 (Libro I)



De la misma manera se podría razonar (Figura 3), basándose en las igualdades

**2.** $\beta = \gamma$ ó $\alpha = \eta$

**3.** $\beta = \phi$ ó $\alpha = \varepsilon$ (ángulos correspondientes iguales)

**4.** $\varepsilon + \chi = 2$ rectos (la suma de los ángulos conjugados internos es igual a 2 rectos) o $\delta + \phi = 2$ rectos, ... para demostrar que las rectas son paralelas.

### §. La redacción del quinto postulado

Recogiendo todos los resultados podemos concluir que:

> *Si dos rectas en un mismo plano son cortadas por una tercera formando ángulos Iguales, entonces estas dos rectas son paralelas.*

Euclides no enuncia directamente este resultado sino que lo divide en dos proposiciones, las proposiciones 27 y 28 del primer libro.

> *Proposición 27:*
> *Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí.*

> *Proposición 28:*
> *Si una recta al incidir sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al interno y al opuesto del mismo lado, o los dos internos del mismo lado iguales a dos rectos, las rectas serán paralelas entre sí.*

Inmediatamente se nos plantea la cuestión de si será cierta la proposición inversa. ¿Será verdad que para que dos rectas sean paralelas ha de verificarse una de las igualdades respecto a los ángulos que Euclides menciona en las proposiciones 27 ó 28?

Es evidente que Euclides intentó demostrar este resultado, pues la ordenación del material nos da testimonio inequívoco de este asunto. Sin embargo, no logró demostrarlo, por lo que resolvió el problema de una manera muy original tomando simplemente la proporción inversa como postulado y añadiéndole los cuatro postulados que ya tenía y con los cuales ya estaba trabajando.

Para entender, por tanto, la redacción del quinto postulado en su totalidad hay que seguir los siguientes pensamientos:

**1.** Si la suma de los ángulos conjugados es igual a dos rectos entonces las rectas (de la Figura 2) son paralelas; cuando no ocurre esto, esto es cuando la suma de dichos ángulos conjugados internos no equivale a dos rectos, las rectas no son paralelas e inevitablemente habrán de encontrarse en un punto.

**2.** De la Proposición 16 (referente al ángulo exterior) también se puede deducir que la suma de dos de los ángulos de un triángulo jamás puede exceder de dos rectos (que es precisamente la Proposición 17 del Libro I). Como se puede ver en el siguiente razonamiento (Figura 5).

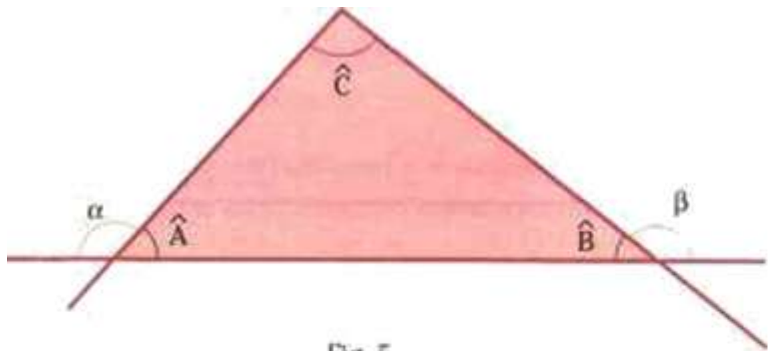


Fig. 5

La suma de los ángulos internos (Â y B̂) y sus adyacentes correspondientes (α y β) ha de ser igual a cuatro rectos, por tanto:

$$\hat{A} + \alpha + \hat{B} + \beta = 4 \text{ rectos}$$

De la Proposición 16 se deduce que;

$$\hat{A} < \beta \text{ y } \hat{B} < \alpha$$

Por tanto haciendo unas simples cuentas Â + B̂ < 2 rectos

Hemos hecho el razonamiento con los ángulos internos Â y B̂, pero con cualquier otra pareja de ángulos el procedimiento sería el mismo.

Aunando estos dos pensamientos, Euclides enunció, como ya sabemos, su famoso quinto postulado de la siguiente manera:

> *"Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los [ángulos] menores que dos rectos" (Postulado 5).*

Basándose en este postulado y en las proposiciones anteriormente demostradas, Euclides va construyendo todo un *corpus* sobre las paralelas, el punto culminante se encuentra en la Proposición 31 del Libro I, que hace referencia a la construcción de una recta paralela a otra recta dada y que pase por un punto exterior a ésta. Dice lo siguiente:

> *"Por un punto dado se puede trazar una recta paralela a una recta dada".*

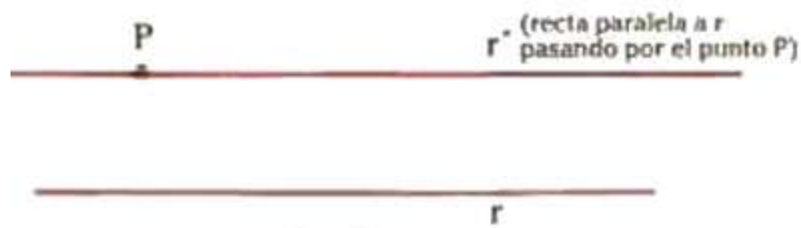



Fig. 6

La manera de razonar y el procedimiento seguido en esta proposición nos llevan a concluir no sólo que existe esa paralela sino que además es única.

Cuando Proclo hace referencia a dicha proposición hace notar la existencia y la unicidad de la paralela. Desde el punto de vista histórico éste aspecto ha sido muy importante, ya que el negar bien la existencia o bien la unicidad de las paralelas nos abre las puertas a un mundo fascinante: la geometría no euclidiana.

## §. Intentos de demostración del quinto postulado

Es evidente que el quinto postulado representaba una dificultad y no resulta extraño pensar que ya los contemporáneos de Euclides hicieran intentos serios y profundos por intentar demostrar dicho postulado utilizando exclusivamente los cuatro anteriores. De hecho, algún que otro matemático de la Antigüedad murió convencido que había resuelto la situación, sin embargo usaron proposiciones más o menos encubiertas y además equivalentes al quinto postulado, con lo cual incurrían en una *petición de principio.* Naturalmente la intuición les jugaba una mala pasada.

### Intento de Proclo

Veamos con un ejemplo una situación muy habitual en este tipo de demostraciones. Proclo (411-485) se dio cuenta que el quinto postulado quedaría demostrado si previamente demostraba la siguiente proposición:

> *"Dadas dos rectas paralelas l y m cualesquiera y r otra recta distinta a (y que la corta, entonces r también corta a m"*

Si Proclo conseguía demostrar tal aseveración utilizando únicamente los cuatro primeros postulados de Euclides, quedaría demostrado el quinto postulado.

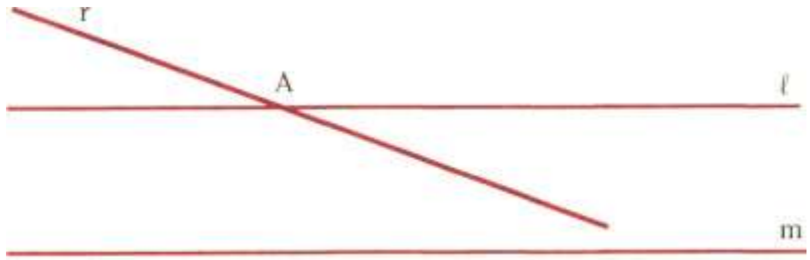



Fig. 7

De manera muy resumida, sin entrar en detalles, el razonamiento de Proclo es el siguiente:

Si f y r se cortan en A (según la hipótesis de Proclo), al prolongar dichas rectas *indefinidamente* pueden llegar a tener entre sí una *distancia mayor que cualquier magnitud,* de manera que será mayor que *el intervalo* entre las dos paralelas. Por tanto si las rectas f y r están entre sí a una distancia mayor que la *distancia* entre las rectas paralelas, ha de suceder necesariamente que la recta r corte a la recta m.

Esta demostración es muy visual, y no cabe duda que puede resultar hasta convincente, sin embargo si la analizamos con detalle podemos encontrar un conjunto de aspectos oscuros:

a. Habla de una distancia entre rectas paralelas.
b. Comenta que la distancia entre dos rectas no paralelas, al prolongarse indefinidamente, es una distancia mayor que cualquier magnitud.

Sin embargo, estas dos aseveraciones propuestas por Proclo no son tratadas de manera explícita en los cuatro primeros postulados de Euclides y, en consecuencia, debería demostrarlas.

Proclo atribuye la afirmación (b) a Aristóteles, mientras que la afirmación de que existen pares de rectas tales que la distancia mínima de los puntos de una de ellas a la otra es constante es equivalente al quinto postulado de Euclides (aspecto que Proclo desconocía).

En definitiva, Proclo ha incurrido en argumentaciones falaces ya que ha empleado para demostrar el quinto postulado un resultado que es equivalente al que se quería demostrar.

## Otros intentos

Siguiendo razonamientos más o menos ocurrentes, fueron muchos los que intentaron eliminar el quinto postulado de la lista de axiomas y demostrarlo a partir de los demás. Entre ellos están:

Mat. Árabes
- Tabit ibn Qurra (836-901)
- Omar Jayyam (1045-1130)
- Nasir al Din al Tusi (1201-1274)

Mat. Occidentales
- John Wallis (1616-1703)
- Giordano Vitali (1633-1711)
- Gerolamo Saccheri (1667-1733)
- Johann Lambert (1728-1777)
- John Playfair (1748-1819)
- Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

En muchos casos la demostración que se proponía estaba basada en alguna propiedad que se consideraba evidente pero que en realidad era equivalente al quinto postulado. Algunos de los enunciados que se han dado equivalentes al quinto postulado, son éstos:

| *Autor* | *Postulado* |
|---|---|
| Legendre | Existe un triángulo en el cual la suma de sus tres ángulos vale dos rectos. |
| Legendre | Una recta perpendicular a un lado de un ángulo agudo también corta al otro lado. |
| Gauss | Existen triángulos de área arbitrariamente grande. |
| Bolyai | Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia. |
| Wallis | Existen triángulos semejantes (pero no iguales), es decir triángulos cuyos ángulos son iguales pero de lados desiguales). |
| Proclo | Dos rectas paralelas entre sí están a distancia finita (acotada). |

Pero sin duda el más famoso de todos es

> *"Por un punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella" (postulado de Playfair, 1795).*

En los intentos de demostración del quinto postulado también se siguió un camino que consistía en establecer una propiedad equivalente al quinto postulado y tratar de demostrar dicha propiedad partiendo únicamente de los cuatro primeros postulados.

El matemático francés Legendre intentó durante muchos años demostrar el quinto postulado, incluso llegó a publicar sus *demostraciones,* aunque ninguna de ellas resultó correcta. Sin embargo, tienen mucho interés sus aportaciones ya que a partir de ellas quedó clara la relación existente entre el postulado y la proposición relacionada con la suma de los ángulos internos de un triángulo.

***Playfair***

*John Playfair (1748-1819) nació en Benvie, Escocia. Era el hijo mayor del reverendo James Playfair. Su padre lo educó hasta los 14 años y posteriormente lo envió a la Universidad de St. Andrews donde se graduó. Su progreso en las ciencias matemáticas fue muy rápido y en 1785 fue nombrado profesor asociado de matemáticas en la Universidad de Edimburgo. Estandarizó la notación de los* *puntos y lados de las figuras en los primeros seis libros de su edición de los Elementos.*

Con el objetivo de obtener una demostración, Legendre considera tres hipótesis excluyentes:

1. La suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos
2. La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos
3. La suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos

La primera de ellas es rápidamente descartada mediante razonamientos lógicos. Sus esfuerzos se centraron en descartar la tercera de las hipótesis, con lo cual quedaría como única posible la segunda alternativa. Sin embargo, al efectuar la reducción de la tercera hipótesis, Legendre, utilizó, sin darse cuenta, una proposición equivalente al quinto postulado.

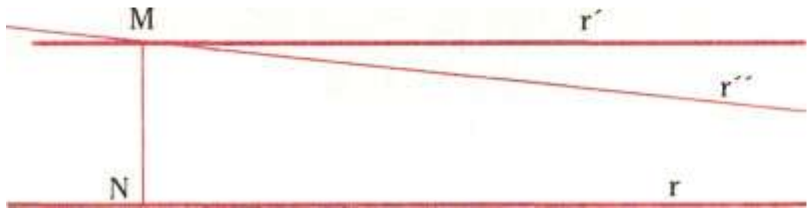
***El postulado de Playfair***

*“Por un punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella”*

*Veamos que este postulado es equivalente al quinto postulado.*

*Sin usar el quinto postulado podemos probar que existe una recta r’ paralela a r y que pasa por M: trazamos la perpendicular MN a r que pasa por M, y, después, la perpendicular r' por M a MN. Las rectas r y r’ son paralelas,* *porque, si se cortaran en P, el triángulo MNP tendría dos ángulos con suma igual a dos rectos.*

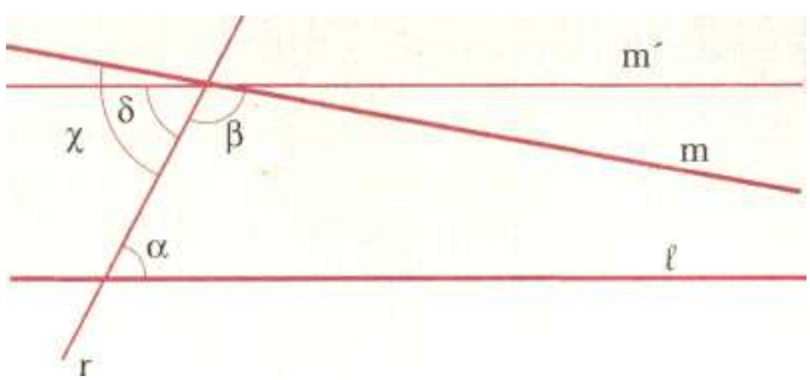
*Demostramos ahora, usando el quinto postulado, que la paralela es única.*




*Si existiese otra recta r" paralela a r y pasando por M ¿qué pasaría? Al no ser iguales las rectas r' y r", la segunda de las rectas (r") ha de formar un ángulo agudo con el segmento MN, por tanto, y de acuerdo con el quinto postulado, r y r" se cortarán en un punto, por lo que no pueden ser paralelas, lo que nos indica que la suposición de que hay más de una paralela no es posible.*

*Para concluir la equivalencia con el quinto postulado nos queda por demostrar que si se cumple el postulado de Playfair entonces se ha de verificar el quinto postulado*

*Supongamos que las rectas l y m al ser intersecadas por otra recta r forman, a un mismo lado, ángulos internos cuya suma es menor de 180°.*



*Por tanto* $\alpha + \beta < 180°$, *ahora tracemos una recta m' tal que los ángulos* $\delta$ y $\alpha$ *sean iguales, entonces las rectas l* y *m' son paralelas.*

*Por la unicidad de la paralela, ha de suceder que la recta l no puede ser paralela a la recta m, por tanto estas dos rectas se han de cortar, sólo queda por demostrar que se cortan en la prolongación de los ángulos menores de 180°.*

*Como* $\chi + \beta = 180°$, *y* $\alpha + \beta < 180°$, *deducimos que* $\chi > \alpha$, y *para que se cumpla la Proposición 16 (Libro I) el punto de corte ha de estar en la parte que nos interesa.*

Todos estos intentos por demostrar el quinto postulado motivaron el descubrimiento de unas nuevas geometrías, las llamadas *geometrías no euclidianas.* El mérito de haber llegado hasta el final lo comparten Jamos Bolyai (1802-1860), Carl F. Gauss (1777-1855) y Nikolai I. Lobachevski (1793-1856). Pero antes, otros matemáticos tuvieron el honor de llegar a las puertas del *Olimpo geométrico,* son los precursores de la geometría no euclidiana.

# Capítulo 6
## Los precursores de la geometría no euclidiana

*"Donde todos piensan igual, ninguno piensa mucho".*
*Walter Lippman (1889-1974)*

El quinto postulado de Euclides era considerado, en alguna medida, demasiado complicado y es posible que al propio Euclides no le satisficiera su propia versión. Ya en los tiempos del sabio griego, los pensadores y geómetras se esforzaron en resolver el problema planteado. Con el paso de los años se hicieron dos tipos de intentos, el primero consistió en sustituir el quinto postulado por otro enunciado más evidente, el segundo tipo de esfuerzos consistió en tratar de deducirlo de los otros cuatro postulados y de los teoremas o proposiciones que se iban construyendo.

Como ya hemos visto, la primera de las opciones ha dado lugar a postulados sustitutivos como el enunciado por Playfair.

Es de señalar que el postulado de Playfair y el del mismo Euclides son más fáciles de utilizar que otros postulados sustitutivos que no involucran directamente al *infinito*, como por ejemplo:

> *"Existen triángulos semejantes (pero no iguales), es decir triángulos cuyos ángulos son iguales pero de lados desiguales "*
> *Wallis (1616-1703)*

La segunda de las opciones, se abordó de una manera directa, es decir, tratar de demostrar la validez del quinto postulado a partir de los otros cuatro, empleando para ello una cadena lógica de razonamientos.

A comienzos del siglo XVIII se inicia un nuevo camino, en el que se aborda el problema, en la mayoría de los casos, por *reducción al absurdo.*

***Saccheri***

*Giovanni Girolamo Saccheri (San Remo, 1667-Milán, 1733) ingresó en los jesuitas en 1685. Cinco años después marchó a Milán, donde estudió filosofía y teología en el colegio jesuita. Allí, Tommaso Ceva (hermano de Giovanni Ceva, que descubrió el famoso teorema de Ceva) le animó a estudiar matemáticas. Su talento para ellas se puso al descubierto cuando leyó los Elementos de Euclides, quedando sumamente motivado por la potencia de la deducción lógica y, en particular, por el método de reducción al absurdo. En 1694 fue ordenado sacerdote y se dedicó a enseñar en colegios jesuitas. Fue profesor de lógica en Turín y de matemáticas en la Universidad de Pavía desde 1699 hasta su muerte. Entre sus libros se encuentran Euclides ab omni naevo vindicatus (Euclides liberado de toda imperfección), escrito en 1733, y Lógica demonstrativa (1697).*

A este periodo corresponden los trabajos de Saccheri, Lambert, Schweikart y Taurinus.

Saccheri publicó el mismo año de su muerte su obra *Euclides ab omni naevo vindicatus,* que es un pequeño tratado dividido en dos libros. La argumentación que realiza no desmerece en nada de la de Euclides por la profundidad del rigor y el estilo con el que afronta las demostraciones. Este tratado constituye, sin que llegara a suponerlo su autor, el primer texto sobre geometrías no euclídeas. Contiene más de treinta proposiciones, muchas de ellas nada triviales.

El intento de demostración de Saccheri, uno de los más interesantes, fue el que marcó un punto de inflexión en la manera de abordar el *problema de las paralelas.* Como sabemos, el camino seguido hasta entonces era el de tratar de demostrar de manera directa el quinto postulado mediante los otros cuatro. Con Saccheri el asunto toma otro rumbo ya que se propuso demostrar que el quinto postulado era verdadero, para ello lo niega y trata de encontrar alguna contradicción al admitir esta suposición.

Básicamente seguía un tipo de razonamiento lógico (no en vano él daba clases de lógica) que consistía en suponer que si admitía la negación del quinto postulado, y de aquí era capaz de demostrar una proposición P y también su negación no P, entonces el quinto postulado debería de ser cierto.

Esta manera de razonar era nueva en la historia de las paralelas. Sus argumentaciones se basan en su famoso cuadrilátero birrectángulo (cuadrilátero de Saccheri).

El cuadrilátero birrectángulo se construye siguiendo el procedimiento:

1. Trazar el segmento AB
2. Levantar perpendiculares al segmento AB, en los puntos A y B
3. Dibujar los segmentos AD y BC de la misma longitud
4. Unir los puntos ABCD para formar el cuadrilátero


Fig. 8

Por tanto, el cuadrilátero birrectángulo es un cuadrilátero con dos lados opuestos iguales y perpendiculares a la base, Por esta razón se le suele llamar cuadrilátero birrectángulo isósceles.

En estas condiciones Saccheri demuestra que *"los ángulos interiores D y C que se forman en los vértices D y C son iguales "*, pero no es posible demostrar, sin hipótesis adicionales, que son ángulos rectos.

Saccheri considera tres hipótesis:

I. C = D = 90°
II. C = D > 90°
III. C = D < 90°

Saccheri da nombre a las tres hipótesis, la primera la denomina la hipótesis del ángulo recto, la segunda la del ángulo obtuso, y la tercera la del ángulo agudo.

Su objetivo es demostrar que la única hipótesis aceptable es la correspondiente al ángulo recto.

Con esta finalidad comienza sus investigaciones. Demuestra una serie de proposiciones importantes:

> *"Si en un solo triángulo la suma de los ángulos es igual, mayor o menor que dos rectos, en todos los demás triángulos esta suma será respectivamente igual, mayor o menor que dos ángulos rectos" (Prop. VIII).*
>
> *"Según que se verifique la hipótesis del ángulo recto, la hipótesis del ángulo obtuso o la hipótesis del ángulo agudo, la suma de los ángulos de un triángulo será respectivamente igual, mayor o menor que dos ángulos rectos " (Prop. IX).*

Para Saccheri, la hipótesis del ángulo recto daba lugar, de manera obvia, a la geometría de los *Elementos* y por tanto era natural que no la estudiase en profundidad. La hipótesis del ángulo obtuso también fue rápidamente descartada.

Saccheri estaba seguro de superar el último de los obstáculos y emprende una larga batalla por descartar la hipótesis del ángulo agudo que, como él mismo dice *"es la única que se opone a la verdad del Quinto axioma".* Después de encontrar nuevas proposiciones, encuentra un resultado que le hace decir:

> *"Al fin he descubierto en la hipótesis del ángulo agudo una falsedad manifiesta, ya que conduce necesariamente a reconocer la existencia de dos rectas que, en el mismo punto [se*

*refiere al punto de intersección de las dos rectas] y en el mismo plano, tienen una perpendicular común".*

En realidad no encuentra ningún resultado contradictorio desde el punto de vista lógico, sino que vuelve la vista a su concepción del mundo y concluye:

*"La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta"*

El resultado que encontró Saccheri, y que le hace decir todo esto fue el siguiente:
Supongamos dada una recta r y un punto exterior P.

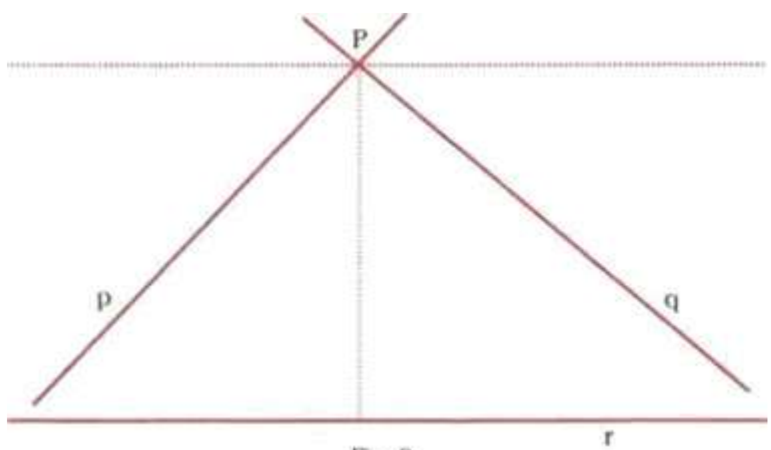


Fig. 9

*"En la hipótesis del ángulo agudo, existen dos rectas p y q pasando por P, y que dividen la familia de rectas que pasan por P en dos clases: la primera clase es la formada por aquellas rectas por P que cortan a r, y la segunda por aquellas que tienen una perpendicular común con r"*

La obra de Saccheri es fundamental, ya que representa la máxima tentativa, en esa época, por solucionar el problema de las paralelas. Además, construye una nueva teoría sin contradicciones lógicas partiendo de la hipótesis del ángulo agudo.

El libro de Lambert *Theorie der Parallellinien (Teoría de las paralelas)* fue escrito en 1766 pero no fue publicado hasta veinte años más tarde. En esa época había en los países germánicos un gran interés por el estudio de la teoría de las paralelas (por ejemplo el matemático alemán A. G. Kastner (1719-1800) fue capaz de reunir una biblioteca con más de siete mil escritos sobre el tema).

Pero el interés de Lambert por el problema de las paralelas es muy posible que viniera motivado de la lectura de un conocido libro dedicado al tema de las paralelas escrito por el matemático alemán G. S. Klügel (1739-1812).

El libro de Lambert consta de tres partes, la primera es un compendio de consideraciones de tipo filosófico, la segunda contiene varias pseudodemostraciones del quinto postulado de Euclides, y la tercera presenta sus más importantes contribuciones a la teoría de las paralelas. Su trabajo discurre por un camino paralelo al de Saccheri y sus razonamientos se basan en el cuadrilátero trirrectángulo.

***Lambert***

*Johann Heinrich Lambert (Mulhouse, 1728-Berlín, 1777) fue un pensador polifacético, uno de los primeros en pensar que nuestra galaxia era una más dentro de la amplitud del*

*Universo. Fue miembro de la Academia de Berlín. En matemáticas Lambert probó que el número π era una cantidad irracional (1766) e introdujo las funciones hiperbólicas en trigonometría. En 1760 publicó unas investigaciones sobre la reflexión de la luz y fue el primero en idear métodos para medir la intensidad de la luz con cierta exactitud (la unidad de brillo se llama Lambert en su honor). Amigo del filósofo alemán I. Kant, con él buscó el volver a introducir el a priori en la ciencia.*

*Sus trabajos en el campo de las paralelas fueron reunidos en un trabajo que publicaría Johann Bernoulli III (1786), sus investigaciones en este campo siguieron inicialmente los razonamientos de Saccheri.*

Para construir el trirrectángulo, Lambert procede de la siguiente manera:

1. Trazar el segmento AB
2. Dibujar el segmento AD perpendicular al segmento AB en el vértice A
3. En el vértice B levantar una perpendicular al segmento AB

4. Trazar por el vértice D una perpendicular al segmento AD y prolongarla hasta encontrar al segmento BC dando lugar al vértice C

Se forma un cuadrilátero que tiene tres ángulos interiores rectos (los correspondientes a los ángulos interiores A, B y D), mientras que el cuarto vértice tiene una de estas tres posibilidades:

$$C = 90$$

$$C > 90°$$

$$C < 90°$$

La primera de ellas es la correspondiente a la hipótesis del ángulo recto, la segunda es la hipótesis del ángulo obtuso, y la tercera es la hipótesis del ángulo agudo.

El método ideado por Lambert, como vemos, es parecido al trabajo de Saccheri. De hecho, el cuadrilátero de Lambert es la mitad del de Saccheri.

Fig. 10

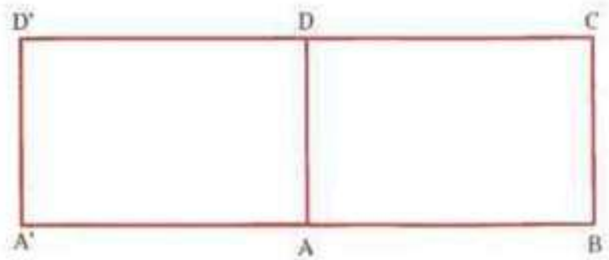



Fig. 11

*El cuadrilátero de Saccheri es A'BCD' y el de Lambert es ABCD.*

Inicialmente su objetivo es rechazar las hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo agudo para quedarse únicamente con la hipótesis del ángulo recto.

Para rechazar la hipótesis del ángulo obtuso, Lambert recurre a la siguiente construcción.

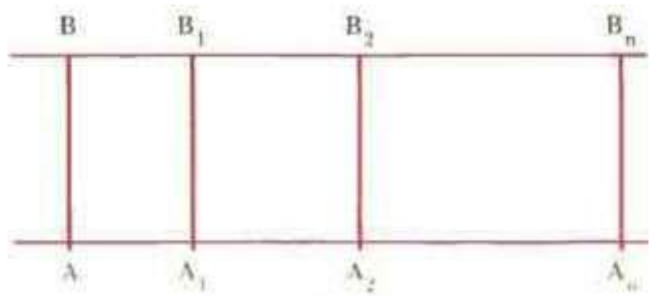



Fig. 12

Traza dos rectas perpendiculares a una tercera recta AB, para a continuación desde los puntos $B_1$, $B_2$,... , $B_n$ bajar perpendiculares hasta encontrar a la otra recta en los puntos homólogos $A_1$, $A_2$,...,$A_n$. En la hipótesis del ángulo obtuso, Lambert demuestra que los segmentos AB, $A_1B_1$,..., $A_nB_n$ van decreciendo progresivamente, de modo que se puede demostrar que $AB - A_nB_n > (AB – A_1B_1)n$.

Sin embargo, para un número natural n suficientemente grande, podemos hacer el segundo miembro de la desigualdad anterior tan grande como queramos (postulado de Arquímedes), mientras que el primer miembro no puede ser mayor que el segmento AB.

Esta contradicción permite a Lambert declarar falsa la hipótesis del ángulo obtuso.

La hipótesis del ángulo agudo la trata con bastante profundidad. En la búsqueda obstinada por encontrar contradicciones, Lambert encuentra resultados notables. Por ejemplo, uno de los más llamativos es :

> *"Dado un triangulo cualquiera ABC, el área de dicho triangulo se obtiene mediante la fórmula $S = K(\pi - A - B - C)$, donde K es una constante del plano".*

Este resultado nos indica que el área de un triángulo, en la geometría del ángulo agudo, es proporcional a la diferencia de *n* y la suma de sus ángulos interiores

Por esa época ya se conocía que la fórmula del triángulo esférico, sobre una esfera de radio R, era:

$$S = R^2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)$$

siendo $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ los ángulos correspondientes al triángulo esférico.

Si en la fórmula anterior ponemos R i ($i^2 = -1$) en lugar de R resulta que obtenemos la fórmula del triángulo correspondiente a la geometría del ángulo agudo.

Lambert se dio cuenta de este detalle y propuso una notable conjetura: *la hipótesis del ángulo agudo se verifica en una esfera de radio imaginario.*

En su trabajo, Lambert observa que todo segmento se puede poner en correspondencia con un ángulo, lo que daría categoría de absoluto a la longitud de segmentos.

Esta medida absoluta de la longitud -dice Lambert- repugna a nuestra intuición euclidiana. Sin embargo actuó con cautela y no fue capaz de rechazar la hipótesis del ángulo agudo desde el punto de vista lógico. En sus investigaciones filosóficas considera seriamente, al menos desde el punto de vista lógico, que la geometría del ángulo agudo sea la verdadera geometría en nuestro mundo.

De hecho hay una serie de escritos suyos en los que se puede leer:

> *"Las demostraciones del postulado de Euclides pueden llevarse tan lejos que, por lo visto, no queda más que una futilidad. Pero el análisis minucioso revela que precisamente esa futilidad aparente constituye la esencia del problema; generalmente, la misma contiene, ya sea la proposición que ha de ser demostrarla, ya sea un postulado equivalente a ésta".*

**_Schweikart_**

*Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) nació tres años más tarde que Gauss y estudió derecho en la Universidad de Marburgo. Con sólo 16 años asiste, entre 1796 y 1798, a las lecciones dictadas en la Universidad de Marburgo por el* *profesor J. K. Hauff, autor de varios escritos sobre la teoría de las paralelas. La impresión que recibe de estas clases es enorme, tanto es así que los siguientes años los dedica a investigar sobre este tema.*

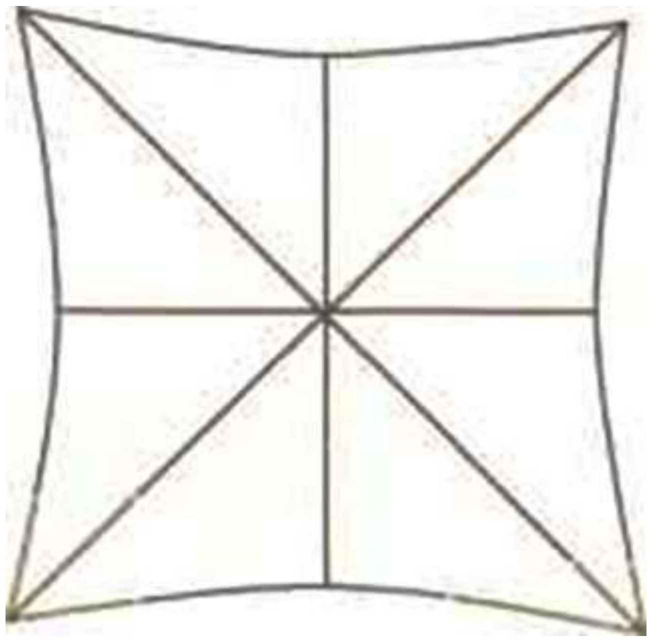
*La influencia ejercida por Schweikart sobre F. A. Taurinus, sobrino suyo, para que estudiase los problemas que a él le preocupaban es, dado que no publicó sus resultados fundamentales sobre la materia, una de sus aportaciones a la teoría de las paralelas. La otra fue su correspondencia con Gauss.*

La obra de Schweikart es interesante desde el punto de vista histórico, pues en 1818, sintetizó sus hallazgos en un escrito y le pidió a C. L. Gerling (1788-1864) de la Universidad de Marburgo que lo enviara a Gauss para que le diera su opinión.

Los aspectos más notables de sus notas son los siguientes:

1. Hay dos tipos de geometría: una geometría en sentido estricto, la euclídea, y otra que denomina geometría astral.
2. Los triángulos de la geometría astral tienen la particularidad de que la suma de los tres ángulos interiores no es igual a dos rectos. Se puede demostrar que:
    - la suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que dos ángulos rectos.
    - la altura de un triángulo rectángulo isósceles, aún creciendo cuando crecen los lados, sin embargo no puede superar a un determinado segmento, que llama *constante.*

3. La geometría euclídea surge cuando esa constante es infinitamente grande. Sólo entonces es cierto que la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos.
4. En la geometría astral el cuadrado tiene la siguiente forma:



*Cuadrado astral*

En realidad la geometría astral coincide con la geometría surgida de la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri y Lambert.

Un año más tarde, en 1819, Gauss contesta a la carta de Schweikart de una manera muy elogiosa y le dice:

> *"Su carta me ha proporcionado un inmenso placer,... yo también he desarrollado una geometría astral similar a la suya".*

La nota de Schweikart concluye determinando el límite superior del área de un triángulo, la fórmula que propone es

$$\frac{\pi C^2}{\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^2}$$

La constante C que aparece en la fórmula es la llamada constante de Schweikart, mientras que la constante obtenida por Gauss es K. Se puede demostrar que las dos constantes están relacionadas por la siguiente expresión.

$$\frac{C}{\log\ \left(1+\sqrt{2}\right)}K$$

Los libros escritos por F. A. Taurinus en 1825 y 1826 son distintos, en el primero sigue las tesis de Saccheri y Lambert y es hostil a la geometría no euclidiana ya que *"repugna a toda intuición".* Sin embargo, en el publicado en 1826 su trabajo toma un rumbo inesperado, habla de una *geometría logarítmica-esférica* (la denomina de esta manera, porque la deduce a partir de la trigonometría esférica y porque las funciones pertinentes son funciones logarítmicas) y poco a poco va obteniendo resultados sorprendentes.

***Taurinus***

*Franz Adolph Taurinus (1794-1874) nació en Bad König (Alemania). Su tío, F. K. Schweikart, desempeñó un papel* *importante al influir en sus ideas y, al igual que él, estudió derecho. Tuvo una posición desahogada, lo que le permitió dedicarse por completo a la investigación. Mantuvo correspondencia con su tío sobre asuntos matemáticos y, bajo su influencia investigó el problema de las paralelas. Su trabajo en éste campo es muy interesante y poco conocido. En 1825 publicó sus investigaciones en un tratado titulado Theorie der Parallellinien (Teoría de las paralelas). Un año más tarde vio la luz otro libro suyo: Geometriae prima elementa. Los libros fueron difundidos por él mismo entre muchos matemáticos y autoridades académicas, pero al no obtener ningún tipo de reconocimiento, despechado, quemó el resto de la edición que guardaba celosamente. Desde 1822 hasta su muerte vivió en Colonia.*

Es interesante leer lo que Taurinus piensa de su trabajo de 1826:

> *"Estando el libro ya impreso, me parecía que restaba exponer mis ideas sobre la verdadera esencia de esta geometría. Al fin tengo la certeza de que esta visión efectivamente puede demostrarse. Desde el principio había abrigado la sospecha de que una tal geometría tenía que ser en cierta manera inversa de la geometría esférica, que implicaba logaritmos y que se podía deducir de las fórmulas generales de la geometría esférica, y me extraña que este hecho, que es tan claro y que está tan a mano, haya permanecido oculto sin explorar hasta llegar yo, lo que nos recuerda a menudo que un asunto evidente puede permanecer*

*oculto durante mucho tiempo, incluso para los hombres más perspicaces ”.*

Taurinus tiene la habilidad de transformar las fórmulas de la trigonometría esférica en otras, que utilizadas convenientemente le sirven para obtener importantes resultados. De manera muy resumida su proceso es el siguiente:

Supongamos un triángulo ABC sobre la superficie de una esfera de radio k. Los lados del triángulo son arcos de circunferencia máximos de la esfera, es decir, circunferencias que están en un plano que pasa por el centro de la esfera. Sean a, b, c las longitudes de los lados y A, B, C los ángulos del triángulo, con a (resp. b, c) la longitud del lado opuesto al vértice A (resp. B, C).

*Fórmulas fundamentales de la trigonometria esfèrica*

**Teorema del coseno para lados**

$$\cos\frac{a}{k} = \cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k} + \operatorname{sen}\frac{b}{k}\operatorname{sen}\frac{c}{k}\cos\hat{A}$$

**Teorema del coseno para ángulos**

$$\cos\hat{A} = -\cos\hat{B}\cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C}\cos\frac{a}{k}$$

El siguiente paso es reemplazar el valor k (radio de la esfera) por ki (como podemos observar se sustituye un valor real por un valor imaginario puro). Desde el punto de vista geométrico (da origen a una esfera imaginaria de radio ki) esto no tiene mucho sentido, sin embargo sí lo tiene desde el punto de vista algebraico ya que en las fórmulas anteriores los valores cos(ki) e isen(ki) son reales.

Por tanto obtenemos las siguientes fórmulas:

**Fórmulas fundamentales de la esfera imaginaria**

$$\cosh\frac{a}{k} = \cosh\frac{b}{k}\cosh\frac{c}{k} - \operatorname{senh}\frac{b}{k}\operatorname{senh}\frac{c}{k}\cos\hat{A}$$

$$\cos\hat{A} = -\cos\hat{B}\cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C}\cosh\frac{a}{k}$$

A partir de estas fórmulas Taurinus demuestra una serie de hechos notables:

**1.** *La suma de los tres ángulos de un triángulo es, en su geometría, menor que dos rectos.*

Supongamos, para simplificar, que el triángulo en cuestión tiene los tres lados iguales, por tanto a = b = c.

En ese caso una de las fórmulas se transforma en

$$\cosh\frac{a}{k} = cosh^2\frac{a}{k} - senh\frac{a}{k}\cos A$$

Despejando tenemos

$$\cos A = \frac{\cosh^2\left(\frac{a}{k}\right) - \cosh\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{a}{k}\right)} = \frac{\cosh\left(\frac{a}{k}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{k}\right) - i}$$

al ser cosh(a/k) > 1, se verifica que cos Â > ½ y por tanto Â < 60 lo que nos indica que la suma de los tres ángulos es menor que 180º.

**2.** *Cuanto menores son los lados del triángulo mayores son sus ángulos (la suma de los ángulos tiende a 180°).*

Este resultado es evidente sin más que aplicar límites a la última fórmula. En efecto:

$$\cos \hat{A} = \frac{\cosh\left(\frac{a}{k}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{k}\right) + 1} \to \frac{1}{2} \text{ (cuando a} \to 0)$$

Luego Â tiende a 60º y, por tanto, la suma de los tres ángulos tiende a 180°.

**3.** *Si el radio K tiende a infinito también se verifica que la suma de los ángulos de un triángulo tiende a 180°.*

En efecto, como

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) \to 1 \text{ (cuando } k \to \infty)$$

también se verifica que

$$\cos \hat{A} = \frac{\cosh\left(\frac{a}{k}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{k}\right) + 1} \to \frac{1}{2} \text{ (cuando } k \to \infty)$$

y se verifica, al igual que en el apartado anterior, que la suma de los tres ángulos tiende a 180°.

**4.** *Obtención del ángulo de paralelismo.*

Razonando a partir de la segunda fórmula, esto es de

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cosh \frac{a}{k}$$

considerando el caso particular $\hat{A} = 0°$ y $\hat{C} = 90°$ (el triángulo descrito tiene un ángulo recto en C y el vértice correspondiente al ángulo $\hat{A}$ se encuentra en el infinito, lo que significa que los dos lados del triángulo son asintóticos) la fórmula se transforma en

$$1 = \sin \hat{B}\, cosh \frac{a}{k}$$

y, por tanto,

$$cosh \frac{a}{k} = \frac{1}{\sin \hat{B}}$$

(el ángulo $\hat{B}$ es el llamado ángulo de paralelismo, asociado a la distancia a).

Esta fórmula sería luego redescubierta por Lobachevski, Gauss y Bolyai.

El trabajo de Taurinus es básicamente algebraico. Es la primera vez que se aborda el problema de las paralelas sin recurrir a figuras o razonamientos estrictamente geométricos. Empleando su método va obteniendo diversos resultados: calcula el área de un triángulo conocidos sus lados, halla la longitud de una circunferencia, el área de un círculo, la superficie y el volumen de una esfera, etc.

| | |
|---|---|
| Longitud de una circunferencia de radio r | $2\pi k \operatorname{senh} \frac{r}{k}$ |
| El área de un círculo de radio r | $2\pi k^2 (\cosh \frac{r}{k} - 1)$ |
| El área de una esfera de radio r | $4\pi k^2 \operatorname{senh}^2 \frac{r}{k}$ |
| El volumen de una esfera de radio r | $2\pi k^3 (\operatorname{senh} \frac{r}{k} \cosh \frac{r}{k} - \frac{r}{k})$ |

Las contribuciones de Taurinus a la teoría de las paralelas son muy importantes y él está convencido de que la geometría del ángulo agudo no contiene en sí misma ninguna contradicción, en términos actuales se diría que es una geometría lógicamente consistente.

# Capítulo 7

## Las primeras investigaciones geométricas

*"La búsqueda de la verdad es más preciosa que su posesión".*
*Albert Einstein*

### §. El primer libro sobre geometría

Las clases en la Universidad de Kazán se impartían, en la mayoría de los casos, mediante apuntes que provenían de las grandes obras de la época, pero el protector Magnitski animó a los profesores a publicar sus manuales con la intención de que la universidad tuviera sus propios libros. En el verano de 1823, Lobachevski presentó un curso de *geometría* a las autoridades académicas y estas solicitaron al protector la licencia para su publicación. Según la normativa, Magnitski hizo llegar el manuscrito a N. I. Fuss (discípulo de Euler y secretario de la Academia de Ciencias de San Petersburgo) acompañado de la siguiente nota:

> *"Señor:*
> *Un profesor de la Universidad de Kazán ha escrito un curso de geometría y me ha solicitado la autorización para publicarlo por cuenta del Estado en calidad de manual. Le estaré infinitamente agradecido si me comunicara su opinión acerca de la obra que le adjunto*
> *Magnitski*

La respuesta del académico Fuss no se hizo esperar y supuso un verdadero disgusto para Lobachevski.

Estaba redactada en los siguientes términos:

> *"La obra titulada Geometría, que usted me ha enviado el 31 de julio..., contiene diversos razonamientos e investigaciones geométricas que, después de la corrección de los errores y la eliminación de las cosas inútiles o ya conocidas, podría ser presentada a usted bajo el título anterior u otro similar. Pero esa obra no es una geometría o una exposición completa y sistemática de dicha ciencia, y si su autor cree que la misma puede servir de manual, prueba con ello que no se da cuenta de lo que se exige de un libro didáctico, es decir, de la plenitud de las verdades geométricas que constituyen todo el sistema del curso elemental de esta ciencia, del método matemático, de la necesidad de definir todos los conceptos con claridad y precisión, del orden lógico y de la disposición metódica de las materias, de la gradación de las verdades geométricas, del rigor impecable y puramente geométrico de sus demostraciones, tanto como sea posible, etc. La geometría que he examinado no posee la menor traza de todas las cualidades necesarias antes mencionadas. Por otra parte, es extraño que el autor tome el metro francés por unidad de medida de las líneas rectas, y la centésima parte del cuadrante, bajo el nombre de grado, como unidad de medida de los arcos del círculo .*
>
> *Por lo demás, aunque el autor haya dado a esa obra el título de Geometría, es dudoso que él mismo pueda pensar que ha escrito*

*un manual. A mi juicio, su fin esencial era explicar algunos objetos geométricos que, a causa de la noción infinitamente pequeña introducida para lograr una mayor concisión, le parecerían confusos; pero esforzándose en evitar el uso de esa noción, le ha sucedido lo mismo que a aquellos que hicieron la tentativa antes que él...*

*Teniendo en cuenta los defectos de la presente Geometría y dado el considerable número de cursos de geometría completos y mejores, aunque en grados diferentes (me limitaré a citar, entre otras, las obras originales de Rumovski, Osipovski, Gamalela y Gunev, y entre las traducciones del griego, los Elementos de Euclides, traducidos por Suvórov, Nikitin y Petrushevski; y del francés, los libros de Bézout, Legendre, Lacroix, etc.), sin ninguna duda que dicha Geometría no puede aceptarse en ninguna parte en calidad de manual, y yo no puedo, en ninguna forma, recomendar su publicación por cuenta del Estado.*

*Es un gran honor el haberle conocido, etc."*

*N. I. Fuss*

Cuando el rector y Magnitski supieron de la nota le comunicaron a Lobachevski que era necesario rectificar y mejorar una serie de aspectos de su *Geometría* (de acuerdo con el escrito de Fuss) y le hicieron saber que si esto no sucedía no era posible su publicación.

Lobachevski se sintió tremendamente ofendido, tanto por la carta de Fuss, como por las recomendaciones de su rector y del protector

Magnitski. Como consecuencia, no corrigió el manuscrito y se olvidó de su publicación (el citado escrito fue considerado perdido hasta que, a comienzos de 1898, fue encontrado, casual mente, en los archivos de la oficina del protector de la Universidad de Kazán).


*Sello emitido en la Unión Soviética en 1956 para conmemorar el centenario del fallecimiento de Lobachevski.*

La severa crítica hacia el trabajo presentado por Lobachevski produjo una impresión considerable entre sus colegas, pero Lobachevski, lejos de abandonar sus investigaciones geométricas, siguió trabajando con el mismo tesón y profundidad.

***Fuss***

*N. I. Fuss (1755-1826) nació en Basilea (Suiza) y en 1772 se*

*trasladó a San Petersburgo para trabajar como secretario de Euler. Publicó inicialmente trabajos sobre astronomía aunque posteriormente investigó en diversas ramas de análisis.*
*Desde 1783 fue académico y profesor en San Petersburgo. También fue miembro de las Academias de Ciencias de Alemania, Suecia y Dinamarca. Desde 1800 hasta el final de su vida fue secretario perpetuo de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.*
*Durante varios años participó de manera muy activa en los asuntos del Ministerio de Instrucción Pública. Era, por tanto, una persona de reconocida valía científica.*

## §. La influencia de D'Alembert y Legendre

Hay que señalar que Lobachevski no consideraba al sistema de Euclides como el modelo a imitar y, por tanto, trató de asentar los fundamentos de su geometría sobre nuevos principios. No se trataba de un simple deseo de ser original sino de ser más profundo y de explicar los asuntos geométricos a la luz de las últimas tendencias de su época. Entre ellas hay que citar las influencias de dos grandes personajes: D'Alembert y Legendre.
D'Alembert publicó un artículo sobre la enseñanza de la geometría, que apareció en el tomo VII de la *Enciclopedia* en 1757, y que tuvo una enorme repercusión e importancia en su época.
Las ideas de D'Alembert se resumen en los siguientes puntos:

1) La exposición de los elementos de la geometría debía depender, en primer lugar, de los fines para los cuales estaba destinado el libro, y definía tres tipos de libros:
   - Para la enseñanza elemental
   - Para fines exclusivamente prácticos
   - Para un estudio más profundo de la geometría o para la preparación de los alumnos que mostrasen inclinaciones y disposiciones particulares con respecto a esa ciencia.
2) A cada uno de los tres casos habría de corresponder un tipo de manual específico. De hecho, en esa época, ya existía una serie de textos sobre geometría que reflejaban las tres tendencias.
3) D'Alembert estimaba que era necesario que los elementos de geometría comenzasen por los axiomas para luego ir construyendo un armonioso edificio en base a los soportes elegidos (postulados o axiomas). La exposición y ordenación de los *Elementos* de Euclides no responde al rigor que debe exigírsele a un tratado de esta naturaleza. En efecto, desde el comienzo hasta el final, los razonamientos lógicos van acompañados de representaciones concretas y, por tanto, la obra de Euclides no es un sistema de deducciones obtenidas exclusivamente de las definiciones y de los axiomas, sino que el soporte visual es crucial, en la mayoría de los casos, para completar las demostraciones.
4) D'Alembert propone que en los elementos de geometría el papel primordial debe corresponder a la geometría métrica.

Conforme a esta visión, un manual de geometría debería dividirse no en fragmentos que tratasen de la recta, el plano y el espacio, sino en tres partes dedicadas respectivamente a la medida de las longitudes, las áreas y los volúmenes.

5) D'Alembert, a diferencia de Euclides, recomienda usar el movimiento de manera sistemática.
6) Propone no utilizar la teoría de las proporciones de Euclides ya que la considera excesivamente complicada.

Siguiendo sus orientaciones vieron la luz muchos manuales sobre geometría. De entre los autores que se dedicaron a poner en práctica las teorías geométricas de D'Alembert, destacaremos a tres. Un magnífico curso, de carácter elemental, dirigido a estudiantes de secundaria, fue escrito por Étienne Bézout (1730-1783); otro texto de carácter superior que tuvo mucho eco en la época fue el preparado por Silvestre-François Lacroix (1765-1843); y por último el famoso tratado del ilustre matemático francés Adrien-Marie Legendre titulado *Éléments de géométrie.* Este libro mantiene las partes fundamentales de los *Elementos* de Euclides pero cambia el tipo de lenguaje haciéndolo más cercano al lector. Además, Legendre introduce aspectos algebraicos, lo que le permite dejar a un lado el segundo libro de los *Elementos,* tal y como D'Alembert preconizaba. Los *Éléments de géométrie* de Legendre han jugado un importantísimo papel por su esmerada exposición sintética, sirviendo de base como texto fundamental en la enseñanza secundaria y universitaria.

Los tres libros eran conocidos por Lobachevski, pero en particular los dos últimos ya que el primero era demasiado elemental.

Básicamente, y de una manera muy resumida, las investigaciones de Legendre en el campo de *la teoría de las paralelas* discurren de la forma siguiente:

Sin recurrir al postulado de las paralelas, demuestra las tres proposiciones siguientes:

**P1.** La suma de los ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos ángulos rectos.

**P2.** Si la suma de los ángulos es igual a dos rectos en un triángulo cualquiera, también es igual a dos rectos en cualquier otro triángulo.

**P3.** Si la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, el postulado de las paralelas es válido, y por consiguiente, toda la geometría euclídea también lo es.

Siguiendo este esquema de argumentaciones, podemos decir que:

> *"El quinto postulado de Euclides equivale a admitir que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos*

Por lo tanto, Legendre concentró todas sus fuerzas en demostrar (recurriendo únicamente a los cuatro primeros postulados) que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos. Si era capaz de probar este aspecto podía estar satisfecho, ya que de acuerdo a sus resultados se desprendía que el quinto postulado se podía deducir de los otros cuatro.

Si bien la demostración de Legendre es ingeniosa, comete fallos similares a los de sus predecesores. Veámosla de manera muy resumida.

1. Construye el triángulo ABC, sobre el cual va a razonar.
2. A su lado construye un triangulo igual al ABC, pero de vértices BCD (AB = CD, BD = AC y con el lado común BC).
3. Construye un triángulo AFE, tal que sus lados AF y AE contengan, respectivamente, los segmentos AB y AC, y de tal manera que el punto D esté situado sobre el segmento EF. Los puntos E y F no están unívocamente determinados.

De esta manera se han dibujado dentro del triángulo AFE cuatro triángulos interiores (tal como muestra la Figura 13).

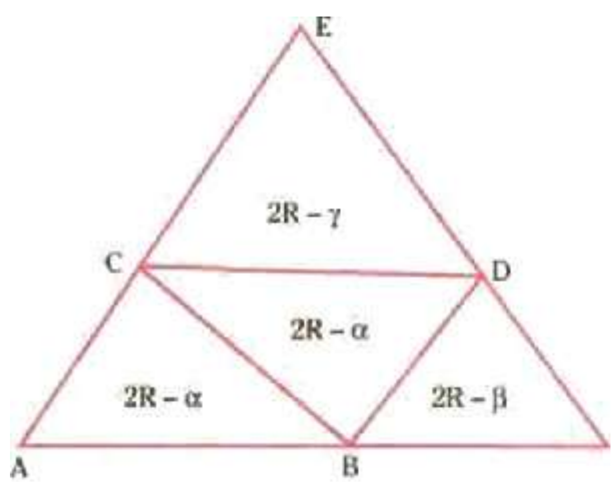


Fig. 13

Una vez realizada la construcción, Legendre se apoya para su razonamiento en sus proposiciones. Supone que no se cumple que la suma de los tres ángulos interiores es igual a dos rectos, de acuerdo a la primera de sus proposiciones ha de ser menor de dos rectos.

Luego la suma de los tres ángulos interiores del triángulo ABC es $2R - \alpha$ ($\alpha > 0$). Esto quiere decir que es algo menos que dos rectos, por ser el triángulo BCD igual al ABC, sucederá que la suma de sus ángulos interiores también es igual a $2R - \alpha$.

De acuerdo a su segunda proposición, podemos escribir que la suma de los ángulos interiores correspondientes a los triángulos BDF y CED son respectivamente $2R - \beta$ ($\beta > 0$) y $2R - \gamma$ ($\gamma > 0$).

*Adrien-Marie Legendre*[2].

[2] Más información sobre este matemático en el libro *Legendre. La honestidad de un científico* de Ana Garcia Azcárate (NIVOLA, 2002).

Sumando todos los ángulos interiores a los cuatro triángulos obtenemos el valor:

$$2(2R - \alpha) + (2R - \beta) + (2R - \chi) = 8R - 2a - \beta - \chi$$

Pero como los tres ángulos interiores que confluyen en el punto C suman 2R, al igual sucede con los puntos B y D, podemos afirmar que la suma de los tres ángulos interiores al triángulo grande EAF es igual a:

$$(8R - 2\alpha - \beta - \gamma) - 6R = 2R - 2a - \beta - \gamma < 2R - 2\alpha$$

Por este procedimiento hemos construido, a partir del triángulo ABC, (recordemos que los tres ángulos interiores sumaban 2R - α), un nuevo triángulo, en nuestro caso EAF, cuya suma de ángulos interiores es menor que 2R - 2α. Repitiendo esta técnica obtenemos otros triángulos cuya suma de ángulos interiores es menor que 2R - 4α, 2R - 8α, 2R - 16α, 2R - 32α, 2R - 64α,... llegando a obtener un triángulo cuya suma de ángulos interiores tendría un valor negativo, lo que claramente es un absurdo. Por tanto, no puede ocurrir que la suma de los ángulos interiores sea menor de dos rectos y, de acuerdo a la primera proposición, se ha de verificar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.

Sin embargo, la demostración no es correcta ya que supone que por un punto D, situado en el interior del sector ángulo correspondiente a A, siempre se puede trazar una recta FE que se encuentre con los dos lados del ángulo, y tal aseveración es equivalente al quinto postulado de Euclides.

## §. Contenido de la *Geometría*

El libro de Lobachevski resultó muy atrevido para su época, y posiblemente el académico Fuss no comprendió el trasfondo del mismo. La propia disposición de los distintos capítulos llama la atención. Los cinco primeros capítulos se construyen sin utilizar en ningún momento el quinto postulado de Euclides. Por tanto estaba elaborando una *geometría absoluta* (aquella que no depende del quinto postulado, sino únicamente de los cuatro primeros). Desde el punto de vista histórico este hecho es fundamental, ya que es la primera persona que lo hace de manera consciente.

El aspecto métrico es clave en su trabajo. Lobachevski se da cuenta de que la medida de los ángulos y de los segmentos no depende del quinto postulado, mientras que la medida de las áreas sí depende directamente del famoso postulado. Por esta razón, el cálculo de áreas de diversas figuras no es abordado hasta bien avanzado el libro.

El libro se compone de 13 capítulos, diez de ellos están dedicados a la medida de diferentes elementos geométricos (líneas, ángulos, poliedros, triángulos, prismas, etc.) y los tres últimos están dedicados a la teoría de las perpendiculares, de las paralelas y a la igualdad de los triángulos.

Lobachevski divide su *Geometría* en tres partes:

- Longimetría
- Planimetría
- Estereometría

La estructura del libro de Lobachevski sigue las pautas de D'Alembert, que proponía el estudio de la geometría bajo tres ópticas: medida de longitudes, medida de las áreas y cálculo de volúmenes, como se ha indicado antes.

Es muy original el estudio que realiza de algunas cuestiones. Por ejemplo, en el segundo capítulo presenta a la circunferencia y a la esfera al mismo tiempo, en el capítulo cuatro analiza con detenimiento los polígonos conjuntamente con los poliedros.

Lobachevski intentó demostrar el postulado de las paralelas a la inversa de la manera en que fue enunciado por Playfair. Esto es, supuso que por un punto P no situado en la recta AB pasan, en el plano, más de una recta no secante con AB, tal como muestra la Figura 14.

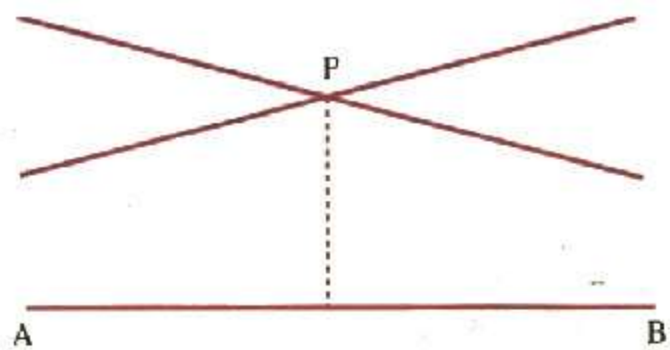



Fig. 14

A partir de una hipótesis tan absurda comienza a deducir resultados con la intención de encontrar alguna contradicción. Curiosamente construye un raro, pero armonioso, edificio geométrico que él llama *geometría imaginaria* y que actualmente llamamos *geometría hiperbólica* o de Lobachevski. Este hecho nos indica que por esta época Lobachevski pensaba -al igual que

Saccheri, Lambert y otros muchos- que el quinto postulado se podía demostrar a partir de los otros cuatro.

### §. Nacimiento de su geometría no euclidiana

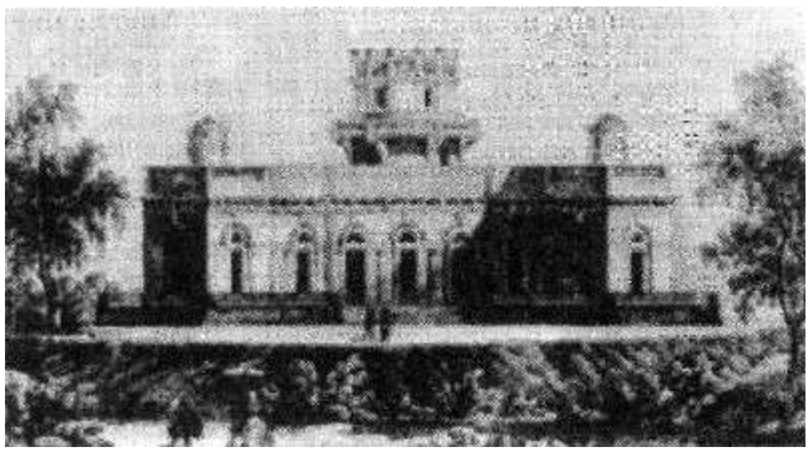
Sin duda, el libro de Lobachevski fue la semilla de sus investigaciones geométricas posteriores. A pesar de las severísimas críticas recibidas, siguió trabajando y profundizando en la teoría de las paralelas y tres años más tarde, en 1826, presentó un informe que recogía buena parte de sus revolucionarias ideas.

Exactamente el 11 de febrero de 1826, en una reunión de la facultad, presentó un informe acompañado de la siguiente carta:

> *"Tengo el honor de presentar bajo el título de Exposición sucinta de los principios de la geometría, con una demostración rigurosa del teorema de las paralelas, un trabajo del cual soy autor.*
>
> *Al respecto, deseo conocer la opinión de mis compañeros y, si es favorable, solicito humildemente la publicación de mi trabajo en las memorias de la Sección de Física y Matemáticas. He preferido escribir el trabajo en francés, porque en ese idioma, ahora común a los hombres de ciencia, se ha contemplado editar las memorias".*
>
> *N. I. Lobachevski*

Para analizar su petición se reunió una comisión formada por tres profesores de la universidad (compuesta por I. M. Simonov, A. Ya. Kupfer y N. D. Brashmannn). Dichos docentes no estaban al corriente de las cuestiones relativas a la geometría y, por tanto no

eran las personas más idóneas para valorar adecuadamente el escrito de su compañero.
Sin embargo, la comisión adoptó la decisión de valorar negativamente la publicación del trabajo de Lobachevski. Desgraciadamente no se ha podido encontrar el informe escrito, nos han quedado únicamente algunos comentarios sueltos, la mayoría muy despreciativos, y el resultado negativo de tal dictamen.



*Observatorio de la Universidad de Kazán*

Por tanto, Lobachevski era nuevamente vilipendiado y desprestigiado. Ahora, sus propios compañeros se burlaban de sus investigaciones. Si bien el trabajo no se editó, sí estamos en condiciones de hablar de su contenido, ya que tres años más tarde, el mismo Lobachevski publicó en la revista *El mensajero de Kazán* (una revista educativa de carácter general que se publicaba en la Universidad de Kazán), una memoria titulada “Acerca de los principios de geometría”. Una parte importante de la memoria incluía el informe que tres años antes había presentado en la facultad.

El contenido de su *Exposición sucinta...* desarrolla los aspectos más notables de su geometría no euclidiana y termina con el estudio de algunas ecuaciones que relacionan los lados y los ángulos de triángulos rectángulos

En resumen, el 11 de febrero de 1826, en la Universidad de Kazán se produjo un hecho notable: la creación de una nueva geometría. Su artífice fue un matemático llamado N. I. Lobachevski. Se abría una nueva era en el campo de la geometría.

# Capítulo 8

## Acerca de los principios de geometría

*"¡Humíllate, impotente razón!".*

*Blaise Pascal*

En febrero del año 1829 apareció en el *Mensajero de Kazán* la primera de las memorias de Lobachevski, con el título de “Acerca de los principios de geometría”. Las siguientes memorias fueron publicadas los meses de marzo, abril, noviembre y diciembre de 1829, así como en marzo, abril, julio y agosto de 1830.

A lo largo de las nueve entregas, Lobachevski va desgranando sus revolucionarias ideas. El trabajo es complejo y difícil de leer, pero podemos señalar tres partes diferenciadas.

La primera parte se centra en el estudio de la llamada geometría absoluta, en realidad es un resumen de su *Geometría* presentada el año 1823 y que tan mal acogida tuvo.

La segunda parte expone el contenido de su *Exposición sucinta...* A lo largo de muchas páginas se dedica a estudiar y obtener el ángulo de paralelismo, que él llama $\Pi(x)$.

La última parte está dedicada a la medida de longitudes, áreas y volúmenes. El estudio se hace mediante procesos de integración. Además muchos de los cálculos los realiza por varios procedimientos para verificar que los resultados coinciden. Este hecho le reafirmaba en su convicción de que la geometría que estaba edificando era correcta desde un punto de vista lógico.

En la parte final de la memoria Lobachevski utilizando métodos específicos de su geometría imaginaria, a veces encuentra el valor de una integral definida o bien reduce algunas integrales a otras. Sus descubrimientos, relativos al cálculo integral, son presentados en una tabla titulada "Comparación de las integrales y valores nuevos encontrados de las integrales definidas".

En resumen, el trabajo presentado por Lobachevski es realmente muy innovador. Además de un estudio analítico y métrico, contiene aplicaciones de la nueva geometría al cálculo integral y, sobre todo, cálculos destinados a verificar la exactitud lógica de esa nueva geometría.

Veamos algunos aspectos relacionados con el contenido matemático de su obra.

### §. La función de Lobachevski Π(x)

El ángulo de paralelismo es estudiado por Lobachevski con suma atención, después de un estudio analítico de funciones llega a la conclusión que el ángulo de paralelismo se puede obtener mediante una función del tipo

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$

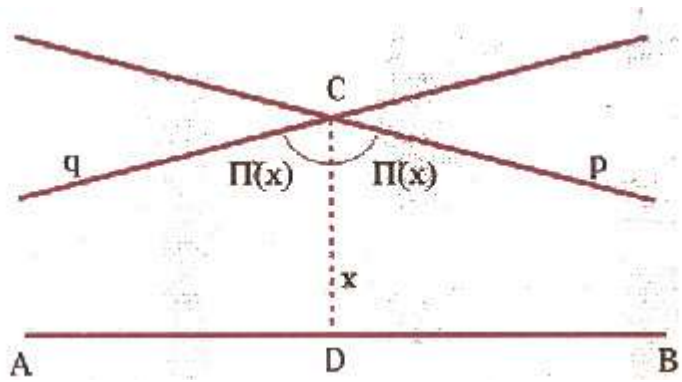
o bien

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{\frac{x}{k}}$$

**_Ángulo de paralelismo, rectas paralelas, rectas secantes_**

***y rectas hiperparalelas***

*Dada una recta AB y un punto C, exterior a ella, entre todas las rectas que pasan por C podemos establecer dos clases de rectas respecto a AB: la clase de las rectas que cortan a AB y la clase de las que no lo hacen.*




*Las primeras se llamarán rectas secantes, mientras que a la última clase pertenecen las dos rectas p y q que forman la frontera entre las dos clases. Estas dos líneas frontera son llamadas las rectas paralelas. El ángulo Yl(x) se llama ángulo de paralelismo (depende de la distancia x del punto C a la recta AB). Hay otro tipo de rectas que no son estrictamente paralelas, sin embargo pasan por C y no cortan a AB, son llamadas rectas hiperparalelas, aunque en el sentido de Euclides éstas son paralelas a AB y así, en este sentido, la geometría de Lobachevski contiene un número infinito de paralelas a la recta AB que pasan por C.*

La Figura 15 nos indica que la recta n es paralela a m pasando por el punto P. Siendo Π(x) el ángulo que forman dichas rectas paralelas en el punto P, dónde x expresa la distancia del punto P a Q.

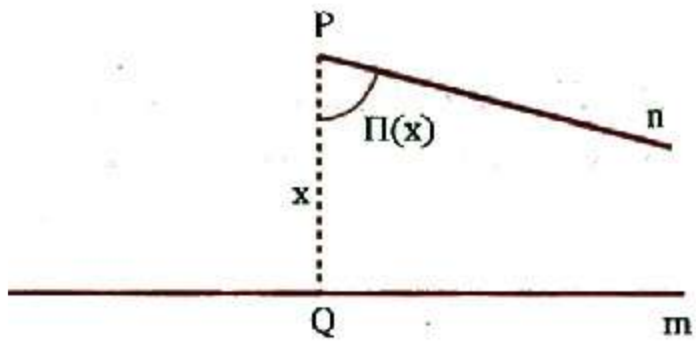


Fig. 15

Al igual que los estudios realizados por Lambert, Taurinus, Gauss y tantos otros, aparece en la fórmula del ángulo el valor k; pero, ¿qué significa k?

Lobachevski dice:

> *"...teóricamente k puede tener cualquier valor, a cada uno de los valores de la constante k le corresponde una geometría imaginaría.*
>
> *"... no hay una sola geometría imaginaría) existe un número infinito de variedades correspondientes a los diversos valores de la constante k. Entre ellas, la vieja geometría euclidiana corresponde al caso límite (cuando k tiende a infinito).*
>
> *En cuanto a saber cuál es el valor de k en nuestro espacio concreto, en el cual son los rapos luminosos los que sirven de líneas rectas, no se trata de una cuestión de lógica, sino de física; a la cual sólo se le puede encontrar una respuesta experimentalmente. Mientras nuestras medidas no revelen algunas variaciones a la geometría euclideana, podemos*

*suponer que solo ella rige nuestro espacio. Pero sí, penetrando en los dominios extremadamente alejados del universo, nuestros aparatos de medida detectaran tales variaciones, su naturaleza y su magnitud permitirían determinar ¡os valores de la constante k".*

Una vez definida la función Π, Lobachevski pasa a estudiar sus propiedades más importantes.

***El ángulo de paralelismo para k-1 y x=l***

*En este caso la función toma la forma:*

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(1) = e^{-1} = 0{,}3678$$

*De tal manera que*

$$\Pi(l) = 40^\circ\ 24'$$

*Podemos concluir que la unidad de longitud es aquella longitud cuyo ángulo de paralelismo es, aproximadamente, 40° 24'*

*Esta idea ya había sido expuesta por Lambert cincuenta años antes.*

La función Π es monótona decreciente y continua, y verifica las siguientes propiedades:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\Pi(x)\to 0 \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\Pi(x)\to\frac{\pi}{2}$$

La segunda propiedad nos confirma que cuando realizamos el estudio de dicha geometría en valores muy próximos entre sí su comportamiento es el de la geometría euclídea (ya que el valor del ángulo de paralelismo es igual a $\pi/2$)

En esa época Lobachevski quiso verificar de manera experimental si el modelo de nuestro espacio respondía a la geometría euclídea (o euclidiana) o a su *geometría imaginaria.* Uno de los resultados que enfrentaba a ambas geometrías es que la suma de los ángulos de un triángulo sea igual o menor a 180°.

Lobachevski estudió la suma de los tres ángulos de un gran triángulo astronómico que tenía como vértices la Tierra, el Sol y la estrella Sirio. Sus cómputos le llevaron a la conclusión de que esa suma difería de 180° menos de 0,000372". No hay que olvidar que Lobachevski era un consumado calculista y experimentado astrónomo; sin embargo, esas cuentas eran muy laboriosas y requerían sumo cuidado. Lobachevski era consciente de que para realizar sus cálculos se servía de cálculos de distancias y ángulos que correspondían a la geometría euclídea. Por esta razón inventó un método que trataba de corregir, en la medida de lo posible, los aspectos anteriores. Sus cómputos le llevaron al resultado anterior que, desde luego, no mostraba que el modelo de nuestro espacio correspondiese a la geometría imaginaria (no hay que olvidar que la sensibilidad de los instrumentos en esa época estaba en la frontera de 1”).

La trigonometría del triángulo rectángulo, en la geometría no euclidiana de Lobachevski, es algo particular.

Si llamamos a, b y c a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, se verifican las siguientes relaciones:

$$\text{cotg}\,\Pi(a) = \text{cotg}\,\Pi(c)\,\text{sen}\,\hat{A}$$

$$\text{sen}\,\hat{A} = \cos\hat{B}\,\text{sen}\,\Pi(b)$$

$$\text{sen}\,\Pi(c) = \text{sen}\,\Pi(a)\,\text{sen}\,\Pi(b)$$

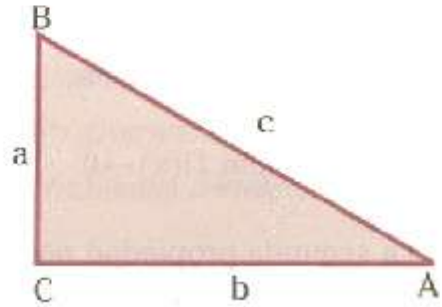



Fig. 16

La última fórmula relaciona los lados del triángulo rectángulo, en función del ángulo de paralelismo de cada lado, por esta razón se la suele conocer como el *teorema de Pitágoras* para triángulos rectángulos correspondientes a la geometría no euclidiana de Lobachevski.

Lobachevski, partiendo de su fórmula fundamental

$$\text{cotg}\,\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{\frac{x}{k}}$$

transforma la ecuación en otras, que en algunas ocasiones le interesan más, y que son:

$$\text{cotg}\,\Pi(x) = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{\frac{-x}{k}}}{2}$$

$$\text{cosec}\,\Pi(x) = \frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{\frac{-x}{k}}}{2}$$

Si desarrollamos los segundos miembros en series de potencias, según las potencias de y consideramos la fracción como muy pequeña, despreciando los términos de orden igual o superior a tres, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\cot \Pi(x) = \frac{x}{k}$$

$$\operatorname{cosec} \Pi(x) = 1 + \frac{x^2}{2k^2}$$

$$\cos \Pi(x) = \frac{x}{k}$$

Estos cálculos son válidos para valores muy pequeños de la fracción x/k; introduciendo estos valores en las fórmulas obtenidas k para el triángulo rectángulo obtenemos (para k = l):

$$a = c \operatorname{sen} A$$

$$b = c \operatorname{sen} \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Que como podemos observar son fórmulas del triángulo rectángulo de la geometría euclidiana.

La tercera parte de "Acerca de los principios de la geometría” no es desarrollada en su *Exposición sucinta...* En primer lugar, se preocupa por conocer mejor los aspectos trigonométricos y sus relaciones, también en familiarizarse con los elementos básicos de la geometría analítica y diferencial en su geometría imaginaria.

A continuación, pasa a la medida de longitudes, áreas y volúmenes de ciertas figuras y cuerpos. Por ejemplo obtiene que:

- La longitud de una circunferencia de radio r se obtiene mediante la fórmula

$$S = 2\pi\, k \cot \Pi(r)$$

• El volumen de un cono, de generatriz $l$ altura h, siendo $\hat{C}$ el ángulo que forman la altura y la generatriz, se obtiene mediante la fórmula

$$V = \pi(l \cos \hat{C} - h)$$

Al acabar el libro, Lobachevski se recrea en las fórmulas trigonométricas que obtuvo anteriormente, así las vuelve a escribir bajo la siguiente forma

$$e^{\frac{a}{k}} - e^{\frac{-a}{k}} = (e^{\frac{c}{k}} - e^{\frac{-c}{k}}) \operatorname{sen}\hat{A}$$

$$e^{\frac{b}{k}} - e^{\frac{-b}{k}} = (e^{\frac{c}{k}} - e^{\frac{-c}{k}}) \operatorname{sen}\hat{B}$$

$$e^{\frac{c}{k}} + e^{\frac{-c}{k}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{a}{k}} + e^{\frac{-a}{k}})(e^{\frac{b}{k}} + e^{\frac{-b}{k}})$$

Teniendo en cuenta que el seno hiperbólico se define por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

La primera de las fórmulas se transforma en:

$$\operatorname{senh}\left(\frac{a}{k}\right) = \operatorname{senh}\left(\frac{c}{k}\right) \operatorname{sen}\hat{A}$$

Esta última expresión, seguramente, es la causante de que Lobachevski diera el nombre de *geometría hiperbólica* a su geometría imaginaria.

## §. La ira de los beocios

Como ya sabemos, el pequeño tratado titulado *Exposición sucinta...* no llegó a publicarse nunca debido a las críticas tan negativas que recibió de sus propios compañeros. Pero Lobachevski, lejos de desanimarse, siguió trabajando, si cabe, con más empeño y por fin dio a conocer al mundo científico sus revolucionarias investigaciones en la memoria titulada “Acerca de los principios de geometría”.

Durante meses esperó las críticas con impaciencia. Por fin, en 1834, en las revistas *El hijo de la patria* (nº 41) *y Archivos del norte* apareció tan esperada crítica, firmada por un personaje (o quizás varios) desconocido, que se escondía bajo la firma S. S.

La critica llevaba por título "Acerca de los principios de geometría, obra del señor Lobachevski” y estaba redactada en los siguientes términos:

> *"Hay personas que después de haber leído un libro declaran: es demasiado simple, demasiado ordinario, no ha hecho trabajar mí espíritu. Les aconsejo que lean la geometría del señor Lobachevski. Verdaderamente en ella encontrarán materia para reflexionar. Muchos de nuestros excelentes matemáticos la han leído, han reflexionado, pero no han comprendido nada. Es necesario agregar que yo mismo he meditado durante algún tiempo sobre ese libro, y no he podido captar un solo pensamiento por pequeño que éste sea. En vano uno se preguntará cómo ha podido hacer el señor Lobachevski de la ciencia matemática más fácil y más clara, como es la geometría, una teoría tan pesada, tenebrosa e inabordable, sí él mismo nos*

*había aclarado parcialmente ese asunto diciendo que su geometría no es la geometría usual que hemos aprendido, y que es muy probable que no podamos olvidar, sino una geometría imaginaría. Sí, ahora comprendemos todo. ¡Qué no puede representar la imaginación, sobre todo sí está viva al mismo tiempo que enfermiza! ¿Por qué no imaginar, por ejemplo, que lo negro es blanco, que un circulo es un cuadrilátero, que la suma de todos los ángulos de un triángulo rectilíneo es inferior a dos rectos y que una misma integral definida vale unas veces* $\pi/4$ *y otras veces infinito?*

*(...)*

*Pero, ¿por qué escribir, y además publicar fantasías tan absurdas? nos preguntaremos. Es difícil, lo reconozco, responder a esta pregunta. El autor no hace en ninguna parte alusión al fin que persigue al publicar esta obra, por lo tanto, quedamos sometidos a conjeturas. Es verdad que en un pasaje de la obra expone claramente que las lagunas que él notó en la geometría en uso, le obligaron a imaginar y hacer conocer al público esa nueva geometría; pero, sin duda, el autor no es sincero, y sí lo pretende, es con probabilidad para disimular mejor el verdadero fin de esa obra. Para comenzar, esto es contrario a lo que el propio autor ha dicho de su geometría, o sea, que no existe en la naturaleza, sino sólo en su imaginación, y que, de hecho, es absolutamente inaplicable a las medidas; en segundo lugar, eso es efectivamente contrarío a su contenido y nos veríamos más bien inclinados a pensar que la geometría* *nueva ha sido inventada para desmentirá la antigua, más bien que para completarla. Que se nos permita, por otra parte, referirnos brevemente al propio autor. ¿Cómo podemos creer que el señor Lobachevski, profesor titular de matemáticas, haya podido escribir, aunque sea para un fin tan poco serio, un libro que sólo habría aportado muy poca gloría al más humilde maestro parroquial? Todo profesor debe tener, sí no erudición, al menos buen sentido; ahora, no es raro que en la nueva geometría también esta última cualidad falte.*

*A despecho de todo eso, considero que el fin real perseguido por el señor Lobachevski al escribir y publicar su geometría, es simplemente una broma o, mejor dicho, una sátira contra los teóricos de las matemáticas o quizás contra los científicos contemporáneos en general. Por otra parte, estimo que no sólo es probable sino absolutamente cierto que la pasión insensata de escribir de una manera extraña e inteligible, muy marcada desde hace algún tiempo entre muchos de nuestros escritores, y el loco deseo de descubrir cosas nuevas, mientras apenas uno está lo suficiente dotado para comprender convenientemente las cosas viejas, son dos defectos que el autor tenía intención de exponer en su obra, lo que ha hecho de la mejor forma.*

*En primer lugar, la nueva geometría, como ya he dicho antes, está escrita de tal manera que aquellos que la leyeron casi no comprendieron nada. Deseoso de familiarizar a ustedes lo mejor posible con esa geometría, he concentrado toda mi atención fijándola en cada pasaje, cada palabra c incluso en cada letra,* *pero a pesar de todo no he logrado disipar las tinieblas que la rodean y apenas me siento en condiciones de decir de qué se trata, sin hablar de! contenido de los enunciados. Al principio, como es usual, el autor expone las principales nociones relativas al espacio y a las medidas espaciales. Naturalmente que dichas nociones se diferencian en absoluto de las nociones corrientes y se exponen de una manera particular.*

(...)

*Parece que después de haber dado algunas definiciones, formuladas con el mismo arte y la misma precisión que las precedentes, el autor dice algo sobre los triángulos, sobre la relación entre sus ángulos y sus lados, en lo que precisamente su geometría difiere, de manera esencial, de la nuestra; después propone una nueva teoría de las paralelas, la cual nadie, según él mismo, está en condiciones de probar sí existe efectivamente en la naturaleza; por último, el autor examina de qué forma en dicha geometría imaginaría se determinan las curvas, las áreas, las superficies oblicuas y los volúmenes de los cuerpos, y todo eso, repito, está escrito de tal forma que no se puede comprender nada.*

*En segundo lugar, al final de su libro el señor Lobachevski da dos integrales definidas que él ha descubierto de paso, al ir derecho a su fin, que es dar unas reglas generales para la medida de todas las magnitudes geométricas, no permitiéndose más que algunas aplicaciones. ¡Descubrimiento verdaderamente notable! Porque una de esas nuevas integrales se conoce desde* *hace mucho tiempo y puede encontrarse de una manera mucho más simple, y la otra es completamente falsa porque conduce al absurdo señalado con anterioridad.*

*(...)*

*¿Pero acaso no son del mismo género la mayoría de los descubrimientos famosos en nuestro país? ¿No sucede con frecuencia que se busque hacernos tomar lo viejo, bajo algún nuevo disfraz, por nuevo, o bien lo nuevo, pero falso, por un descubrimiento en extremo importante? Felicitamos al señor Lobachevski por encargarse de desenmascarar, de una parte, la imprudencia y el descaro de los falsos inventores y, por otra parte, la ignorancia ingenua de los admiradores de sus invenciones.*

*Pero apreciando la obra del señor Lobachevski en su justo valor, no me siento impedido a reprocharle, sin embargo, el hecho de que, absteniéndose de dar a su libro un título apropiado, nos haya obligado a reflexionar largo tiempo en vano. ¿Por qué, en lugar de "Acerca de los principios de geometría" no haber tomado por título "Sátira de la geometría", por ejemplo, o "Caricatura de ¡a geometría',' o alguna cosa de ese género? Entonces cada uno se hubiera dado cuenta de qué se trataba y el autor hubiera evitado muchos comentarios y juicios descorteses. ¡Feliz yo por haber podido captar el verdadero fin de ese libro, de otro modo sabe Dios lo que habría podido pensar tanto del libro como del autor! En el presente pienso, y hasta estoy seguro, de que el honorable autor me estará muy* *reconocido por haber mostrado el verdadero punto de vista bajo el cual conviene considerar su obra".*

*S. S.*

La crítica es verdaderamente brutal, podemos imaginarnos lo que supuso para Lobachevski tal ofensa. Inmediatamente el rector Lobachevski publicó una nota que decía:

*"El número 41 de la revista El hijo de la patria contiene una crítica muy ofensiva a mí respecto y, confió, absolutamente injusta. Su autor ha fundado sus conclusiones en el solo hecho de que no ha comprendido mi Teoría y la estima errónea porque en los ejemplos ha encontrado una integral absurda. Yo no encuentro tal integral en mi obra..."*

Tales críticas se expandieron como la pólvora e inmediatamente llegaron a oídos del entonces protector de la universidad, M. N. Musin-Pushkin, y del propio ministro de Instrucción Pública. El primero defendió a Lobachevski, al que tenía en gran estima, e inmediatamente envió una carta oficial a su ministro para que éste investigara un asunto tan desagradable.

La respuesta del ministro se produjo mediante la siguiente nota:

*"Después de tener conocimiento de la crítica a la geometría de Lobachevski, aparecida en la revista El hijo de la patria, en su número 41, reconozco por mi lado que, por supuesto, hubiera sido mejor que el autor de ese artículo se abstuviese de ciertas expresiones hirientes, aunque no he encontrado en ellas nada*

*que sea personalmente ofensivo para el autor, cuyo libro es objeto de un análisis crítico susceptible de desmentirse. He llamado la atención de la censura acerca de las expresiones antes mencionadas y he dado la orden, al editor de la revista, de publicar la respuesta a la crítica que someterá el autor de la geometría".*

A pesar de las recomendaciones del señor ministro la respuesta de Lobachevski nunca fue publicada en la citada revista. Claramente el autor de la citada crítica era una persona influyente; pero, ¿quién se escondía tras las iniciales S. S.?

## §. Polémica con Mikhail V. Ostrogradski

En 1832 (recordemos que Lobachevski era rector de la universidad) el Consejo de la Universidad de Kazán pidió a la Academia de Ciencias de San Petersburgo un informe sobre la memoria "Acerca de los principios de geometría". La Academia encargó el trabajo al académico Ostrogradski, quién después de estudiarla hizo una crítica verbal, en francés, que está recogida en el acta de la sesión de noviembre en los siguientes términos:

*"...después de haber estudiado una obra del rector Lobachevski, tengo que observar que: la obra está redactada con tan poco cuidado que una gran parte es ininteligible. Por eso estimo que dicha obra de Lobachevski no merece la menor atención de la Academia*

La respuesta verbal del académico Ostrogradski, también hacía referencia al cálculo de dos integrales que aparecían en la obra y que él consideraba que una de ellas ya era conocida años antes y la otra era falsa.

***Ostrogradski***

*Mikhail Vasilievich Ostrogradski (1801-1862) provenía de una familia aristocrática y rica, y se había formado en un ambiente social y político conservador.*

*Sus concepciones como matemático estuvieron muy influenciadas por la llamada escuela matemática francesa. Vivió un tiempo en París, entre 1822 y 1827, y allí asistió a las clases de eminentes profesores: Laplace, Fourier, Legendre, Poisson, Binet y Cauchy.*

*Hizo tan rápidos progresos que ya en esa época comenzó a publicar artículos. Es autor de un teorema sobre análisis y geometría que en Rusia lleva su nombre, pero que en Occidente es denominado teorema de Green, redescubierto (1846) por lord Kelvin y que también es conocido como teorema de Gauss. Era el matemático ruso de mayor prestigio en su* *época; sin embargo, ahora sabemos que Lobachevski es muy superior.*

El mismo Ostrogradski, con ánimo de aclarar mejor su postura redactó un informe que envió a la Academia con el objetivo de matizar sus apreciaciones verbales y de paso desprestigiar a Lobachevski. El informe, que se conserva en su totalidad, se compone de un escrito muy escueto y de unos apéndices que contienen algunas puntualizaciones acerca de su escrito:

> *La Academia me ha encargado examinar una obra de geometría del señor Lobachevski, rector de la Universidad de Kazán, y dar mi opinión verbal sobre ella.*
>
> *Me parece que si el autor se ha propuesto la tarea de escribir de una manera incomprensible, ha logrado su fin. La mayor parte de su libro me ha sido tan ininteligible como si yo no lo hubiera visto jamás. Sólo he comprendido de él lo que sigue:*
>
> *Podemos admitir que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos. La geometría que resulta de esta hipótesis es más difícil y extensa que la que nosotros conocemos, y quizás de una gran utilidad en el análisis puro y, sobre todo, en la teoría de las integrales definidas, porque ya ella ha permitido encontrar el valor de dos integrales definidas que nadie todavía había obtenido y que por otros medios sería difícil obtener.*

*Sobre lo que acabo de leer creo que mi deber es comunicar a la Academia las observaciones siguientes:*

***1)*** *De las dos integrales definidas que el señor Lobachevski cree haber encontrado, una ya es conocida. Podemos deducirla de los principios más elementales del cálculo integral. El valor de la otra, es verdaderamente nuevo, ha sido hallado por el señor rector de la Universidad de Kazán y desgraciadamente es falso.*

***2)*** *Todo lo que no he comprendido de la geometría de Lobachevski está por debajo de lo mediocre.*

***3)*** *Todo lo que no he comprendido está, por lo visto, mal redactado y, por esa razón, es difícil de comprender.*

*De esto he sacado la conclusión de que el libro del señor rector Lobachevski contiene errores, está redactado sin cuidado y, por consiguiente, no merece la atención de la Academia*

Como es fácil observar, las declaraciones de Ostrogradski inciden en la misma línea que el escrito firmado por el enigmático personaje S. S.

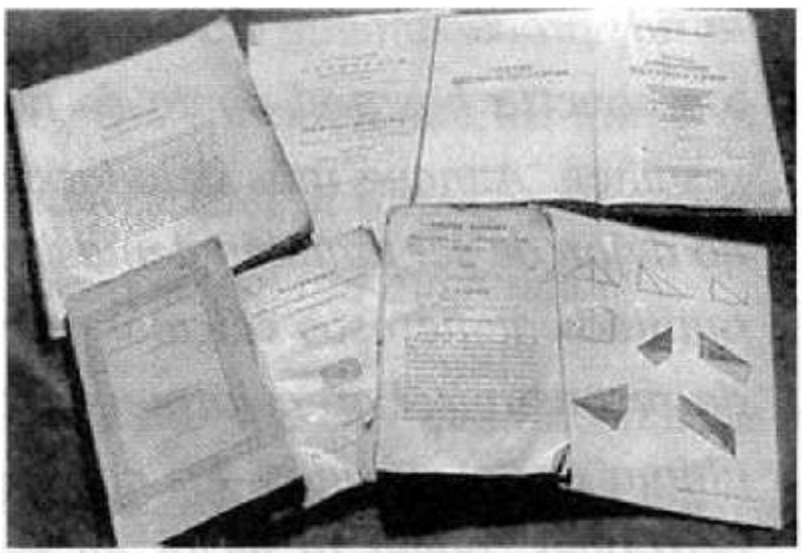
**§. Comentarios sobre las críticas de Ostrogradski**

Si leemos con atención el escrito de Ostrogradski, quizás los puntos más importantes son las menciones que hace del cálculo de dos integrales y de la dificultad para poder seguir el trabajo de Lobachevski.

La primera de las integrales es la siguiente:

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x})x dx}{e^{2x} + (e^{2a} + e^{-2a}) + e^{-2x}} = \frac{\pi a}{2(e^a - e^{-a})}$$

Es claro que se puede calcular empleando métodos elementales, como comprobará el lector; sin embargo, Lobachevski tiene interés en calcularla por medio de procedimientos derivados de su geometría imaginaria. El comprobar que por el nuevo procedimiento se obtenía un resultado ya conocido le daba garantías sobre la exactitud lógica de su geometría.



*Algunos de los trabajos de Lobachevski*

Ostrogradski también hace referencia a la mala redacción del documento. En efecto, la redacción de "Acerca de los principios de geometría" es muy concisa, sin apenas demostraciones y con cálculos complicados. La impresión que da es la de un resumen redactado de manera muy esquemática y con poco cuidado. El profesor A. P. Kotélnikov, cuando preparó el primer tomo de las *Obras completas de Lobachevski*, comentó:

> *"Cualquiera que aborde por vez primera la geometría imaginaria en la memoria de Lobachevski, choca con dificultades inauditas y sin duda insuperables. La disposición de los materiales en la exposición de las principales nociones geométricas, la manera tan original de presentar e! problema de la teoría de las paralelas, así como la obtención de nuevos resultados no encajan con las representaciones geométricas usuales; la necesidad de imaginar figuras geométricas totalmente nuevas, superfluas, y hasta falsas desde el punto de vista de la geometría euclidiana, dificulta de manera singular la comprensión de la geometría imaginaria. Pero, además de esas dificultades, que tienen sus raíces en el propio asunto, Lobachevski crea nuevas. La primera parte de su memoria "Acerca de los principios de geometría", que precisamente encierra las consideraciones más importantes para la comprensión de su geometría imaginaria, prácticamente no contiene ninguna demostración y es tan concisa hasta el punto de no constituir más que un breve resumen. Aunque más detalladas, la segunda y tercera partes no dejan de ser también demasiado concisas. Además han sido omitidos numerosos cálculos intermediarios, bastante difíciles de reconstruir. Particularmente son difíciles los cálculos de la última parte; además, los cambios de notaciones pueden, en ocasiones, poner al lector en estado de desespero, a lo que todavía debemos*

*agregar que el texto publicado por El mensajero de Kazán contenía numerosas erratas de impresión que hacían la lectura aún más dificultosa”.*

Lobachevski había hecho un gran esfuerzo en la creación de una nueva geometría, pero él mismo era consciente de que sus ideas no estaban bien explicadas y dice a propósito:

*“Dentro de ¡os ¡imites estrechos de una publicación periódica yo no podía exponer mi teoría detalladamente. Muchas de las proposiciones dadas sin demostración, la presencia de cálculos bastante largos y complicados, de los cuales yo no doy los resultados, me obligan a sospechar que mí obra, que parece, a primera vista, oscura, no invitaba a leerla y ocuparse de ella con atención, y hasta podía hacer dudar del rigor de los razonamientos y de la exactitud de las conclusiones a las cuales había llegado".*

En 1834, Lobachevski (siendo ya rector) promovió una revista denominada *Memorias de la Universidad de Kazán* y al año siguiente publicó en ella una memoria titulada "Geometría imaginaria” (en realidad la memoria había sido escrita en francés para ser publicada en la revista de Crelle). En 1836 publicó su continuación bajo el título "Aplicación de la geometría imaginaria a algunas integrales”.

En realidad estas memorias no aportaban nada nuevo a sus trabajos anteriores pero, al disponer de más espacio, Lobachevski explica mejor los procesos y sus cálculos son más entendibles. Cabe señalar algunos aspectos de las citadas memorias:

1. *La geometría imaginaria abarca la geometría usual como un caso particular al cual se pasa considerando las líneas infinitamente pequeñas, de manera que, al respecto, la geometría usual puede calificarse como geometría diferencial.*
2. *En la teoría no ocurre nada por suponer que la suma de los ángulos de un triángulo rectilíneo sea considerada inferior a dos ángulos rectos.*
3. *La suposición acerca de que la suma de los ángulos de un triángulo es inferior a dos ángulos rectos sólo puede admitirse con respecto a los métodos analíticos, ya que, según las mediciones efectuadas en la naturaleza, esa suma nunca se diferencia, en lo más mínimo, de la mitad de la circunferencia.*

La segunda de las memorias finaliza con una tabla de 50 fórmulas para realizar cálculos integrales, una de ellas (la 36) es especialmente importante, nos referimos a

$$\int_0^x l\,n\,(\cos x)\,dx$$

Lobachevski dedica un esfuerzo especial al estudio de dicha integral, obteniendo importantes propiedades. En efecto, si llamamos

$$L(x) = -\int_0^x l\,n\,(\cos x)\,dx$$

entonces la función *L*(x) puede ser representada mediante series de la siguiente manera

$$L(x) = x\,l\,n\,2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\operatorname{sen}(2kx)}{k^2}$$

Además se verifican las relaciones

$$L(x) = - L(x)$$

$$L(\pi - x) = \pi\, l\, n\ 2 - L(x)$$

$$L(\pi + x) = \pi\, l\, n\ 2 + L(x)$$

para los valores $-\pi/2 < x < \pi/2$

Pero lo que es preciso resaltar es que si bien Lobachevski, dentro de su geometría, no confirma la demostración objetiva de la falta de contradicciones sí lo hace desde un punto de vista subjetivo. La acumulación de resultados ya conocidos, obtenidos por los procedimientos derivados de su geometría imaginaria, así lo confirman.

# Capítulo 9

## Rector de la Universidad de Kazán

*"Siempre que ensenes, enseña a la vez a dudar de lo que enseñas".*
*José Ortega y Gasset*

Tras la destitución de Magnitski, fue nombrado protector docente de la provincia de Kazán el conde M. N. Musin-Pushkin. Con ánimo de impulsar y renovar la vida universitaria, el nuevo protector convocó elecciones a rector. Lobachevski, a instancia de sus compañeros profesores, presentó su candidatura, y en la sesión del 3 de mayo de 1827, después de una votación muy favorable para él, fue elegido rector. Tenía sólo 33 años y la tarea que se le avecinaba era compleja, pero le sobraban energías para afrontarla.

Por delante tenía grandes retos: mejorar los edificios de la universidad, levantar nuevas construcciones, ordenar y proveer la biblioteca, acondicionar los distintos laboratorios, comprar materiales para el observatorio, erigir una nueva clínica, contratar más y mejores profesores y, sobre todo, crear un mejor ambiente universitario.

La primera tarea que afrontó en el cargo fue rebajar la tensión que existía entre los profesores. Las reuniones del Consejo que antes eran ruidosas y poco planificadas, pasaron a desarrollarse con normalidad y dentro de un clima de absoluta tranquilidad. También se preocupó por mejorar la vida universitaria de los estudiantes.

Éstos participaron en los estamentos universitarios y su voz tuvo eco.

En realidad el trabajo administrativo de Lobachevski había comenzado mucho antes de ocupar el cargo de rector. Como ya sabemos, ejerció como decano de su facultad durante casi siete años; además había participado, años antes, en distintas comisiones: de la biblioteca, de redacción de trabajos, de los estudios, de construcción de edificios, etc.

Ocupando la plaza de rector siguió ocupándose de la biblioteca y se planteó como objetivo primordial el ordenar y clasificar la enorme cantidad de materiales escritos y convertirlos en una verdadera biblioteca. Los libros estaban en algunos casos apilados, en otros aún no habían sido desembalados de las cajas. La mezcla y el desorden de los manuales era tan evidente que la biblioteca prácticamente no era consultada y era, por tanto, inservible. Como rector logró obtener importantes ayudas económicas destinadas a enriquecer y mejorar los fondos bibliográficos.

La biblioteca no era el único establecimiento donde reinaba el desorden. Había una dejadez en el mantenimiento de edificios, incluso los establecimientos escolares dejaban mucho que desear. Era imprescindible construir más y mejores edificios en el recinto universitario y durante un tiempo estuvo reuniendo fondos para mejorar el recinto universitario.

Otro episodio en la vida de Lobachevski nos muestra que no sólo las matemáticas era su foco de atención. El 1830 se propagó una terrible epidemia de cólera por buena parte de Rusia y, en particular, por la ciudad de Kazán. Numerosas familias ricas abandonaron la ciudad, el terror se apoderó de las calles y la situación se convirtió en desesperada.

El cólera era aún una enfermedad de origen desconocido entonces, aunque los más preparados sospechaban ya que la falta de higiene tenía mucha más intervención en el brote y propagación de la enfermedad que lo que pudiera tener la ira de dios. Cuando el cólera invadió Kazán, los sacerdotes reunieron en las iglesias a los fieles para pedirles que unieran sus súplicas; pero, sin embargo el cólera no cesaba.

Dándose cuenta de que la situación de la ciudad era muy preocupante, Lobachevski pidió a sus compañeros que trajeran a sus familias a la universidad y luego solicitó, o mejor dicho, ordenó, a algunos de sus estudiantes que se unieran a él en una lucha humana y racional contra el cólera. Las ventanas se cerraron herméticamente, se impusieron estrictas medidas sanitarias, y tan sólo se concedieron las salidas necesarias para obtener alimentos. De los 660 hombres, mujeres y niños así protegidos sólo murieron 16, una mortalidad inferior al 2,5 %. Es de señalar que no falleció ningún estudiante.

Para Lobachevski, la universidad era su vida, allí tenía todo. Su fama y su prestigio era enorme entre sus compañeros, la mayoría le respetaban. El protector del distrito docente también le tenía en alta estima.

*Litografía de la catedral de San Pedro y San Pablo de Kazán pintada por E. P. Turnerelli en 1839.*

Un año después de tomar posesión como rector, pronunció un discurso en la sesión solemne de clausura del curso académico (el 5 de julio de 1828). El discurso supuso una gran conmoción por su frescura de ideas, independencia, y progresismo. Fue publicado en 1832 en el *Noticiero de Kazán* con el título “Sobre las materias de la educación social”.

Lobachevski, con 35 años entonces, comparte sinceramente con los oyentes la sensación con la que recibió su elección como rector:

*...todo aquello que hay que desear por fin está alcanzado.*

Y seguidamente formula la pregunta fundamental para él:

*...¿verdaderamente realizábamos todo lo que de nosotros se exigía?*

Soñaba con educar también a sus alumnos, a los estudiantes de universidad, en la exigencia sobre sí mismos para que procuraran llegar a ser

*mediante sus conocimientos superiores el honor y la gloría de su patria.*

Más adelante se plantea las cuestiones que debe estudiar una persona para ser digna de su alta predestinación de ser el rey de la naturaleza.

*¿Qué aptitudes tienen que ser descubiertas y perfeccionadas, qué cambios tiene que haber, lo que habría que añadir o quitar, como excesivamente perjudicial?*

Sigue diciendo Lobachevski:

*Mi opinión es la siguiente: no destruir nada y perfeccionar todo. ¿Es posible que los dones de ¡a naturaleza sean inútiles?... Lo más corriente es escuchar lamentaciones por las pasiones, pero, como dijo con razón Mably.*

[Gabriel Bonnot de Mably (1709-1785), pensador político francés],

*...cuanto más fuertes sean las pasiones, tanto más útiles son en ¡a sociedad, sólo su dirección puede ser perjudicial...*

*Dirijámonos, en primer lugar, a la capacidad principal, a la inteligencia, por la que pretenden diferenciar al ser humano de los demás animales, anteponiendo en los últimos el instinto. No soy de la opinión de que el ser humano esté privado de instinto, el cual se manifiesta en muchas acciones de la mente y el cual en unión con la mente compone al Genio. Sólo mencionaré de paso que el instinto no se adquiere; el que no haya nacido [con dotes necesarias, instintos,....] no puede ser Genio. En esto mismo consiste el arte de los educadores: descubrir al Genio, enriquecerlo con conocimientos y darle la libertad para seguir sus sugerencias.*

*(...)*

*Hay que confesar que no tanto a nuestra mente, sino que al don de la palabra debemos toda nuestra superioridad ante los demás anímales... A ellos les está prohibido transmitirse conceptos. Pero al ser humano se le ofrece esta posibilidad; él es el único en la tierra que utiliza este don; sólo a él le está mandado estudiar, perfeccionar su inteligencia, buscar la verdad uniendo fuerzas. Las palabras como los rayos de su inteligencia transmiten y divulgan la luz del saber. El lenguaje del pueblo es el testimonio de su cultura, es la auténtica demostración de su grado de ilustración.*

*Me pregunto ¿a qué se deben los éxitos brillantes las ciencias matemáticas y físicas en los últimos tiempos, que son la gloría de nuestros siglos, el triunfo de la mente humana? Sin lugar a dudas a su lenguaje artificial, de otra forma ¿cómo no llamar* *todos estos signos de diversos cálculos un lenguaje, que es singular y bastante conciso, el cual, sin cansar en vano nuestra atención, mediante un trazo expresa conceptos generales... Todavía desde los tiempos no tan remotos utilizamos estos medios. Nos los indicó el famoso Bacon. Dejad, decía él, de trabajar en vano, intentando extraer de la razón sola toda la sabiduría; preguntad a la naturaleza, ella guarda todas las verdades y a todas vuestras preguntas os contestará al momento y satisfactoriamente. Por fin el Genio de Descartes trajo ese cambio feliz y, gracias a sus dones vivimos ya en unos tiempos en que la sombra de la escolástica antigua apenas anda por las universidades. Aquí, habiendo entrado en este centro, la juventud ya no escuchará palabras vacías sin ninguna idea, sonidos sin ningún significado. Aquí enseñan lo que en realidad existe y no aquello que ha sido inventado por una mente ociosa.*

*Las últimas palabras de esta cita atestiguan con toda evidencia que Lobachevski era partidario de los puntos de vista materialistas sobre la naturaleza del saber humano. En sus trabajos científicos se oponía con ardor a las afirmaciones de Kant sobre ¡os conocimientos a priori que el ser humano recibe antes de nacer. Según Kant son asilas representaciones geométricas, pero Lobachevski afirmaba que sólo la experiencia puede confirmar la veracidad de una suposición científica: ...los conceptos se adquieren por los sentidos, sin embargo, no se debe creer a los conceptos innatos.*

Pero volvamos otra vez al discurso de Lobachevski.

> *...nada estorba tanto a la plenitud de la vida como la ignorancia que acompaña a la vida de la cuna a la tumba por un camino recto y mortal. Aún los trabajos agotadores de necesidad, alternándose con el descanso, dulcifican la vida de un labrador o de un artesano; pero vosotros, cuya existencia la casualidad injusta convirtió en una carga para los demás; vosotros, cuya mente se ha entorpecido y el sentimiento se ha extinguido; no disfrutáis de la vida. Para vosotros la naturaleza está muerta, os son extrañas la belleza de la poesía, la arquitectura está privada de encanto y esplendor, y no os entretiene la historia de los siglos. Me tranquilizo con la idea de que de nuestra universidad no saldrán semejantes productos del mundo vegetal: incluso no entrarán aquí, sí, por desgracia, hubieran nacido ya con tales fines. No saldrán, repito, porque aquí continua el amor a la gloría, el sentido del honor y de la dignidad interior.*
>
> *(…)*
>
> *Vivir es sentir, gustar la vida, ensayar constantemente algo nuevo que recuerde que vivimos.*
>
> *La educación no debe ahogar la personalidad, ella debe cultivar todas las facultades espirituales, todas las pasiones, todos los dones, ...porque nada es más miserable que la apatía, la ausencia de imaginación y de amor a lo bello. Es necesario*

*cultivar en el hombre la aspiración a la gloria, sin temer a la ambición que suscita.*

Finalizando su discurso, el Rector se dirigió de esta forma a los graduados universitarios:

*¿Qué os diré como más instructivo!' Habiendo nacido más tarde sois más felices que yo. Estudiando la historia de los pueblos habéis visto que cualquier estado atraviesa la edad infantil, la edad adulta y la vejez. Lo mismo pasará a nuestra querida patria. Guardada por el destino, se erige lentamente en su grandeza... pero los días más felices de Rusia están aún por llegar. Hemos visto el alba, su predecesora, en el oriente; tras de ella ha aparecido el Sol. Con esto he dicho todo".*

No hay necesidad de decir que Lobachevski creía que Rusia era un país que acababa de entrar en la edad adulta y que todavía estaba lejos de la vejez.

La tarea pedagógica de Lobachevski era enorme, para dar una idea sobre la extensión del distrito de enseñanza de Kazán, vamos a enumerar solamente los nombres de las provincias que lo componían: Astrakán, Viatka, Ekaterinburgo, Kazán, Nizhni Novgorod, Orenburgo, Samara, Saratov, Simbirsk y Perm. Esto es casi la mitad de la parte europea de Rusia, poblada por numerosos pueblos: rusos, tártaros, bashkirios, kalmukos y chuvashios, entre otros. Además, durante el reinado de Catalina II, grandes extensiones de las provincias de Saratov y del territorio de

Orenburgo fueron entregadas para ser pobladas por alemanes. Todas estas circunstancias inducían a la Universidad de Kazán a prestar una atención especial a la enseñanza de las lenguas, no sólo a las europeas (el francés y el alemán), sino también a las orientales.

El inmenso mosaico de singularidades nacionales de la población y la aspiración de la Universidad de Kazán a tener en cuenta estas distinciones de alguna forma, no podía dejar de reflejarse en la amplitud de los intereses pedagógicos de Lobachevski. Durante esa época, reflexionó detenidamente sobre tema de enseñanza en general.

Observemos que en el primer cuarto del siglo XIX, Rusia no tenía ni programas escolares unificados, ni textos estables, ni manuales metodológicos bien elaborados. Los profesores actuaban según su propio criterio, recomendaban a los alumnos guías ocasionales, las más de las veces dictaban a los alumnos unas reglas y les obligaban a memorizarlas. Los resultados de tal enseñanza eran poco satisfactorios. Lobachevski, ya en el primer año de dirección de la universidad creó una comisión para la elaboración de los programas de ingreso en la misma. Esta experiencia fue tan acertada que, en 1830, el Ministerio de Educación encargó a la Universidad de Kazán la elaboración de los programas de enseñanza en todos los institutos y escuelas de su departamento. Tales programas fueron elaborados para todas las materias escolares y fueron dotados de recomendaciones metodológicas para los profesores.

De la labor pedagógica de Lobachevski como rector es característico un extenso documento titulado: “Normas para los profesores de matemáticas en los liceos [institutos]...”, fechado en 1830.

Está compuesto por cuatro apartados:

1. Método de enseñanza
2. Materias de enseñanza
3. Distribución por grupo
4. Manuales de enseñanza.

Los contenidos expuestos en las “Normas...” están pensados para la instrucción de siete cursos, son bastante amplios y contienen aritmética, geometría (secciones cónicas incluidas) y trigonometría (plana y esférica)

Algunos párrafos del citado documento expresan de manera inequívoca su manera de pensar. Referentes a la totalidad del curso:

> *"Para los conceptos abstractos y generales sobre las magnitudes y también para las operaciones que deben unirlas entre sí, se han inventado los signos. De la misma forma que el don de palabra nos enriquece con las opiniones de los demás, el lenguaje matemático de los signos sirve como un medio aún más perfecto, más preciso, breve y claro, para que uno transmita al otro los conceptos que ha adquirido, la verdad que él ha alcanzado, y la dependencia entre las magnitudes que ha descubierto. Pero de la misma forma que una opinión puede resultar falsa dependiendo de que las palabras se interpreten de otro modo, cualquier razonamiento en matemática se detiene*

*tan pronto como dejemos de suponer bajo los signos aquello que ellos representan. Por eso es necesario que el maestro con la utilización de los signos defina conceptos perfectamente determinados y rigurosos; finalmente, no estando satisfecho con esto, adjunte ejemplos que clarifiquen las reglas*
*y prevengan su utilización mecánica... Lo dicho hasta ahora ya sería suficiente para ver cómo tema que ser el modo de enseñar... pero al principio se encuentran dificultades singulares, las cuales habría que alcanzar y saber vencer. La cuestión consiste en que nuestra mente debe primero pasar de los objetos, que actúan directamente sobre los sentimientos, a los números y finalmente los propios números representar bajo el significado general mediante letras".*

A partir de 1833, coincidiendo con su tercera reelección, Lobachevski tuvo que enfrentarse a unos nuevos estatutos que eran de obligado cumplimiento para todas las universidades rusas. En efecto, en 1835 fueron revocados los antiguos estatutos universitarios, que habían sido establecidos en 1804 por el zar Alejandro I, instaurándose un nuevo modo de vida universitaria. La reforma fue impulsada por el ministro S. S. Uvárov, aplicando la política conservadora del zar Nicolás I.

Con la nueva normativa se redujo de manera notable la autonomía universitaria, y la figura del rector pasó a ocupar más poder en algunas parcelas mientras que en otras su influencia era prácticamente nula. Esta reforma incidía especialmente en dos aspectos:

*"En primer lugar, imprimir a la enseñanza dispensada por las universidades una forma racional, elevarla a un nivel accesible mediante trabajos de larga duración y levantar una barrera razonable ante una juventud inmadura y deseosa de asumir prematuramente funciones administrativas; en segundo lugar, atraer a las universidades a los hijos de las clases más altas del imperio y poner fin a su educación defectuosa en manos de extranjeros*

*S. S. Uvárov*

En 1837, la Universidad de Kazán comenzó a funcionar de acuerdo a los nuevos estatutos. Ese año coincidió con la cuarta reelección de Lobachevski.

En este nuevo periodo como rector afrontó, además, varios proyectos, alguno de los cuales ya habían sido iniciados en periodos anteriores. Destaquemos los siguientes: construcción de nuevos y mejores edificios universitarios, una clínica, un anfiteatro anatómico, una nueva biblioteca, una moderna imprenta, un gabinete de física, un renovado laboratorio de química, un nuevo observatorio astronómico, etc.

Cabe señalar el empeño que puso Lobachevski en la construcción de los edificios, si bien el diseño de los mismos se debió al ilustre arquitecto Korinsfski. La ayuda que prestó el rector fue crucial, además de ser el jefe de la comisión de construcción de edificios universitarios. Quizás lo más reseñable es que fue capaz de ahorrar unos 50.000 rublos del dinero presupuestado inicialmente. Incluso se cuenta que Lobachevski estudió en profundidad aspectos relacionados con la arquitectura y la proyección de edificios, con el objetivo de servir de ayuda al arquitecto Korinsfski.

En 1842 se dieron por finalizadas las obras, pero sucedió una imprevista y enorme tragedia. El día 24 de agosto de ese mismo año se produjo un incendio en una de las casas de Kazán, y el fuego se propagó de manera incontrolada y muy rápida por toda la ciudad, no olvidemos que muchas de las casas eran de madera. El pavoroso incendio, que destruyó más de 1500 edificios, también se propagó por el recinto universitario. Residencias tan emblemáticas como el observatorio astronómico fueron pasto de las llamas. El fuego llegó a rodear al edificio de la biblioteca universitaria, tan querido por Lobachevski. Para controlar el pavoroso incendio, el rector movilizó a muchos alumnos y profesores de la universidad, lo que permitió el traslado de la mayoría de los libros y escritos a un lugar más seguro, salvándose así tan preciado material.

Pero, no sólo se preocupó por construir más y mejores edificios; sus ansias por mejorar la universidad, en su conjunto, le llevaron a la fundación de un medio de comunicación científico, las

“Memorias de la Universidad de Kazán”; este era un proyecto que Lobachevski tenía en la cabeza desde hacía años y que al fin pudo concretar en 1834.

Las “Memorias...” desempeñaron un papel primordial en la difusión de las obras de Lobachevski. De hecho, al año siguiente de su fundación, en 1835, apareció la primera entrega de la memoria "Geometría imaginaria".

En el periodo que Lobachevski fue rector, también se organizó la sección de lenguas orientales. Es evidente que, debido a la situación geográfica de Kazán, la creación de esta sección era urgente. Es de señalar que uno de los candidatos a estudiar más ilustres sería el literato León Tolstoi, que tras fracasar en los exámenes de ingreso de 1844 decidió matricularse, al año siguiente, en la Facultad de Derecho.

En el dilatado periodo como rector de la Universidad, Lobachevski tuvo muchos reconocimientos. En 1833 fue nombrado consejero del Estado y condecorado con la Orden de San Estanislao (de tercera clase), en 1836 condecorado con la Orden de Santa Ana (de segunda clase), y en 1838, debido a su buen hacer, se le otorgó un título nobiliario acompañado de un escudo de armas y de una pensión económica de por vida. Por último, en 1844 le fue impuesta la Orden de San Estanislao (de primera clase).

## §. El método pedagógico de Lobachevski

La labor pedagógica de Lobachevski en la Universidad de Kazán duró 35 años. Durante este período llegó a impartir prácticamente todos los cursos de contenido matemático y otras asignaturas como mecánica, astronomía e incluso física. No había año en que no impartiera al menos dos o tres cursos diferentes, que eran claros y seguidos con mucha atención por sus alumnos.

*Orden de San Estanislao concedida a N. I. Lobachevski.*

***Tolstoi***

*León Tolstoi (1828-1910) nació en Yasnaia Polaina, hijo de un terrateniente. A los nueve años quedó huérfano y su educación quedó en manos de tutores franceses y alemanes. A los 16 años ingresó en la Universidad de Kazán, aunque, muy influenciado por las ideas del filósofo francés Jean-Jacques Rousseau, la abandonó en 1851 Retrato de Tolstoi pintasen terminar sus estudios, decidiendo incorporarse al ejército ruso. Allí estuvo en contacto con los cosacos, que se convertirían en los protagonistas de una de sus mejores novelas cortas Los cosacos (1863), anteriormente había escrito una trilogía autobiográfica, Infancia (1852), Adolescencia (1854) y Juventud (1856), y una obra sobre la guerra de Crimea, llamada Sebastopol (1855-1856).*

*Después de viajar por varios países, se sintió atraído por la educación de las familias campesinas y fundó en su ciudad natal una escuela para niños campesinos en la que aplicó sus métodos educativos de carácter progresista. Los últimos años de vida los dedicó a escribir. De su pluma salieron dos obras claves: Guerra y paz (1863-1869) y Ana Karenina (1873-1877).*

*L. Tolstoi fue un pensador comprometido con su tiempo y uno de los más eminentes novelistas de todos los tiempos. En sus obras están reflejados sus principios: amor hacia los seres humanos y resistencia contra las injusticias.*

Como profesor, Lobachevski, en opinión de la mayoría de sus alumnos, era excelente. Sus clases, conferencias y exposiciones las podía seguir cualquier persona con una mínima preparación. Uno de los mejores alumnos suyos dice al respecto:

> *"En el aula, el profesor Lobachevski, sabía mostrarse como una persona fascinante o como un gran pensador, según la materia de que se tratase. Generalmente no hablaba como escribía. Mientras que sus obras se distinguen por un lenguaje conciso y*

*no siempre claro, en el aula ponía todo el cuidado en expresarse con la mayor claridad posible, resolviendo primero los problemas particulares por el método sintético, y pasando después a la demostración de las proposiciones generales por el método analítico. No se preocupaba demasiado de los mecanismos de cálculo, sino que prestaba la máxima atención a la precisión de los conceptos. En la pizarra dibujaba sin prisa, hacía las cosas con esmero y cariño, además con una cierta elegancia".*

*A. F. Popov*

Actualmente se sabe mucho de su manera de enseñar. Por ejemplo en “Colección de notas de la enseñanza de la matemática pura” -así se titulan las interesantes notas de Lobachevski que se han conservado en los archivos, fechadas en los cursos escolares de 1822 a 1826- podemos encontrar anotaciones de sus clases correspondientes a los cursos 1822-1823 y 1824-1825. La “Colección...” está dividida en tres partes: método de enseñanza, plan de enseñanza y asignaturas de enseñanza.

***Colección de notas de la enseñanza de la matemática pura***

*La primera parte de estos textos empieza con las palabras: "El mejor método para enseñar las matemáticos es, sin duda, el método analítico, precisamente adoptado en la Universidad de Kazán, a excepción de las partes donde el mismo es* *inaplicable, por ejemplo, en el caso de los principios de geometría. En la universidad no podríamos aplicar otro método, puesto que aquí se dicta un curso completo de matemáticas; en tanto que la síntesis, como primera invención, la cual después fue reemplazada por el análisis a causa de su superioridad, permanece en su estado primitivo. El método analítico consiste en expresar 1as relaciones entre las magnitudes por medio de ecuaciones. Sus ventajas son: igual modo de abordar la solución de cualquier tipo de problema, generalidad: además, la principal ventaja consiste en que las ecuaciones que expresan las relaciones entre las magnitudes contienen todo lo necesario para la solución del problema, excluyen la necesidad de examinar las propiedades de dichas magnitudes y someten la referida solución a operaciones algebraicas, siempre parecidas, directas, breves y las cuales conducen a soluciones completas. El inconveniente del análisis consiste en la difícil comprensión que proviene de la generalidad y la abstracción: por último, el análisis también tiene el inconveniente de representar las magnitudes en forma de números de manera que sí por tales magnitudes entendemos cosas, el tiempo o las fuerzas de la naturaleza, sus resultados deben ser interpretados, es decir, los números otra vez deben transformarse en magnitudes reales, lo que presenta a veces grandes dificultades y puede conducir a errores.*

*Como ejemplo de esto último puede servir la discusión entre*

*D'Alembert, por una parte, y Euler y Lagrange, por otra, sobre la continuidad de curvatura de las cuerdas vibrantes. La síntesis, que está lejos de tener las ventajas del análisis, tampoco tiene los inconvenientes de éste: es clara, concreta y mucho más convincente para los principiantes. A despecho de esto, incluso en los principios es necesario utilizar el análisis tanto con objeto de conservar la uniformidad de la enseñanza, como a fin de que los propios principios de las matemáticas sirvan de preparación al pasar a sus partes superiores. Para combinar aquellas ventajas del análisis con las de la síntesis, es necesario, a través de varios casos particulares, pasar a casos generales y enriquecer la enseñanza con ejemplos. Eso se ha convertido en una regla en el Gymnasium [instituto de secundaría].*

*Entre tanto, hay partes de la matemática donde la síntesis es necesaria como único método llamado a conducir esa ciencia hasta cierto límite, después del cual, y no antes, la misma puede someterse por completo al análisis. Tales son la geometría y la mecánica. La enseñanza sistemática exige que tales partes de la matemática estén separadas por una línea evidente, con el fin de mostrar lo que cada una contiene distinto y dónde comienzan sus fuentes. Por otra parte, los principios de geometría resultarían demasiado breves, separados (por un gran intervalo) del análisis, donde por primera vez hallaríamos su aplicación, además, de una forma muy amplía. Por consiguiente, encuentro útil y natural dividir* *el curso de matemáticas puras en dos partes: la primera, preparatoria, aprendida en el Gymnasium, la otra, completa, enseñada en la universidad. La primera comprende los principios de álgebra; la síntesis de geometría, la aplicación del análisis a la geometría, con diversos casos particulares y ejemplos extraídos de la vida diaria, a fin de obtener una doble ventaja. El curso universitario parte también de los principios matemáticos, pero considerándolos desde otro punto de vista; abarcándolos en toda su amplitud, separando la síntesis del análisis y exponiendo sistemáticamente las operaciones del análisis en su orden natural y a medida que se hacen más artificiales y generales. Merece recordar de vez en cuando la sencillez y facilidad de la síntesis. La integración de las ecuaciones, donde el contenido de los cuadrados de las diferenciales de dos variables es igual al de sus senos, se encuentra con mucha facilidad a partir de un triángulo esférico; por el contrarío, fue necesaria la ingeniosidad de Euler y Lagrange para solucionar ese problema partiendo solamente del análisis. La síntesis siempre ocultará numerosas fuentes para los matemáticos, pero su descubrimiento y su uso es privilegio sólo de los genios. La enseñanza no debe sacar conocimientos de tales fuentes. Lo aquí expuesto es suficiente, pienso, para juzgar acerca del espíritu)' el método de mí enseñanza. En cuanto a los conceptos que deben constituir la base de las partes de las matemáticas puras, me reservo el cuidado de hablar de ello en* *el artículo de geometría"-*

Además de los textos de las materias matemáticas, se explican previamente las particularidades de la asignatura, se ofrecen comentarios a los programas y algunas indicaciones metodológicas.

En esta "Colección.." se ven claramente las materias que se impartían en la Universidad de Kazán, qué criterios metodológicos seguía Lobachevski y qué debían aprender en primer lugar los estudiantes.

El método expuesto por Lobachevski no es únicamente un compendio de reflexiones de carácter teórico, él mismo hace referencia a cómo se deben enseñar las diversas materias. Transcribimos algunos párrafos que han tenido mucha importancia para entender en profundidad el pensamiento matemático de Lobachevski:

> *"Toda la matemática es la ciencia de las medidas, todo lo que existe en la naturaleza obedece a la condición necesaria de ser medido".*

Esta idea métrica de las matemáticas es aplicada por Lobachevski en muchos contextos. Por ejemplo cuando describe qué debe entenderse por longitud de una curva, dice:

*"La longitud de una curva es la suma de segmentos rectos que la constituyen, a condición de que dicha suma exprese tanto más exactamente la longitud de la curva cuando menores sean los referidos segmentos".*

Lobachevski era también un consumado analista, conocía en profundidad las obras de los grandes matemáticos y no es casualidad que dedicara muchos esfuerzos a definir el concepto de función.

***Puntos de vista filosóficos***

*Interés indudable tienen también los puntos de vista filosóficos generales de Lobachevski. Para él las fuentes de nuestros conocimientos están en los fenómenos y en las manifestaciones del mundo que nos rodea, los conceptos científicos son abstracciones de los resultados de numerosas observaciones.*

*"Es indiscutible que debemos a los sentidos todos nuestros conceptos sobre los cuerpos. Se confirma la certeza de esto también porque nuestro juicio se detiene allí, donde nos dejan de dirigir nuestros sentidos, y que apartamos de los cuerpos también aquellos conceptos, a los cuales nos inclinan los conocimientos... Un ejemplo de esto son las rectas, las curvas y las superficies, que no existen en los cuerpos de la naturaleza... De aquí hay que sacar la conclusión de que en los fundamentos de las ciencias matemáticas pueden ser admitidos todos los conceptos, cualesquiera que sean, adquiridos de la naturaleza, y que la matemática, basándose en estas cosas puede llamarse con toda justicia ciencia exacta... Nosotros conocemos en la naturaleza solamente los cuerpos, por consiguiente, los conceptos sobre las curvas y*

*sobre las superficies son conceptos derivados y no adquiridos... ”*

*Este párrafo es de una gran importancia para la historia y la filosofía de la matemática. Se puede entender su posicionamiento filosófico en contraposición con el de Kant. La misma idea, pero expuesta de una manera más directa, está recogida en el famoso discurso de Lobachevski de 1828,*

*"...los conceptos se adquieren por los sentidos, sin embargo, no se debe creer a los conceptos innatos...”*

*Esta misma manifestación aparece frecuentemente a lo largo de toda su obra, citemos un último ejemplo:*

*"Las primeras nociones de la ciencia deben ser claras y reducidas al mínimo. Sólo entonces las mismas pueden servir de fundamento sólido y suficiente a esta ciencia. Tales nociones se adquieren por los sentidos, y no se debe confiar en las nociones innatas".*

Hacia 1820 la idea que tiene de función es similar a la que utilizaba Euler, pero es consciente que esta definición no es muy rigurosa y enuncia un nuevo concepto de función:

> *"Como junción de una variable se entiende una magnitud, cuyo valor depende de esta variable”.*

De esta forma, por primera vez en la historia de las matemáticas, Lobachevski libera a la noción de función de su relación inseparable del concepto de una expresión analítica (de una fórmula) o de una gráfica, mediante los cuales se restringían las ideas de función en aquel tiempo. Conoce también los trabajos de Fourier (1822) y del matemático francés Cauchy respecto este asunto.

Por fin, en una memoria titulada "Acerca de la convergencia de las series geométricas", enuncia con toda claridad el concepto de función mucho antes que lo haga Dirichlet (1805- 1859). Lobachevski define la noción de función de la manera que ahora se emplea en todos los manuales de análisis matemático.

***Kant y las matemáticas***

*Immanuel Kant (1724-1804) nació en Königsberg (actual ciudad rusa de Kaliningrado) el año 1724. Estudió en el Collegium Fridericianum y su formación primaria se basó sobre todo en el estudio de los clásicos mientras que sus estudios superiores se centraron en física y matemáticas. Fue Immanuel Kant profesor en la Universidad de Königsberg, impartiendo primeramente clases de ciencias y matemáticas, posteriormente*

*se dedicó a casi todas las ramas de la filosofía. Kant era un hombre de profunda religiosidad, aspecto que se deja* *vislumbrar a través de su obra. Persona sobria de costumbres y vida metódica, pasó toda su vida en Königsberg, allí tenía su mundo: la universidad, sus amigos y sus paisajes. Murió en 1804 en la misma ciudad que le vio nacer y crecer.*

*Kant encarna las virtudes de una vida dedicada por entero al estudio y a la enseñanza. Profundamente comprometido con los ideales de la Ilustración, profesó una simpatía profunda por los modelos de la Independencia Americana y de la Revolución Francesa. Fue pacifista convencido, antimilitarista y ajeno a todo tipo de patriotismo.*

*Sus obras más conocidas e influyentes son la Crítica de la razón pura y la Crítica de la razón práctica.*

*Además de sus trabajos sobre filosofía, escribió numerosos tratados sobre diversas materias científicas, sobre todo en el área de la geografía física. Su obra más importante en este campo fue Historia universal de la naturaleza y teoría del cielo, en la que anticipaba la hipótesis (más tarde desarrollada por Laplace) de la formación del Universo a partir de una nebulosa originaria. Kant produjo una notable cantidad de escritos, que con su vigor y la influencia de su pensamiento obligan a considerarlo como uno de los filósofos más notables de la cultura occidental.*

***Ideas filosóficas***

*Según el empirismo del filósofo escocés D. Hume (1711-1776), las matemáticas son universales pero a costa de ser* *tautológicas, es decir que su predicado está contenido en el sujeto sin aportar nada nuevo a la relación entre ambos. Hume llevó el empirismo del inglés J. Locke (1632- 1704) hasta sus últimas consecuencias. Según Hume, el conocimiento humano se compone de impresiones sensibles y de ideas, que se forman a partir de los datos de los sentidos. No podemos ir, pues, más allá de lo que nos aportan los sentidos, y la existencia y verdad de las ideas resultan injustificables para nosotros.*

*Kant se propuso demostrar el carácter de ciencia de las disciplinas científicas (matemáticas y física) que él admiraba profundamente. Para ello, avanzó en los conceptos tradicionales de juicios analíticos y juicios sintéticos, creando un nuevo tipo de juicio que llamó juicio sintético a priori.*

*Los juicios sintéticos están basados en la experiencia, como decir que algunos cuerpos son pesados, conteniendo algo que no está implícito en el conocimiento de cuerpo, pero no son universales y necesarios.*

*Kant formula los juicios sintéticos a priori, de los que razona que son universales y necesarios pero sin estar contenidos en la experiencia, es decir, que son a priori.*

*Entonces pasa a demostrar que tanto las matemáticas como la física están constituidas por juicios sintéticos a priori, que explica mediante ejemplos como que 7 + 5 - 12. Según Kant, en el concepto de 7 y en el de 5 no está contenido el de 12, por lo que éste debe proceder de alguna otra parte, no* *directamente de la primera noción. Un razonamiento similar le sirve para demostrar que también la física está constituida por juicios sintéticos a priori, y por lo tanto ambas disciplinas pueden y deben ser consideradas ciencias. Sin embargo, aún le falta demostrar como estos juicios son elaborados por la mente humana, y para ello desarrolla una nueva teoría del conocimiento que se denomina idealismo trascendental.*

*En la introducción de su Crítica de la razón pura Kant expresa:*

*"No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia. Pues ¿por dónde iba a despertarse la facultad de conocer., como no fuera por medio de objetos que hieren los sentidos... y elaborar así con la materia bruta de las impresiones sensibles, un conocimiento de los objetos que llamamos experiencia?., mas si todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia no por ello se origina todo él en la experiencia. Bien podría ser que nuestro conocimiento fuera compuesto de lo que recibimos por medio de impresiones y de lo que nuestra facultad de conocer ( ) proporciona por sí misma sin que distingamos este añadido de aquella materia fundamental..."*

*De modo que nuestro conocimiento del mundo no es una representación (en el sentido de una copia) de esa realidad externa en nuestro intelecto, sino una interpretación, una reconstrucción que hacemos tomando nuestros registros perceptuales como materia prima y sometiéndolos al influjo de* *esa máquina de interpretar y organizar constituida por nuestro intelecto.*

*Para Kant, nuestras experiencias sensoriales son posibles como fenómenos que se desarrollan en el espacio y en el tiempo. Pero, espacio y tiempo son las formas de sensibilidad mediante las cuales el intelecto capta las experiencias. Las formas de sensibilidad son innatas. Sin ellas las experiencias son imposibles. Las observaciones son moldeadas por las formas de sensibilidad, así como el agua al entrar al recipiente adopta la forma de éste.*

***Kant y las matemáticas***

*Para Kant la ciencia se expresa mediante juicios (recuerda que son afirmaciones de la realidad y que tienen la forma: sujeto y predicado). De hecho estimaba que las distintas proposiciones científicas podrían reducirse a un conjunto de juicios. Después de todo, los razonamientos se componen de juicios. De este modo, la pregunta por las condiciones que hacen posible la ciencia se convierte en una pregunta sobre las condiciones que hacen posible los juicios.*

*Para demostrar la existencia de juicios sintéticos a priori en matemáticas se apoya precisamente en el espacio y el tiempo. La geometría es la ciencia del espacio y la aritmética la ciencia del tiempo (las series numéricas, 1, 2, 3,...n, se suceden en el tiempo). Por ello, las matemáticas formulan juicios sintéticos a priori porque se apoyan en el espacio y el tiempo como* *intuiciones puras. Hacen afirmaciones, juicios, sobre percepciones espacio-temporales (la imagen de un triángulo, por ejemplo). En sus procesos perceptivos interviene el espacio y el tiempo como sustrato de las matemáticas.*

***Juicios analíticos***

*Un juicio es analítico cuando el predicado está comprendido en el sujeto y, por tanto, basta con analizar el sujeto para comprender que el predicado le conviene necesariamente. Ejemplo: "el todo es mayor que las partes". Este juicio no amplía nuestro conocimiento.*

***Juicios sintéticos***

*Un juicio es sintético cuando el predicado no está comprendido en la noción del sujeto. Estos juicios sí amplían nuestro conocimiento.*

*Juicios a priori y a posteriori*

***Juicios a priori*** *son aquellos cuya verdad puede ser conocida independientemente de la experiencia ya que su fundamento no se halla en esta.*

***Juicios a posteriori*** *son aquellos cuya verdad es conocida a través de los datos aportados por la experiencia.*

*Para aclarar estos conceptos Kant, propone el siguiente* *ejemplo: "la recta es la distancia más corta entre dos puntos". En este juicio el predicado no está contenido en la noción del sujeto: en el concepto de línea recta no entra para nada el concepto de distancia. Es por tanto un juicio sintético, luego no es analítico. Tampoco es un juicio a posteriori, ya que se refiere a una verdad sin tener que medir distancias entre dos puntos, sin necesidad de recurrir a ninguna experiencia comprobatoria. Es estrictamente universal y necesario, carece de posibles excepciones.*

*Es por tanto, a priori. Como consecuencia, Kant admite juicios sintético a priori, al contrario que Hume. Algunos pensamientos de Kant en este sentido:*

*"...sólo es posible dar cuenta de la certeza de la ciencia natural y de sus posibilidades de matematización, si suponemos que la estructura de nuestra experiencia proviene de nuestras facultades cognitivas, que sirven de fundamento a priori a nuestras experiencias... "*

*Kant concluye que todos los principios fundamentales de la matemática y la física se basan en los juicios sintéticos a priori.*

*En realidad decir que las matemáticas eran un cuerpo de verdades a priori no era muy novedoso, los matemáticos ya estaban acostumbrados a escucharlo. Por eso sus doctrinas no fueron tenidas muy en cuenta.*

*Pero Kant fue más allá, enunció que la mente organiza sus sensaciones espaciales de acuerdo con las leyes de la* *geometría euclídea, obstaculizando la aceptación de puntos de vista contrarios.*

*Estas concepciones kantianas se convirtieron rápidamente en el pensamiento oficial, pues la mayor parte de los científicos aceptaron sus planteamientos, incluso personas de la talla de Gauss no se atrevieron a expresar con toda libertad sus pensamientos geométricos.*

*La concepción epistemológica de Kant se erigió en un formidable obstáculo para los desarrollos geométricos posteriores pero, una vez superado éste, hizo posible que las matemáticas pudieran acceder a un nivel de rigor y equilibrio del que no habían disfrutado antes.*

# Capítulo 10
## Investigaciones geométricas de la teoría de las paralelas

*''Defiende tu derecho a pensar porque, incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar".*
*Hipatia de Alejandría (370-415)*

A lo largo de diez años, desde 1830 a 1840, Lobachevski alternó sus obligaciones administrativas con investigaciones relativas a la *geometría imaginaria.* Desgraciadamente, sus esfuerzos no tuvieron, en su momento, la recompensa merecida. Actualmente se sabe que ninguno de sus colegas rusos comprendió en profundidad sus investigaciones acerca de la nueva geometría. El hecho de estar la mayoría de las obras de Lobachevski escritas en ruso impidió, además, que otros científicos europeos conocieran sus novedosos planteamientos.

La obstinación de Lobachevski le llevó a redactar una y otra vez sus trabajos desde diferentes puntos de vista. Era consciente de que su concisión, la originalidad de sus planteamientos, las consecuencias derivadas de su teoría, el escribir en contra del pensamiento geométrico establecido, etc., hacían realmente difícil entender sus trabajos. Algunos autores dicen al respecto:

> *"Cualquiera que aborde por primera vez la geometría imaginaria, escrita hacia los años 1830, se encuentra con dificultades inauditas y sin duda insuperables... los resultados obtenidos no cuadran con las representaciones geométricas*

*usuales; la necesidad de formarse imágenes geométricas nuevas y hasta falsas, desde el punto de vista euclídeo, dificulta de manera singular la comprensión de la llamada geometría imaginaria... ”*

Con la intención de dar a conocer sus descubrimientos geométricos a la comunidad matemática, Lobachevski decidió escribir en alemán un resumen de sus ideas. Su cabeza había dedicado tanto tiempo a pensar en su nueva geometría que estaba en disposición de escribir sus logros geométricos de tal manera que cualquier persona, con unos conocimientos matemáticos de primeros años de universidad, debería comprenderlos.

Geometrische Untersuchungen

Theorie der Parallellinien

Berlin, 1840.

*Portada de Investigaciones geométricas de la teoría de las paralelas*

El trabajo fue impreso en Berlín en 1840 por una pequeña editorial llamada Fincke. El título elegido fue *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien (Investigaciones geométricas de la teoría de las paralelas).*

Por medio de este libro la comunidad matemática tomó contacto con las revolucionarias ideas geométricas de Lobachevski. A principios de 1841 Gauss escribe a uno de sus alumnos la siguiente nota:

> *"Estoy haciendo razonables progresos en ruso y esto me proporciona gran gusto. El señor Knorre me envió una pequeña memoria de Lobachevski (en Kazán), escrita en ruso, y esta memoria, así como su opúsculo en alemán sobre líneas paralelas (apareció una nota absurda sobre él en Repertorium de Gersdorff) ha despertado en mí el deseo de averiguar más acerca de este inteligente matemático. Según me dijo Knorre, muchos de sus artículos están en la revista rusa Memorias de la Universidad de Kazán".*
>
> *Carta de Gauss a J .F. Encke (1841)*

Sin duda que esta nota, escrita por el mejor matemático de ese momento, es la consagración de las teorías geométricas de Lobachevski. Sin embargo, es muy posible que él no supiera de su existencia hasta varios años después.

El escrito debió impresionar a Gauss, ya que en noviembre de 1842 propuso la candidatura de Lobachevski, como *"uno de los excelentes matemáticos del Estado Ruso",* para que fuera nombrado miembro de la Sociedad Científica de Göttingen, que ya entonces tenía el rango de Academia. Lobachevski fue elegido miembro de honor y recibió un diploma firmado por Gauss y el profesor J. F. Hausmann, respectivamente, presidente y secretario de la sociedad.

*Investigaciones geométricas de la teoría de las paralelas* es un pequeño folleto de no más de 60 páginas escrito de manera muy clara y con un estilo que recuerda a las obras clásicas de geometría. En las páginas finales se incluyen todas las figuras que su autor ha utilizado a lo largo del mismo.

Comienza con una introducción de la que, por su importancia, reproducimos los párrafos más relevantes:

> *"Acariciando la esperanza de haber satisfecho todas las exigencias, me he dedicado a perfeccionar esta ciencia en su conjunto y he publicado mis resultados por partes, en las Memorias de la Universidad de Kazán de 1836, 1837 y 1838, bajo el título general de "Nuevos elementos de la geometría con una teoría completa de las paralelas.*
>
> *Sin embargo, el tamaño de dicha obra, por lo visto, impide a mis compatriotas seguir ese tema, que después de Legendre ha dejado de interesar. Yo, sin embargo, considero que la teoría de las paralelas no ha perdido, ni mucho menos, el derecho de que se le preste atención por parte de los geómetras; por eso pienso exponer aquí lo más importante de mis investigaciones y estimo necesario indicar anticipadamente que, a pesar de la opinión de Legendre, todas las otras imperfecciones, tal como la definición de la línea recta, por ejemplo, se hacen aquí absolutamente*

> *extrañas a esa cuestión y no influyen de ninguna manera sobre la teoría de las paralelas".*

A continuación le siguen 15 proposiciones que pertenecen a la llamada *geometría absoluta,* ninguna de las proposiciones está demostrada. Algunas de ellas se refieren al plano y otras al espacio.

Entre ellas están:

**2.** Dos líneas rectas no pueden cortarse en dos puntos

**4.** Dos líneas rectas perpendiculares a una tercera, y situadas las tres en el mismo plano, no pueden cortarse por más que las prolonguemos.

**7.** Dos líneas rectas no pueden cortarse, cuando ellas son cortadas por una tercera línea recta bajo ángulos iguales

**12.** La intersección de una esfera con un plano es una circunferencia

**14.** En un triángulo esférico, a lados iguales se oponen ángulos iguales y recíprocamente.

Una vez presentadas las 15 primeras proposiciones dedica la número 16 a su famoso ángulo de paralelismo. Comienza con la siguiente definición:

> *"Todas las rectas trazadas por un mismo punto en un plano pueden distribuirse, con respecto a una recta dada en dicho plano, en dos clases, a saber: rectas que cortan a la recta dada y rectas que no la cortan. La recta que está en el límite de estas dos clases se dice paralela a la recta dada".*

La proposición viene acompañada de un dibujo aclaratorio, que figura al final del libro y que es el siguiente:

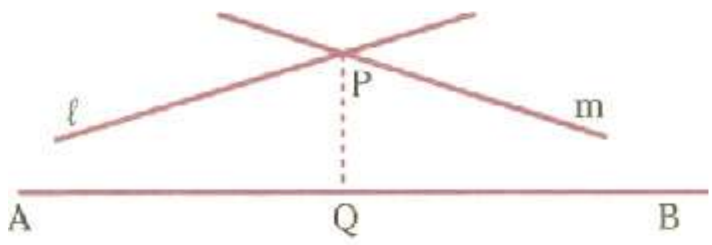


Fig. 17

Lobachevski llama ángulo de paralelismo en el punto P con respecto a la recta AB a cada uno de los ángulos agudos iguales (QPY y QPX) que forman por ambas partes las rectas paralelas a la recta AB.

La geometría euclidiana se caracteriza por el hecho de que en ella el ángulo de paralelismo es siempre un ángulo recto, mientras que en la geometría de Lobachevski el ángulo de paralelismo es siempre un ángulo agudo. Por consiguiente la geometría euclidiana constituye un caso límite de la de Lobachevski.

La proposición 17 prueba que toda línea recta conserva el carácter de paralelismo en todos sus puntos (propiedad de *transmisibilidad* del paralelismo).

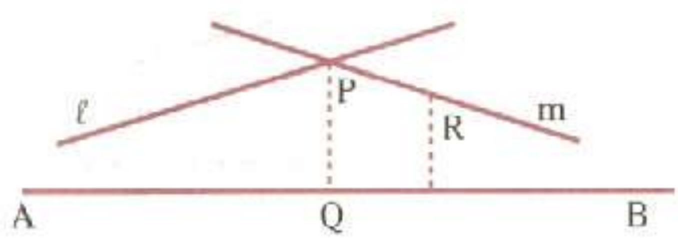


Fig. 18

Muestra que si la recta m es paralela a la recta AB, y R es un punto de m, entonces una de las semirrectas en m con extremo R también es paralela a la recta AB.

Posteriormente demuestra que *“dos líneas rectas son siempre recíprocamente paralelas* (propiedad de *simetría* del paralelismo, proposición 18).

Los enunciados de las proposiciones 19 y 20 hacen referencia a la suma de los ángulos internos de un triángulo. Estas proposiciones ya eran conocidas por Legendre, que ha sido citado en la introducción del libro. Su redacción es la siguiente:

> *"En todo triángulo la suma de los tres ángulos no puede ser mayor que dos ángulos rectos" (proposición 19).*
>
> *“Si en un triángulo cualquiera la suma de los tres ángulos es igual a dos ángulos rectos, entonces dicha suma será igual para cualquier otro triángulo" (proposición 20).*

Las proposiciones 22, 23 y 24 están dedicadas al ángulo de paralelismo y sus propiedades. Es muy interesante la número 24, en ella se hace mención al carácter asintótico de dos rectas paralelas.

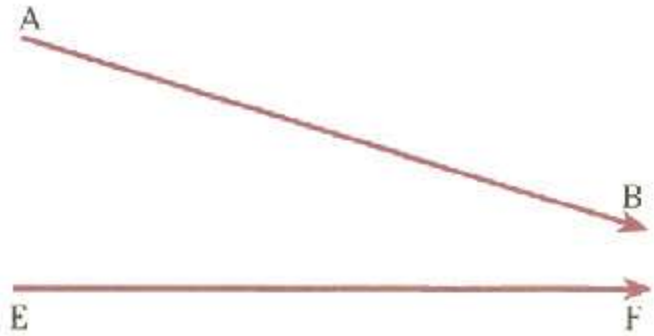



Fig. 19

Lobachevski demuestra que dos rectas paralelas se aproximan de manera indefinida la una a la otra en el sentido del paralelismo, como si se juntaran en un punto en el infinito, mientras que divergen (se alejan) una de la otra en el sentido opuesto.

> *"Sí se prolongan más y más dos rectas paralelas en el sentido del paralelismo, las rectas se aproximan entre ellas tanto como se quiera ' (proposición 24)*

Muestra también que las dos rectas paralelas en el sentido opuesto se alejan indefinidamente divergiendo más y más cada vez la una de la otra.

En este tipo de geometría, dos rectas divergentes siempre tienen una perpendicular común que es la distancia más corta entre ellas y a partir de la cual divergen y se alejan indefinidamente la una de la otra en ambos sentidos, tal como muestra la Figura 20.

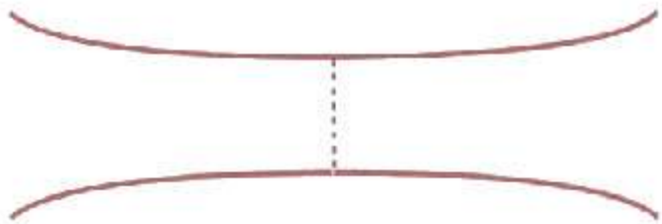


Fig. 20

Este resultado, que se conoce desde que se comienza a estudiar la geometría no euclidiana, constituyó para muchos matemáticos, durante largo tiempo, una dificultad que les impidió comprenderla y reconocerla. El primero en entender tal resultado, Gauss, decía al respecto:

> *"No hay que confundir lo que nos parece antinatural con lo que es absolutamente imposible*

Las numeradas como 26, 27 y 28 son relativas a la geometría del espacio.

Las dos siguientes (29 y 30) tratan sobre aspectos de la geometría del plano y preparan el camino para la proposición 31, que comienza con una definición muy importante para entender el libro en su totalidad.

Lobachevski define como *curva-límite* (horociclo) a la línea curva situada en un plano, tal que todas las perpendiculares elevadas sobre los puntos medios de las cuerdas son paralelas entre sí. Una cualquiera de esas paralelas se denomina eje de la curva-límite.

A través de la proposición 33 obtiene, mediante procedimientos de análisis, una relación que posteriormente le permitirá obtener el ángulo de paralelismo. Su redacción es la siguiente:

> *"Sean AA' = BB'= x dos rectas paralelas entre ellas en la dirección de A hacía A', y supongamos que estas rectas sirven de ejes de dos arcos de curvas-límites AB = s y A'B' = s', entonces se tendrá s' = se*$^{-x}$ *" (proposición 33)*

La proposición 34, define como *superficie-límite* (horoesfera) a la engendrada por la revolución de la curva-límite alrededor de uno de sus ejes, que también será también un eje de la superficie límite.

La proposición 35, una de las más importantes de todo el tratado, además de obtener una serie de relaciones trigonométricas, presenta una importante relación funcional que permitirá, en la proposición 36, obtener el ángulo de paralelismo, que como ya sabemos responde a la fórmula.

$$\tan\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$

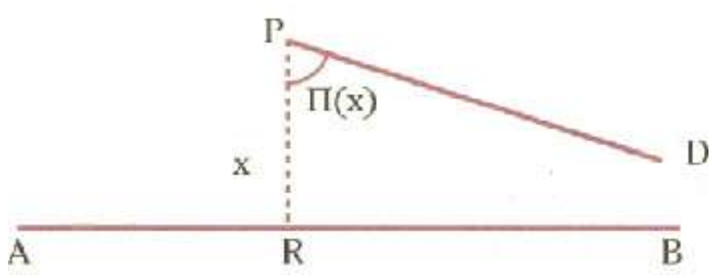



Fig. 21

La última de las proposiciones, la 37, presenta una serie de importantes relaciones trigonométricas, entre ellas destacamos las siguientes.

En un triángulo de lados a, b, c y con ángulos opuestos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ se verifican las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}\hat{A}\, \operatorname{tg}\Pi(a) = \operatorname{sen}\hat{B}\, \operatorname{tg}\Pi(b)$$

$$\cos\hat{A}\, \cos\Pi(b)\, \cos\Pi(c) + \frac{\operatorname{sen}\Pi(b)\, \operatorname{sen}\Pi(c)}{\operatorname{sen}\Pi(a)} = 1$$

$$\cos\hat{A} + \cos\hat{B}\, \cos\hat{C} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}\, \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\Pi(a)}$$

Si los lados del triángulo son muy pequeños, de acuerdo a la proposición 36, se pueden obtener las siguientes fórmulas aproximadas:

$$\cos\Pi(a) = a$$

$$\operatorname{sen}\Pi(a) = 1 - \frac{a^2}{2}$$

Y, por tanto, las ecuaciones anteriores se pueden escribir, para el caso particular de triángulos muy pequeños, como

$$b\, \operatorname{sen}\hat{A} = a\, \operatorname{sen}\hat{B}$$

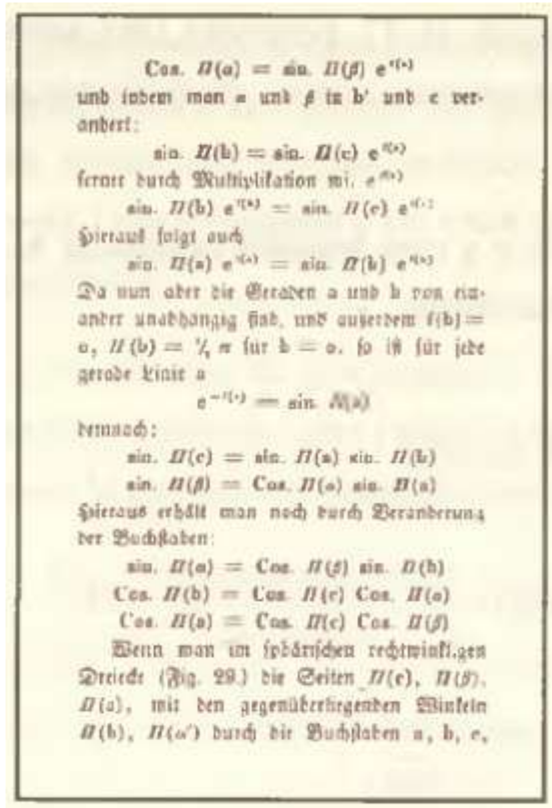
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, \cos\hat{A}$$

$$\cos\hat{A} + \cos(\hat{B} + \hat{C}) = 0$$

que corresponden a fórmulas fundamentales de la trigonometría euclidiana plana.

Lobachevski finaliza esta proposición comentando que la geometría ordinaria es un caso *particular* (límite) de la *geometría imaginaria.*

++++



$$\text{Cos. } \Pi(\alpha) = \text{sin. } \Pi(\beta)\, e^{f(c)}$$

und indem man α und β in b' und c verändert:

$$\text{sin. } \Pi(b) = \text{sin. } \Pi(c)\, e^{f(a)}$$

ferner durch Multiplikation mi. $e^{f(b)}$

$$\text{sin. } \Pi(b)\, e^{f(b)} = \text{sin. } \Pi(c)\, e^{f(c)}$$

Hieraus folgt auch

$$\text{sin. } \Pi(a)\, e^{f(a)} = \text{sin. } \Pi(b)\, e^{f(b)}$$

Da nun aber die Geraden a und b von einander unabhängig sind, und außerdem $f(b) = o$, $\Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$ für $b = o$, so ist für jede gerade Linie a

$$e^{-f(a)} = \text{sin. } \Pi(a)$$

demnach:

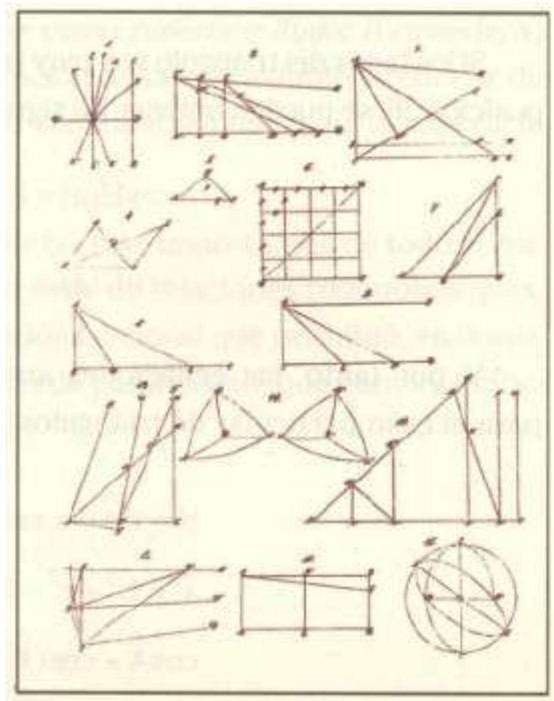
$$\text{sin. } \Pi(c) = \text{sin. } \Pi(a)\ \text{sin. } \Pi(b)$$
$$\text{sin. } \Pi(\beta) = \text{Cos. } \Pi(\alpha)\ \text{sin. } \Pi(a)$$

Hieraus erhält man noch durch Veränderung der Buchstaben:

$$\text{sin. } \Pi(\alpha) = \text{Cos. } \Pi(\beta)\ \text{sin. } \Pi(b)$$
$$\text{Cos. } \Pi(b) = \text{Cos. } \Pi(c)\ \text{Cos. } \Pi(\alpha)$$
$$\text{Cos. } \Pi(a) = \text{Cos. } \Pi(c)\ \text{Cos. } \Pi(\beta)$$

Wenn man im sphärischen rechtwinkligen Dreiecke (Fig. 29.) die Seiten $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$, mit den gegenüberliegenden Winkeln $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$ durch die Buchstaben a, b, c,

*Una de las páginas de Investigaciones geométricas de la teoría de las paralelas.*



Algunos de los dibujos que figuran al final de *Investigaciones geométricas de la teoría de las paralelas.*

# Capítulo 11
## Últimos años

*"Hay tres cosas que nunca vuelven atrás: la palabra pronunciada, la flecha lanzada y la oportunidad perdida".*
*Proverbio chino*

En 1845 Lobachevski fue elegido nuevamente rector. Este hecho coincidió con la marcha del protector Musin-Pushkin a San Petersburgo. Por tanto, el puesto de protector de Kazán quedó, temporalmente vacío. En estos casos, de acuerdo a las normas establecidas, el rector se hacía cargo del protectorado. De manera que Lobachevski tenía sobre sus espaldas una doble responsabilidad: dirigir una vasta región desde el punto de vista docente y atender a la propia universidad.

La dilatada vida universitaria de Lobachevski acabará en 1846, pues ese año cumplía 30 años de servicio como profesor de universidad. De acuerdo con los estatutos universitarios los profesores debían dejar vacante su plaza a no ser que hubiera una petición expresa del interesado y un informe positivo a tal demanda autorizando a continuar como profesor unos años más. Con toda seguridad, el ministro de Instrucción Pública y el Consejo de la Universidad de Kazán hubieran sido muy favorables a emitir un informe positivo si Lobachevski lo hubiera solicitado. Sin embargo, el mismo Lobachevski remitió una carta dirigida al ministro redactada en los siguientes términos:

> *"En lo que a mí se refiere, aun sintiéndome muy reconocido al Consejo de la Universidad por haber consentido seguir en servicio en calidad de profesor, tengo el honor de someter a la benevolente atención de Vuestra Excelencia que la cátedra de matemáticas puras pueda ser conferida a Popov, profesor del Gymnasium de Kazán, quien en el último año ha obtenido el grado de doctor...*
>
> *...Siendo Popov aún joven y no estando, como yo, abrumado por las obligaciones administrativas y familiares, no tardara en ocupar su lugar entre los científicos más distinguidos.*
>
> *En tales condiciones, mi deseo de permanecer en el puesto de profesor no podría considerarse justo..."*

En la primera parte de la carta, el rector Lobachevski intercedía en favor de su amigo de juventud, el profesor Simonov, rogando encarecidamente al consejo que le mantuviera en sus funciones. La carta tuvo su efecto y Simonov mantuvo la categoría de catedrático.

El retiro coincidió con el final de su mandato como rector, de manera que en 1846 Lobachevski rompió amarras con su universidad, a la que tanto había querido y a la que tanto tiempo había dedicado.

## §. Lobachevski abandona la universidad

Tenía únicamente 53 años, una cabeza ágil, un espíritu disciplinado y un ánimo emprendedor. Es posible que él esperara ser nombrado protector de Kazán y de esta manera continuar con el trabajo que ya estaba desempeñando en funciones. El Senado, no obstante, le propuso como auxiliar del nuevo protector. Parece inexplicable que esto le sucediera a él. ¿A qué se debía este desprecio?

Una de las explicaciones más plausibles es que a mediados del siglo XIX era evidente que en la sociedad rusa existían unas incipientes y cada vez más poderosas tendencias revolucionarias, inclinaciones que provenían de Occidente y que no eran del agrado del zar Nicolás I.

Para frenarlas, el mandatario promulgó unas disposiciones, si cabe, aún más reaccionarias, tratando de controlar la situación y derivarla hacia un control más férreo.

El mismo zar Nicolás I impulsó varias medidas en relación con la vida docente en general y la universitaria en particular. En primer lugar cesó al ministro Uvárov, por considerarle demasiado liberal, nombrando a Shirinski-Shijmátov, que tenía un talante controlador y poco propicio a innovaciones; en cierta manera recordaba a Magnitski. Es evidente que este nombramiento no favorecía a Lobachevski, considerado como persona emprendedora, con carácter progresista e ideas renovadoras.

En definitiva, se auguraban nuevos tiempos y su figura no era la más idónea de cara a dirigir el protectorado de Kazán. Lobachevski era considerado como una persona íntegra e independiente, y por tanto no convenía al ministerio.

De repente, la educación en el distrito de Kazán pasó a manos de personas mediocres, pero dóciles y capaces de imponer una disciplina militar.

***Nicolás I***

*Nicolás I (zar de Rusia de 1825 a 1855) era el tercer hijo del zar Pablo I. Cuando falleció su hermano mayor, el zar Alejandro I, Nicolás le sucedió después de haber sofocado la rebelión decembrista. Adoptó una política interior autocrática y una política exterior agresiva e introdujo la disciplina militar en el cuerpo de funcionarios del estado; también impidió la difusión del pensamiento revolucionario aplicando una rígida censura y sometiendo a las universidades a un estricto control estatal, y promovió el estudio de la*

*lengua rusa y la religión ortodoxa entre sus súbditos de otras nacionalidades. Sostuvo varias guerras contra Irán, Turquía, Polonia y Crimea.*

El puesto de rector fue ocupado por su compañero Simonov, persona inteligente pero poco ducha en tareas administrativas, mientras que el protectorado lo asumiría el general Molostov.

La marcha de la universidad tuvo consecuencias inmediatas para él y para su familia: disminución de sueldo, abandono de la residencia que la universidad le había cedido en calidad de rector, menor influencia en los ambientes estudiantiles...

Después de casi cuarenta años Lobachevski se incorporaba a nuevas funciones. Si bien no ocupó la máxima responsabilidad del protectorado, su influencia se seguía notando en los ambientes educativos a pesar de que el nuevo protector no contara con él.

Se han conservado muchos documentos en los cuales Lobachevski llama la atención a los directores de los institutos y a los maestros sobre la enseñanza de la lengua materna y de los idiomas extranjeros. Además aconseja acercarse a la enseñanza de la lengua desde tres posiciones distintas:

- como medio del pensamiento,
- como medio de formación de la unidad del pueblo,
- como medio de comunicación de las personas.

No se puede dejar de citar un fragmento del informe de Lobachevski "La prescripción al director de las escuelas de la provincia de Saratov sobre la mejora de la enseñanza de la lengua, exigencias a las redacciones de los alumnos y en la educación de los alumnos en amor a la lengua natal" (12/11/1846). Un extracto del mismo dice:

*"1) Puede ser que los maestros mismos puedan ser culpables de que analizando con los alumnos las obras de famosos escritores, se olviden de fijarse que, además del buen estilo, se deben presentar ejemplos de un buen y bien meditado contenido y del orden en las ideas.*

*2) Hay que ejercitar a los alumnos no solo en el estilo, sino también en la composición de toda la redacción. Por esta razón hay que exigir que, una vez elegido el tema, los alumnos presenten previamente un guión con la exposición del contenido...*

*3) Hay que inculcar a los alumnos que se llama pueblo a las personas que hablan una misma lengua, por consiguiente, la lengua forma el primer cimiento del pueblo (o grupo étnico). La historia nos muestra que con el declive del carácter nacional de un pueblo decae la lengua. Conocer lenguas extranjeras es elogioso, pero no saber la suya, no comprender el espíritu en su propia lengua nacional es vergonzoso. El estudio de las lenguas extranjeras es útil, incluso porque ayuda al aprendizaje de la lengua natal. En la comparación de dos lenguas se descubre la singularidad que es propia a cada una de ellas. Si vemos que en el mejor estamento de ¡os rusos menosprecian su propia lengua y se vanaglorian del conocimiento de la lengua extranjera, hay que lamentarlo)' llamarlo suceso penoso de los tiempos actuales".*

En muchas ocasiones, en sus prescripciones a los directores de los institutos y de las escuelas, Lobachevski plantea la necesidad de cuidar el empleo de la lengua de los profesores y de los alumnos para que se acostumbren a utilizar un lenguaje lleno de ideas y no rebuscado y sin sentido. Escribía:

> *"...hacer saber al profesor de lengua que los alumnos escribiesen solamente sobre los temas que ellos entienden. Sí se les propusiesen temas que ellos escuchan en las clases, esto traería doble provecho: consolidación en la memoria de lo estudiado y el hábito de exposición de sus ideas. La tendencia a los adornos retóricos, a la imprecisión de las expresiones y una fantasía desmesurada, vistas en algunos alumnos y que es justamente reprobada por el Consejo, obligan al profesor de lengua a preocuparse de que las redacciones sean escritas claramente y que abundasen en la cantidad de ideas y no por las florituras..."*

***La vida familiar***

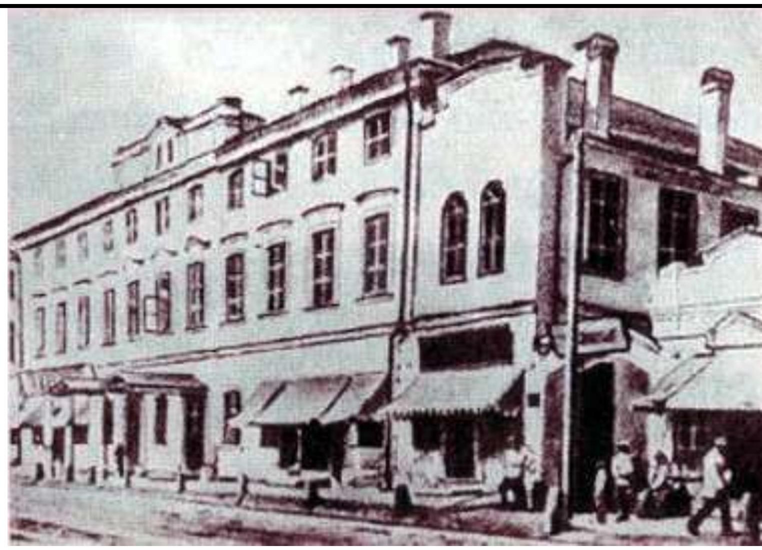
*Las personas que conocieron a Lobachevski afirmaban que era una persona extremadamente educada, con un tono de voz suave y melodioso; hablaba despacio, como si pensara cada una de sus palabras. Respecto a su aspecto físico, Lobachevski era delgado, algo encorvado y la mayoría de las veces cabizbajo, como si siempre estuviera cavilando. Su carácter era más bien serio y pocas veces sonreía. Su mirada era profunda y penetrante; sus ojos, de un gris intenso,* *conferían a su cara una expresión vivaz e inteligente. Su cabeza estaba adornada de abundantes cabellos castaños que con los años se volvieron canosos.*

*En sus primeros años como profesor de universidad su carácter era muy jovial y sociable; pero con el tiempo, debido al enorme trabajo y a las preocupaciones derivadas de sus cargos, su carácter se tornó más serio, de hecho era muy raro verle alegre.*

*Si bien los primeros años de Lobachevski transcurrieron con bastantes estrecheces económicas, una vez nombrado profesor de universidad su vida fue más desahogada. Su personalidad es ciertamente singular, al respecto comenta el historiador de las matemáticas E. T. Bell, lo siguiente:*

*"Poco bastaba para que despojándose del cuello y de la levita se entregara a cualquier labor manual.*

*Se cuenta que un distinguido visitante extranjero, al encontrar al Rector en mangas de camisa, le confundió con un conserje y le pidió le mostrara la biblioteca y las colecciones del museo. Lobachevski le mostró los más preciados tesoros añadiendo detenidas explicaciones. El visitante quedó encantado, muy impresionado por la gran inteligencia y cortesía de los empleados subalternos rusos. Al despedirse quiso entregarle una pequeña propina pero Lobachevski, ante la admiración del extranjero, rechazó indignado las monedas ofrecidas. Pensando que se trataba de alguna excentricidad del inteligente conserje, el visitante se guardó su dinero.*



*Casa familiar de los Lobachevski. Los primeros años de su matrimonio transcurrieron en esta gran casa, de su propiedad, con tres pisos, situada en una de las calles más importantes de Kazán.*

*Aquella noche, él y Lobachevski volvieron a encontrarse en la cena ofrecida por el gobernador, y en ese momento se presentaron y aceptaron recíprocamente todo género de excusas".*

*A punto de cumplir los 40 años (en 1832), Lobachevski contrajo matrimonio con Varvara A. Moiséeva, perteneciente a una familia acomodada de Kazán. Los amigos de Lobachevski describían a su esposa como a una persona irascible e incapaz de gobernar la casa familiar. Incluso en algunas ocasiones su carácter se tornaba colérico, mientras que su marido era todo lo contrario: sereno, prudente y educado. Constituían, sin duda, un matrimonio singular Todo parece indicar que Lobachevski no fue feliz en su matrimonio.*

*Parece que el patrimonio aportado por Varvara A. Moiséeva al matrimonio era importante, lo que supuso un verdadero desahogo económico para la familia.*

*Varvara A. Moiséeva esposa de Lobachevski*

*Este hecho permitió la compra de tres haciendas en zonas limítrofes a Kazán. Con el paso de los años las dificultades a la hora de administrar sus pequeñas fincas le dieron verdaderos quebraderos de cabeza. El mantenerlas resultaba muy costoso, así que decidieron venderlas y comprarse una pequeña aldea cerca de Kazán, a orillas del río Volga. En la aldea, Lobachevski pasaba muchos ratos. Sus reiteradas estancias le proporcionaban tranquilidad y además la posibilidad de dedicarse a una de sus grandes aficiones: la agricultura.*

*Sus conocimientos de arquitectura le permitieron emprender un ambicioso plan dentro de sus terrenos, en poco tiempo* *construyó una presa, un molino de agua, un bonito y amplio jardín, una amplia casa, unos almacenes, cocheras, un amplio granero, e incluso compró ganado y trabajó las tierras. Sin embargo, el intenso trabajo en ¡a universidad no le permitió disfrutar, todo lo que él hubiera querido, de su hacienda. Con el paso de los años, debido a distintos factores, la familia Lobachevski tuvo que desprenderse, con todo pesar, también de esta hacienda e incluso hipotecar su vivienda habitual. Este hecho supuso un nuevo disgusto para Lobachevski, que tenía muchas esperanzas de pasar sus últimos años en la aldea que tan primorosamente había construido.*

*No se sabe exactamente el número de hijos que tuvo el matrimonio, aunque la mayoría de los historiadores se inclinan a pensar que fueron siete (cuatro hijos y tres hijas).*

*Sea como fuere, sabemos que muchos de sus descendientes murieron al poco de nacer; además, los supervivientes tuvieron una salud enfermiza.*

*Coincidiendo con su salida de la universidad, su mujer cayó gravemente enferma y al poco tiempo su hijo mayor, el preferido, murió de tuberculosis.*

*Esta conjunción de desgracias, unido al hecho de que estaba quedándose ciego debido a una precoz esclerosis, debilitaron rápidamente su salud. Los últimos años de vida debieron ser muy penosos pues se sentía abandonado y enfermo.*

Con el paso del tiempo se le fue apartando de las responsabilidades educativas del protectorado y se le requería únicamente cuando había un conflicto o desorden, que generalmente solucionaba. En resumen, su trabajo se hizo menos agradable y más penoso.

*Último retrato que se tiene de Lobachevski (1855).*

Todo esto coincidió con la muerte de varios de sus hijos, con la hipoteca de algunos bienes que poseía en los alrededores de Kazán y, lo que es más grave, con la aparición de una precoz esclerosis, provocada, sin duda, por la constante tensión intelectual y, sobre todo, por los sinsabores de los últimos años.

**§. Obras no geométricas**

El trabajo de Lobachevski en temas no relacionados directamente con la geometría es profundo y muy sugestivo. Su pasión por las matemáticas le llevó a interesarse por muchas otras ramas de esta ciencia. Proporcionamos a continuación las obras de temática no geométrica que publicó entre los años 1823 y 1852.

El primer trabajo es una pequeña memoria publicada en ruso y titulada "Acerca del origen y la propagación del sonido en el aire" (1823). Cinco años más tarde publica, también en ruso, la segunda memoria incidiendo en el mismo tema "Acerca de la resonancia o la vibración recíproca de las columnas de aire" (1828). La aplicación de las matemáticas le lleva a interesarse por aspectos relacionados con el clima, publicando sus investigaciones en un pequeño trabajo titulado "Acerca de la temperatura media del aire y el suelo en algunos lugares de la Rusia Oriental" (1829). Cinco años más tarde escribe un libro muy importante titulado *El álgebra o el cálculo de los finitos* (1834) por el cual es conocido y admirado. Ese mismo año da a conocer sus reflexiones respecto a un caso particular de las ecuaciones binomiales titulando el trabajo "Reducción del grado de la ecuación binomial cuando el exponente menos uno es divisible por 8" (1834).

A comienzos de los años 30 se interesa por problemas relacionados con las series trigonométricas. Este era una de las principales preocupaciones entre los matemáticos de la época. Lobachevski no está muy de acuerdo con los trabajos de A. Cauchy y Dirichlet respecto a la convergencia de las series trigonométricas y publica un artículo, en *las Memorias de la Universidad de Kazán,* titulado "Acerca de la convergencia de las series trigonométricas" (1834), al año siguiente incide nuevamente en el tema de la convergencia, y publica un extenso artículo titulado “Método para asegurarse de la convergencia de las series infinitas y aproximarse a los valores de las funciones de los números muy grandes” (1835) que también ve la luz en *las Memorias de la Universidad de Kazán,* este asunto le preocupó durante largo tiempo. En 1836, vuelve publicar sus reflexiones en alemán bajo el título “*Über die Convergenz der unendilichen Reihen*”. Al ser los puntos de vista, en parte, bastante revolucionarios, el ministro de Instrucción Pública encargó, el año 1842, un comentario crítico a la Academia de Ciencias de San Petersburgo. El informe cayó nuevamente en manos del matemático Ostrogradski, que escribió:

> *“La Academia me ha encargado examinar una memoria acerca de las convergencias de las series y hacer un informe sobre ella.*
>
> *El autor de tal memoria, señor Lobachevski, rector de la Universidad de Kazán, me es conocido, y a decir verdad, bajo un aspecto desfavorable, por la creación de una nueva geometría que él califica de imaginaria, por un tratado de álgebra bastante voluminoso y por varias disertaciones sobre diversas cuestiones de análisis matemático. La memoria que acabo de leer no contribuye a modificar la reputación que yo tengo sobre el autor Lobachevski ya que desdeña las exigencias elementales de un razonamiento riguroso, complica su trabajo, por puro placer. En vista de lo cual considero que dicha memoria no merece la aprobación de la Academia”*

Lobachevski también reflexionó sobre algunos temas clásicos relativos a la mecánica. En 1834, en *Memorias de la Universidad de Kazán,* escribió una memoria titulada "Ecuaciones convencionales del movimiento y la posición de los ejes principales de rotación de un sistema sólido" (1834). Sus amplios conocimientos de astronomía le permiten participar en una expedición científica, realizada a *Penza,* para observar un eclipse de Sol ocurrido en junio de 1842. En dicha expedición participa junto al astrónomo Liapunov. Ese mismo año escribe una pequeña memoria sobre aspectos de la probabilidad, que se publica en el *Journal de Crelle,* y cuyo título es "*Sur la probabilité des resultats moyens, tirés des observations répétées*" (1842).

Sus últimos trabajos no geométricos los escribe entre 1845 y 1852. El primero de ellos es un comentario crítico relativo a un trabajo, dirigido por el mismo Lobachevski, realizado por su alumno A. F. Popov, este trabajo corresponde a la tesis de Popov como candidato a doctor en ciencias matemáticas y astronómicas.

Su último trabajo no geométrico se titula *"Acerca de los valores de algunas integrales definidas"* (1852) y está relacionado con una de las memorias sobre su geometría imaginaria que tituló *"Aplicación de la geometría imaginaria a algunas integrales".*

Si bien estos trabajos no están a la altura e importancia de sus logros geométricos, sí podemos señalar que varios de ellos encierran ideas originales y novedosas; por ejemplo es uno de los primeros científicos en distinguir claramente entre las funciones continuas y las diferenciables.

Pero sin duda, su obra más importante, tanto por su contenido como por su extensión, fue su tratado de álgebra.

### §. El álgebra o el cálculo de los finitos (1834)

Como ya sabemos, en 1824, Lobachevski preparó unos apuntes destinados a publicarse y poder ser utilizados como manual en los institutos de enseñanza secundaria. Uno de ellos llevaba por título *El álgebra o el cálculo de los finitos.* Se sabe que el Consejo recibió el 19 de septiembre de 1825 el dictamen del texto, que se había encargado al profesor Nikolski, de la sección fisicomatemática de la Academia, y donde informaba:

> *"Aunque dicha Algebra es un pequeño manual, el autor ha logrado introducir en él todas las nociones necesarias, presentándolas de una manera muy personal, con tal precisión y en forma tan completa que sería difícil agregar algo más. Por tal motivo, la misma puede ser introducida en los institutos con el mayor provecho"*

A pesar del positivo informe, el pequeño texto no llegó a publicarse nunca. Con el paso de los años, Lobachevski debió repensar el contenido del manuscrito y, decidió ampliarlo y completarlo. Por último, lo adaptó para la enseñanza en la universidad y lo publicó en 1834. La edición corrió por su cuenta: no hay que olvidar que en esos momentos su situación económica era bastante boyante.

Lobachevski agregó tres capítulos más a su anterior manuscrito. El libro contenía, ahora, un total 17 capítulos. Además, reordenó la materia de manera que en las dos versiones el último capítulo era el mismo, si bien tratado más profundamente en la última versión.

En el prefacio del libro Lobachevski, explica el contenido de su libro de la manera siguiente:

> *"Los edículos de todo género se efectúan con vistas a encontrar una incógnita; por eso las reglas del cálculo están reunidas en un método, el análisis. Este puede ser dividido en Aritmética, Álgebra y Cálculo Diferencial. En Aritmética se comienza por los ejemplos numéricos; después, en Álgebra, manteniendo gradación de los conceptos, los números se sustituyen poco a poco por letras, evitando, sin embargo, el método infinitesimal o de los limites, que exige más esfuerzos de reflexión y constituye la parte última y suprema del análisis. En ese sentido, el Álgebra es también la ciencia que Newton ha llamado aritmética general, para diferenciarla de la aritmética de los números, y que también justamente puede ser llamada cálculo de los finitos, para oponerlo al Cálculo Diferencial o Cálculo Infinitesimal, donde introducimos elementos funcionalmente nuevos cualquiera que sea la forma bajo la cual busquemos representarlos por cuestión de rigurosidad, atributo esencial de toda teoría matemática".*

También expone unas reflexiones desde el punto de vista pedagógico que posteriormente ampliará:

> *"Además, estoy seguro de que las nociones no deben adquirirse por la experiencia, sino que deben ser explicadas de entrada en*

*toda su amplitud, con precisión, claridad}' pureza, para después consolidarse con ejercicios, para que se anclen con profundidad en la memoria y puedan aplicarse a estudios ulteriores. Tal es la regla esencial en el arte de enseñar las matemáticas, cuyas dificultades residen únicamente en la abstracción y la amplitud de las nociones, y que, para que sean fáciles, exigen que no dejemos de ejercer nuestro juicio sirviéndonos de signos como abreviaturas de las representaciones mentales..."*

El texto de Lobachevski estaba a la altura de los dos grandes textos algebraicos de la época, nos referimos al famosísimo libro sobre *Álgebra* de L. Euler y al *Cours d'analyse algébrique* del matemático francés A. Cauchy, publicado en París en 1821.

**El álgebra *de Lobachevski***

| *Capítulos* | *Contenido* |
| --- | --- |
| Del I al XII | *Sobre las operaciones aritméticas con los números positivos y negativos.*<br>• *las expresiones algebraicas*<br>• *la resolución de las ecuaciones de primer grado,*<br>• *la teoría de las potencias y raíces,*<br>• *logaritmos, operaciones y aplicaciones* |
| XIII y XIV | *Están dedicados a las funciones trigonométricas determinadas mediante funciones exponenciales utilizando las conocidas fórmulas de Euler.* |
| XV | *Generalidades sobre diferencias finitas.* |
| XVI y XVII | *Resolución de ecuaciones de grados superiores.* |

Por la disposición del material y el tratamiento del contenido, la obra de Lobachevski se parece más al libro de Euler que al de Cauchy.

En un momento dado Lobachevski escribe:

> *"la solución general de ecuaciones de grados superiores al cuarto, todavía no se ha encontrado..."*

Lo que nos muestra que ignoraba la existencia de la memoria del matemático noruego N. Abel, aparecida en 1829, que establece la imposibilidad de resolver (por radicales) las ecuaciones superiores al 4º grado.

**La última obra geométrica: "Pangeometría"**

*En 1855 se celebraba el cincuentenario de la fundación de la Universidad de Kazán y por ese motivo invitaron a Lobachevski a escribir un artículo a incluir en un número conmemorativo especial.*

*A pesar de estar enfermo e impedido visualmente, se puso a trabajar y ese mismo año tuvo aún fuerzas para concluir una obra titulada "Pangeometría ", aparecida en las* Memorias de la Universidad de Kazán *en el mismo 1855 en ruso.*

*Como la celebración del cincuentenario se aplazó al año siguiente (Lobachevski ya había fallecido) los responsables de la publicación del número especial recurrieron al artículo de Lobachevski del año anterior pero traducido al francés.*

*La "Pangeometría" no contiene prácticamente nada nuevo que Lobachevski no hubiera dicho ya con anterioridad, quizás los aspectos más relevantes son los siguientes.*

- *Es una obra escrita de manera menos clara que obras anteriores, lo que seguramente no ayudó, en su época, a su comprensión.*
- *No contiene ni un solo dibujo, hay que tener en cuenta que en esa época Lobachevski estaba prácticamente ciego y dictaba sus trabajos a estudiantes que colaboraron con él.*
- *La obra está plagada de resultados, muchos de ellos obtenidos mentalmente, que venían a mejorar cálculos publicados anteriormente.*

*A Lobachevski le preocupaba que su geometría fuera una* *ciencia consistente desde el punto de vista lógico, ésto es, exenta de contradicciones internas. Al respecto, en el final de su obra dice:*

*"Habiendo mostrado en lo que precede de qué modo es preciso calcular la longitud de las líneas curvas, el área de las superficies y el volumen de los cuerpos, nos es permitido afirmar que la Pangeometría es una ciencia completa. Una simple ojeada sobre las ecuaciones que expresan la dependencia existente entre los lados y los ángulos de los triángulos rectilíneos, es suficiente para demostrar que, a partir de aquí, la Pangeometría desarrolla un método analítico que reemplaza y generaliza los métodos analíticos de la Geometría ordinaria... Así, las ecuaciones son la base de la Geometría más general pues no dependen de la suposición de que la suma de los tres ángulos de todo triangulo rectilíneo sea igual a dos ángulos rectos".*

*La "Pangeometría" finaliza con una reflexión sobre un tema que durante buena parte de su vida le había preocupado: el tipo de geometría tiene lugar en la naturaleza.*

*Sólo la experiencia puede confirmar la hipótesis del postulado de Euclides, por ejemplo la medida efectiva de los tres ángulos de un triángulo rectilíneo, la cual puede efectuarse de diversas maneras"*

Hay que destacar que Lobachevski expone en su obra muchos resultados conocidos por otros autores, pero lo hace de una manera más elegante. Es de señalar el tratamiento de la serie binomial y de la serie para el logaritmo. También presenta una teoría elemental de los determinantes y un nuevo procedimiento para el cálculo de las raíces de las ecuaciones algebraicas. Este procedimiento fue muy difundido en su época, pero curiosamente es conocido bajo el nombre de *método de Graeffe* (la memoria de Graeffe se publicó en 1837).

Para finalizar, diremos que el manual de Lobachevski es muy original y constituyó una obra de matemáticas notable. De hecho, Lobachevski fue conocido en su época por el contenido de este libro y no por sus investigaciones geométricas.

## §. El fallecimiento de Lobachevski

Su salud se fue deteriorando de tal manera que en 1855 dejó de ejercer todos sus cargos y responsabilidades. Un año más tarde, exactamente el 12 de febrero de 1856, falleció.

*La tumba de Lobachevski.*

En los funerales celebrados en su honor, el profesor N. N. Bülich pronunció un apasionado y emotivo discurso que reproducimos en parte:

> *"Hace exactamente 51 años, día por día, el 14 de febrero de 1805, los alumnos del Gymnasium de Kazán asistían con su director y sus maestros a la inauguración solemne de la Universidad de Kazán, beneficio supremo aportado a nuestra región por la voluntad del emperador Alejandro I. Entre esos alumnos, de los cuales pocos están vivos, se encontraba éste, alrededor de cuya tumba nos hemos reunido hoy, con el corazón apretado, para decirle nuestro adiós en el pórtico de la inexorable eternidad, en este día aniversario de la inauguración. Hay en esa coincidencia de fechas un sentido misterioso, pero hermoso, que aclara toda la vida del difunto. La inauguración de*

*la universidad abrió un brillante porvenir a las ciencias en nuestra distante región. Los contemporáneos de la época citan la sed de conocimientos, la ardiente aspiración que se apoderó entonces de esos jóvenes espíritus a los cuales se ofrecía la posibilidad de satisfacer su celo noble y puro. El talento y el trabajo intelectual no podían hundirse en el olvido: ante ellos se abría un largo camino. Entre esos jóvenes, los hijos mayores, mejores, de nuestra joven universidad, estaba Nikolai Ivanovich Lobachevski, nuestro venerado jefe. Formado para la ciencia entre las paredes de esta universidad, consagró a ella toda su vida. No podríamos citar un solo acontecimiento, ningún hecho por poco notable que fuese en la historia de nuestra universidad, desde entonces hasta hoy, sin asociarlo al nombre de Lobachevski. Su noble vida está íntimamente unida a la historia de la Universidad de Kazán; esa vida es una crónica viva de aquélla, de sus esperanzas y aspiraciones, de su crecimiento y de su desarrollo. El primer miembro de nuestro centro docente en hacerse de un nombre en la ciencia fue Lobachevski, su mejor pupilo. No nos pertenece hablar aquí de sus trabajos de matemáticas que le valieran el renombre y la gloria; sólo mencionemos lo que ha hecho por la universidad. Recordemos que fue rector durante 19 años consecutivos, lo que es casi un ejemplo sin precedentes. ¡Qué no ha hecho en el transcurso de ese largo período de actividad administrativa! Científico devoto en cuerpo y alma a su trabajo, se preocupó constantemente en favorecer el conocimiento de tal suerte que,* *en esta provincia alejada, la ciencia marchase con su tiempo. Como mentor formó varias generaciones de profesores de matemáticas, que le deben toda su cultura. Como administrador aumentó los medios materiales de la universidad que le es deudora de muchas cosas. Estas paredes, estos bellos edificios que rodean la construcción central, la preciosa colección de libros de la biblioteca y el valioso mobiliario de los gabinetes, deben su existencia a la actividad incesante de Nikolai Ivanovich y, a menudo, a su sola iniciativa. Acogió con favor toda proposición o acción útil y la idea de ello con frecuencia emanaba de él mismo. Durante cerca de 50 años sirvió a la ciencia, a nuestro bien común, con abnegación, tenacidad y honradez. Su vida entera, desde sus fuerzas vigorosas hasta las aspiraciones vacilantes de la vejez, cuando su espíritu entró en lucha contra la debilidad del cuerpo, fue consagrada a su universidad querida; el nombre de Lobachevski figura con honor en cada página de su historia, que de él guarda un recuerdo reconocido. La ciencia y el conocimiento, tales fueron los intereses mayores de su vida laboriosa Sirvió con constancia y rectitud a la causa que había desposado en su juventud y jamás volvió la espalda a la vía escogida. Incluso en sus últimos tiempos, cuando los sufrimientos físicos afectaban gravemente su moral, y sus fuerzas la traicionaban, su corazón permaneció, como en el pasado, fiel a la ciencia y a su causa. Jamás olvidaremos cómo, abatido por la enfermedad y herido por la ceguera, sin embargo, no dejaba de venir a nuestros exámenes* *y a nuestras reuniones solemnes, sin cesar jamás de interesarse en todo lo que le rodeaba. Estamos embargados de un profundo sentimiento de respeto por ese hombre noble y venerado que, a despecho de su extremo agotamiento, permaneció fiel a su deber y a su vocación.*

*Monasterio de San Juan en Kazán.*

*Agradezcámosle de todo corazón, en este momento solemne y doloroso en que le damos nuestro último adiós, por esa vida consagrada a la ciencia, toda penetrada de un solo pensamiento sublime, eminentemente digno de citarse como ejemplo. Un hombre que, como objetivo de su vida, ha escogido trabajar en el dominio espiritual, tiene sobre lo$ otros la ventaja de que su nombre y su recuerdo no están a punto de borrarse. Las proezas intelectuales nos son más valiosas que todas las demás, porque* *sólo la ciencia, el pensamiento y el conocimiento forman los fundamentos de la prosperidad social. Por eso todos nosotros tenemos el corazón apretado ante este ataúd. Como el propio pensamiento, un pensador no debe morir, y él vivirá, porque el pensamiento no muere. ¡Adiós noble sembrador del espíritu y del pensamiento!*

*Monumento a Lobachevski en Kazán.*

*Te acompañarán en la vía desierta de la eternidad, nuestros sinceros lamentos. ¡No has vivido en vano, has consumado tu vocación con integridad, el recuerdo de tu existencia nos servirá de ejemplo! ¡Gracias por habernos dado con tu vida una lección imperecedera! ¡Paz a tus cenizas! ¡Que tu recuerdo viva eternamente!".*

Había muerto el hombre pero nacía el mito.

# Capítulo 12

## Gauss, Bolyai, Riemann Los otros padres de las geometrías no euclidianas

*"Los axiomas geométricos no son, pues, ni juicios sintéticos a priori ni hechos experimentales".*
*Henri Poincaré*

### §. Gauss y el problema de las paralelas

Actualmente, Gauss es considerado uno de los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos (los otros dos son Arquímedes y Newton) y el más sobresaliente entre todos los que trabajaron en el problema de las paralelas.

Gauss estudió en la Universidad de Göttingen, donde A. G. Kastner (1719-1800) era catedrático de matemáticas. Allí conoció también a su amigo el húngaro Farkas Bolyai, que a la postre también se dedicaría, durante muchos años, al problema de las paralelas. Los primeros trabajos de Gauss sobre el quinto postulado discurrieron por dos vías: una de ellas defendía la posibilidad de nuevas geometrías y la otra daba cabida al descubrimiento de contradicciones al modo de Saccheri.

Gauss conocía el problema desde muy joven. En una carta dirigida a su amigo Schumacher, escrita el año 1831, le dice que desde que tenía 15 años ya era consciente de que podía existir una geometría distinta a la del sabio Euclides y perfectamente consistente desde el punto de vista lógico.

Los primeros contactos de Gauss con el problema de las paralelas seguramente provienen de su maestro Kastner. Al igual que Lambert, el profesor Kastner estaba convencido de que el quinto postulado no podía ser probado a partir de los otros cuatro.

Los documentos que permiten entender el proceso de las investigaciones seguidas por Gauss respecto del problema de las paralelas son principalmente cartas que él mismo envió a distintos científicos: Schweikart, Taurinus, Farkas Bolyai, János Bolyai, Gerling, Bessel, Schumacher etc. A modo de resumen, sabemos que Gauss había descubierto en su geometría una unidad absoluta, al igual que Lambert. Además, en sus fórmulas hace referencia a una constante K similar a las que obtuvo Schweikart y que más tarde también obtendrían Lobachevski y János Bolyai. Lo que se pone de relieve en las cartas es la inmensa tragedia que tuvo que suponer para Gauss ir en contra del pensamiento dominante, defendido por I. Kant en la *Crítica de ¡a razón pura,* editada en 1781.


*Sello conmemorativo de la antigua República Democrática Alemana dedicado a C. F. Gauss.*

Este contratiempo personal le inclina inicialmente a defender, de alguna manera, las ideas del filósofo. Los planteamientos de esta influencia se pueden seguir en las cartas que escribió a distintas personas entre los años 1799 y 1813. La cuestión que aborda durante este periodo es la demostración del quinto postulado partiendo de la hipótesis de su falsedad.

En la segunda etapa, Gauss supera todos los obstáculos y vacilaciones y se lanza a construir teoremas de lo que él llamará primero *geometría antieuclidiana,* posteriormente *geometría astral* y, por último, *geometría no euclidiana.* De la que algunos autores, como Morris Kline, le consideran el descubridor.

Sea como fuere, Gauss trabajó en secreto durante muchos años en el problema de las paralelas. En 1799 (tenía 22 años) escribió una carta a su amigo F. Bolyai en los siguientes términos:

> *"En cuanto a mí, he hecho ya algunos progresos en mi trabajo. Sin embargo, el camino que he elegido no conduce en absoluto a la meta que buscamos [la deducción del axioma de las paralelas], cual me aseguráis haber alcanzado. Más bien parece obligarme a dudar de la verdad de la geometría misma. Bien es verdad que he llegado a resultados que para la mayoría de la gente constituirían una demostración [de la deducción del axioma de las paralelas de Euclides a partir de los otros axiomas]; pero a mi entender no prueban absolutamente nada. Por ejemplo, si pudiéramos demostrar la existencia de un triángulo rectilíneo cuya área sea mayor que cualquier área*

*dada, entonces estaría dispuesto a probar toda la geometría [euclídea] de forma totalmente rigurosa.*

*La mayoría tomaría esta afirmación por un axioma; pero yo no. Podría, efectivamente, ocurrir que el área permaneciera siempre por debajo de un cierto límite, por muy lejanos entre sí que pudieran estar los vértices del triángulo*

En 1824, ocho años antes de la aparición de la obra de J. Bolyai y cinco años antes de la publicación del primer opúsculo (en ruso) de Lobachevski, Gauss escribe a Taurinus una carta de un gran interés en la que se pueden ver los avances que había realizado en la geometría no euclídea:

*"En cuanto a tu intento no tengo nada (o casi nada) que decir salvo que es incompleto. Cierto es que tu demostración de la prueba de que la suma de los tres ángulos de un triángulo plano no puede superar 180a carece, en cierto sentido, de rigor geométrico. Pero esto en sí mismo tiene fácil remedio y no existe duda de que tal imposibilidad puede probarse con todo rigor. Pero la situación es muy diferente en la parte segunda: que la suma de ángulos no pueda ser menor que 180a; éste es el punto crítico, el escollo en que ocurren todos los naufragios. Supongo que no te has ocupado de este problema por mucho tiempo. Yo he reflexionado sobre él cerca de 30 años, y no creo que haya nadie que haya pensado sobre esta segunda parte más que yo, aunque nunca he publicado nada.*

*La hipótesis de que la suma de los tres ángulos es menor que 180a conduce a una curiosa geometría, muy diferente de la nuestra [la euclídea], pero completamente consistente, la cual he desarrollado a mi entera satisfacción, de manera que puedo resolver cualquier problema de ella, a excepción de la determinación de una constante, que no puede ser designada a priori: cuanto más grande se tome la constante, más se aproxima esta geometría a la euclídea; y coincide con ella cuando la constante es infinitamente grande. Los teoremas de esta geometría parecen paradójicos y, al no iniciado, absurdos; pero una pausada y constante reflexión revela que no contienen nada imposible en absoluto. Por ejemplo, los tres ángulos de un triángulo pueden llegar a ser tan pequeños como se desee, con solo alargar los lados suficientemente; sin embargo, el área del triángulo nunca puede pasar de un límite definido, no importa lo que se alarguen los lados, ni tampoco alcanzarlo.*

*Todos mis esfuerzos para descubrir una contradicción, una inconsistencia, en esta geometría no euclídea han sido vanos, y la única cosa en la que se opone a nuestras concepciones es que, si fuese cierta, existiría en el espacio una magnitud lineal, determinada por ella misma (pero desconocida para nosotros). Pero me parece que, a pesar de los metafísicos, sabemos muy poco, o casi nada acerca de la naturaleza real del espacio, como para considerar un absolutamente imposible lo que nos parece como no natural. Si esta geometría no euclídea fuese cierta y fuera posible comparar tal constante con magnitudes tales como* *las que encontramos en nuestras mediciones de la Tierra y de los cielos, podría ser determinada a posteriori. Consecuentemente, bromeando he expresado algunas veces el deseo de que la geometría euclídea no fuese cierta, pues entonces tendríamos a priori una unidad de medida absoluta.*

*No temo que un hombre que ha demostrado poseer una mente matemática reflexiva interpretará mal lo que acabo de decir, pero en todo caso, considera esto como comunicación privada de la que no se ha de hacer uso público, ni otro ninguno que pudiera llevar a cualquier tipo de publicidad. Tal vez yo mismo, si tengo más tiempo que el que ahora poseo, publique mis investigaciones".*

Gauss es el primer matemático que se dio cuenta de que la geometría euclídea no es necesariamente la geometría del espacio físico. De hecho (según cuenta Morris Kline) intentó verificar qué tipo de geometría describía mejor el espacio físico. En un escrito, fechado en 1827, comunica a la comunidad científica que había medido la suma de los ángulos del triángulo formado por las cumbres de tres montañas (con la intención de saber si era mayor, menor o igual a 180°), la referida suma excedía de 180° en aproximadamente 15"¿qué significaba este resultado?

Gauss era consciente que este resultado no probaba nada, puesto que el triángulo en cuestión era demasiado pequeño y, además, en esa época los aparatos de medida no tenían la suficiente precisión. Durante años, y en secreto, Gauss debió realizar esfuerzos de toda índole para justificar la nueva geometría, así como para saber cuál es la geometría que mejor explica el mundo en que vivimos.

A primera vista, la idea de que alguna de estas extrañas geometrías podía competir e incluso suplantar a la geometría clásica de Euclides parecía un absurdo. En 1817, en una carta dirigida por Gauss a H. W. Olbers (1758-1840) ya se puede leer:

> *"Estoy cada vez más convencido de que la necesidad física de nuestra geometría euclídea no puede ser probada, al menos no por la razón humana ni para la razón humana. Quizá en otra vida podamos obtener una visión profunda de la naturaleza del espacio que, por el momento es inalcanzable. Hasta entonces, no debemos colocar la geometría al nivel de la aritmética, que es puramente a priori, sino al de la mecánica".*

A juicio de muchos historiadores de las matemáticas, este comentario indica que Gauss fue el primero en creer que era posible, desde el punto de vista lógico, una geometría no euclidiana, y que los intentos de encontrar contradicción en ellas eran, por tanto, vanos.

*La Universidad de Göttingen, donde Gauss trabajó casi 50 años, en un grabado antiguo.*

En su largo recorrido intelectual Gauss pasó por ciertos miedos y zozobras en relación con la aventura de las paralelas, que claramente expresa en cartas que dirigidas a L. Ch. Gerling y a F. W. Bessel.

> *"Me siento muy contento de saber que usted tenga el valor de reconocer la eventualidad de que nuestra teoría de las paralelas y, por tanto, toda nuestra geometría, sean falsas. Pero las avispas, cuyo nido usted destruye, se levantarán sobre nuestra cabeza".*
>
> *Carta de Gauss a L. Ch. Gerling (1818).*

> *"Es probable que no pueda escribir rápidamente mis investigaciones sobre el problema de las paralelas para que puedan ser publicadas. Además, es posible que no me decida*

*jamás a escribirlas, puesto que temo a los gritos de los beodos cuando enuncie mis puntos de vista ".*

*Carta de Gauss a F. W. Bessel (1829).*

Entre las cartas y manuscritos redactados por Gauss se encuentran dos de verdadero interés, dirigidas a Schumacher (1831 y 1846).

*"Hace algunas semanas he comenzado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto, que se remontan en parte a cuarenta años, y de los cuales nada había redactado, lo que me ha obligado tres o cuatro veces a empezar de nuevo toda la labor en mi cabeza. No quisiera, sin embargo, que todo esto pereciera conmigo".*

*Carta de Gauss a Schumacher (1831).*

*"Recientemente tuve la ocasión de hojear de nuevo el libro de Lobachevski (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, 1840), que contiene los principios de la geometría que debería existir y que sería rigurosamente consecuente si la geometría euclidiana no fuera verdadera. Un tal Schweikart ha dado a esa geometría el nombre de Astralgeometría; el propio Lobachevski la llama geometría imaginaria. Usted sabe que hace ya 54 años (desde 1792) que tengo la misma convicción (que he ampliado un poco en estos últimos tiempos, pero sobre la cual no quiero detenerme aquí); en cuanto al objeto de la misma; no he encontrado nada nuevo para mí en la obra de Lobachevski; pero al desarrollarla, el autor sigue una vía diferente a la mía y hace demostración de un arte consumado,*

*de un espíritu puramente geométrico. Considero mi deber llamar la atención sobre ese libro a usted que, sin duda alguna, le complacerá mucho ".*

*Carta de Gauss a Schumacher (1846).*

***Los Bolyai***

**Farkas Bolyai**

*Farkas Bolyai (1775-1856) fue el padre de János Bolyai. Estudió en Göttingen, donde Kastner fue su profesor y fue compañero de Gauss, del que sería un buen amigo. Posteriormente enseñó matemática, física y química en Marosvásárhely (Hungría).*


*Izquierda: Farkas Bolyai. Derecha: Imagen de János Bolyai en un sello húngaro, se piensa que el retrato es figurado ya que no existe ninguna imagen auténtica suya.*

*Farkas Bolyai se interesó por el postulado de las paralelas ya desde su época universitaria. Se carteó con Gauss acerca de* *este tema durante la mayor parte de su vida, en ocasiones para comunicarle resultados propios y en otras para informarle de las investigaciones realizadas por su hijo.*

*Su principal trabajo, Tentamen Juventutem studiosa in elementa Matheseos (1832-33) fue un intento de conseguir una base sistemática y rigurosa de la geometría, aritmética, álgebra y análisis. Era claramente un libro menor pero que incluía un apéndice importantísimo: la obra geométrica de su hijo János.*

*Cuando Farkas Bolyai renegó del postulado de las paralelas se dedicó a escribir poesía, componer música y escribir arte dramático.*

***János Bolyai***

*János Bolyai (1802-1860) nació en Transilvania, en un tiempo en el que era parte del imperio austro-húngaro (aunque la entonces ciudad húngara de Kolozsvár se llama ahora Ctuj y pertenece a Rumania). János tenía una mente muy capaz para las matemáticas y con sólo 13 años ya dominaba el cálculo y las matemáticas superiores. También llegó a ser un estupendo violinista. Estudió en el Colegio Real de Ingeniería, en Viena, desde 1818 hasta 1822. Posteriormente se unió al cuerpo de ingenieros de la armada, donde pasó 11 años. Se cuenta que Fue el mejor practicante de esgrima y bailarín de la armada del imperio austríaco. Es un personaje singular y un excelente lingüista, hablaba 9 idiomas entre los que se incluían el chino* *y el tibetano.*

*La influencia de su padre fue fundamental. Entre 1820 y 1823 preparó un tratado sobre un sistema completo de geometría no euclidiana. Antes de que se publicara su trabajo, descubrió que Gauss ya había trabajado en el mismo tema y había obtenido resultados similares. A pesar de que Gauss no publicó nunca su trabajo, quizás por falta de confianza, esto supuso un duro golpe para János Bolyai. De cualquier forma, su trabajo se publicaría en 1832 como apéndice a un libro de su padre. János padeció fiebres que le imposibilitaron trabajar en muchas ocasiones y en 1833 fue jubilado en su carrera militar. Aunque nunca publicó más de las 24 páginas del famoso apéndice, dejó más de 20.000 páginas manuscritas de trabajo matemático cuando murió. Actualmente se pueden encontrar la mayoría de sus escritos en la biblioteca Bolyai-Teleki en Tirgu-Mures (Rumania).*

Para finalizar, no queremos olvidar una obra fundamental de Gauss en el campo de la geometría: *Disquisitiones generales circa superficies curvas (1828).*

En esta obra Gauss pone las bases de la geometría diferencial. En efecto, Gauss fue el primero en abordar sistemáticamente el estudio de las superficies del espacio euclídeo iniciando así la después denominada geometría diferencial (nombre que se debe al geómetra italiano L. Bianchi (1856-1928). Si bien, el estudio de las superficies alabeadas ya habían sido considerado por Euler, Monge y otros.

En esta obra Gauss pone ya de manifiesto el papel determinante de la *curvatura* (denominada hoy *curvatura de Gauss).* Ya se vislumbran las distinciones entre los aspectos locales y globales, e intrínseco y extrínseco, en el estudio de las superficies. Gauss también fue el primero en darse cuenta que era más conveniente pensar en las superficies como objetos que se pueden dotar localmente de dos coordenadas, y no como subconjuntos del espacio cuyas coordenadas verifican una determinada relación o como fronteras de sólidos.

Un logro importante de Gauss fue la demostración de que la curvatura depende de la métrica y no de la forma en que la superficie se dobla dentro del espacio tridimensional Entre sus resultados más importantes figura el famoso *theorema egregium* en el que establece la invariancia del valor de la curvatura de Gauss, así como el *teorema integral de Gauss-Bonnet* que relaciona el valor de la curvatura de la superficie con *la curvatura geodésica*, y que a la postre se ha convertido en el recurso más importante de la teoría global de superficies.

Los trabajos de Gauss servirían posteriormente a B. Riemann para que construyera su geometría diferencial n-dimensional.

## §. La obra geométrica de los Bolyai

Los Bolyai comenzaron a estudiar el problema de las paralelas seguramente convencidos de que encontrarían la solución. De hecho, Farkas mandó un escrito a Gauss en el que le informaba de sus hallazgos y lo cerca que estaba de la solución. Sin embargo, los esfuerzos de Farkas fueron tan enormes y penosos que cuando su hijo le comunicó que estaba trabajando en el problema de las paralelas le escribió en los siguientes términos:

> *"No debes intentar así el problema de las paralelas. Yo conozco ese camino hasta su mismísimo fin. He atravesado esa noche sin fondo, que extinguió toda luz y alegría de mi vida. Te suplico que abandones la ciencia de las paralelas...*
> *Me di media vuelta cuando comprendí que ningún hombre puede alcanzar el fondo de esa noche. Regresé desconsolado, sintiendo misericordia de mí y de toda la humanidad".*

En otro lugar Farkas Bolyai le dice a su hijo:

> *"Me parece haber estado ya en esas regiones; haber viajado por todos los escollos de ese infernal Mar Muerto, y haber regresado siempre con el mástil quebrado y la vela desgarrada. El mal estado en que me hallo y mi postración datan de esa época. Sin pensarlo arriesgue mi vida y mi felicidad... Te ruego que abandones ese camino... "*

A pesar de tan dolidas recomendaciones, sin embargo János Bolyai siguió trabajando en el problema de las paralelas.

> *"Estoy decidido ahora a publicar una obra sobre la teoría de las paralelas, apenas haya ordenado la materia y las circunstancias me lo permitan. No lo he hecho todavía; pero el camino que he seguido ha ciertamente, por decirlo así, casi alcanzado el propósito; el propósito propio no está alcanzado;*

*pero he descubierto cosas tan hermosas, que me he quedado sorprendido con ellas y se debería lamentar por siempre que se hubiesen perdido. Cuando las veáis lo reconoceréis vos mismo. Entre tanto no os puedo decir más que esto: he creado de la nada un nuevo universo. Todo lo que os he comunicado hasta ahora no es más que un palacio de papel frente a esta torre. Estoy tan persuadido de que ésto me dará gloria, como si hubiese ya acaecido".*

*Carta de J. Bolyai a su padre (1823).*

Farkas Bolyai expresó el deseo de incluir inmediatamente en su obra *Tentamen* la teoría de su hijo, porque:

*"...si la cosa está realmente conseguida, es conveniente apresurarse a darla a la luz pública por dos motivos: primero, porque las ideas pasan fácilmente de uno a otro, que puede anticiparse a publicarlas; en segundo lugar, porque hay también algo de verdad en esto que muchas cosas tienen una época, en la cual son descubiertas al mismo tiempo en más lugares, precisamente como en primavera brotan las violetas en todas partes; y puesto que toda lucha científica es sólo una gran guerra, a la que no sé cuando seguirá la paz, se debe, cuando se puede, vencer, puesto que aquí la victoria corresponde al primero ".*

*Carta de Farkas Bolyai a su hijo*

János Bolyai siguió trabajando con ahínco y en 1826 presentó su trabajo a un profesor suyo de la academia militar llamado J. Walter von Eckwerh (1789-1857). Tres años más tarde le remitió el manuscrito final a su padre, que no llegó a comprenderlo en su totalidad. Sin embargo, intuía que tenía en sus manos una memoria científica de primer orden y la incluyó como apéndice del primer volumen del *Tentamen.* Inmediatamente, remitió su libro (1831) a su amigo Gauss, pero parece que el trabajo de los Bolyai nunca llegó a su destino. Medio año más tarde (1832), Farkas volvió a enviar a Gauss el trabajo de su hijo con el encargo de que lo leyera y si fuera posible le diera su opinión.

Gauss al leer el apéndice del *Tentamen*, escribió a un amigo:

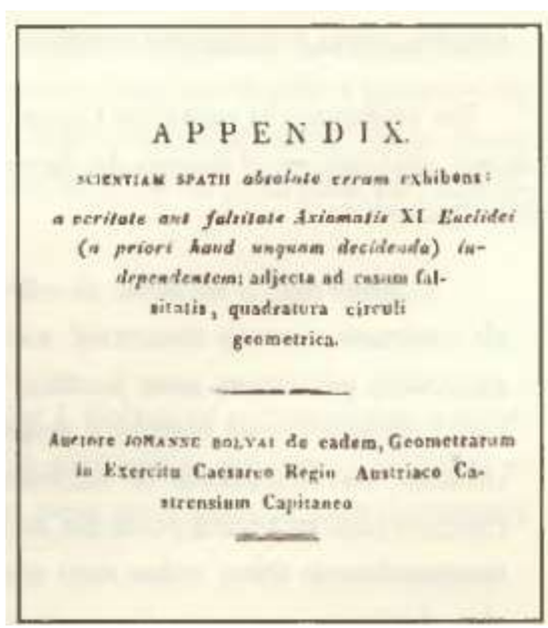
> *"...considero que este joven geómetra es un genio de primer orden... "*

Sin embargo, seis semanas después de recibir el envío, Gauss escribió al padre de János en los siguientes términos:

> *"Ahora, algunas palabras sobre el trabajo de tu hijo. Comienzo por decirte que no puedo alabarlo. Evidentemente, por un instante estarás sorprendido, pero no puedo proceder de otra forma, puesto que eso significaría ensalzar mis propios elogios. Todo el contenido de la obra de tu hijo, la vía que sigue, así como los resultados que ha obtenido, casi coinciden con aquellos que yo mismo he logrado hace unos 35 años. En realidad estoy sorprendido enormemente. Tenía la intención de no publicar nada de mi propio trabajo mientras estuviera vivo, por*

*consiguiente, muy poca cosa he anotado en el papel. La mayor parte de la gente no tiene puntos de vista correctos acerca de las cuestiones de que se trata. He encontrado muy pocos que hayan manifestado un interés particular por lo que les he comunicado al respecto. Para estar en condiciones de asimilarlo es necesario, ante todo, sentir hondamente, de manera muy viva, lo que aquí falta en realidad; ahora bien, la mayor parte de la gente no lo comprende del todo. No obstante, me proponía, con el tiempo, exponer todo eso en el papel, con el fin de evitar, en todo caso, que dichas ideas mueran conmigo Por lo tanto, me sorprende en exceso que me despojen de ese trabajo, y a la vez me siento muy feliz de que sea precisamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya adelantado de tan excelente manera".*

*Carta de Gauss a Farkas Bolyai (1832).*



APPENDIX.

SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens:
*a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem*; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.

Auctore JOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo

*Portada del "Apéndice" de János Bolyai dentro de la obra Tentamen de Farkas Bolyai.*

Farkas comunicó inmediatamente, por carta, a su hijo la respuesta de Gauss, añadiendo:

> *“La respuesta de Gauss respecto a tu obra redunda en honor de nuestra patria y de nuestra nación*

Sin embargo, la carta de Gauss produjo un efecto completamente distinto en el ánimo de János Bolyai. Sus palabras fueron las siguientes:

> *"A juicio mío, y tal sería, de ello estoy persuadido, la opinión de cualquier persona imparcial, todos los argumentos y motivos invocados por Gauss para justificar la negativa de publicar (en vida) cualquier cosa sobre sus propios trabajos referentes a esta cuestión, son absolutamente inconsistentes. En efecto, tanto en la ciencia como en la vida corriente, es importante descifrar las cosas universalmente útiles, sobre todo si éstas aún no han sido aclaradas, despertar, por todos los medios, la conciencia insuficiente o incluso dormida, de la verdad y el derecho; esto es lo que precisamente hay que fortalecer y desarrollar. Son muy pocos los que tienen la facultad de dominar las matemáticas. Invocando ese pretexto, Gauss podría muy bien, para ser consecuente, guardar para sí una parte considerable de sus excelentes trabajos. El hecho de que desgraciadamente haya todavía entre los matemáticos, incluso entre los que son célebres, muchas personas superficiales, no puede servir de base para que continuemos, en el futuro, comunicando nada más que los resultados superficiales y dejando a la ciencia en el*

*letargo, es decir, en el estado heredado. Tal actitud sería contranatural y absolutamente absurda. Estamos sorprendidos, de manera muy desagradable, por el hecho de que, en lugar de reconocer con franqueza y honestidad el gran valor del "Apéndice" y del Tentamen, de expresar su alegría y simpatía, y de reflexionar acerca de los medios para preparar una larga vía a una empresa útil, Gauss trata de andar con rodeos y se apresura a pronunciar piadosos deseos y a emitir lamentos a propósito de la falta de instrucción de la gente. No en esto, ni mucho menos, consiste el sentido de la vida y el mérito verdadero".*

Leyendo esta nota, uno se da cuenta del inmenso disgusto que tenía J. Bolyai. Por su cabeza pasaron multitud de pensamientos negativos, algunos incluso dirigidos hacia su padre, ya que sospechó, inicialmente, que le había comunicado varias de sus ideas al genial matemático alemán. Otros hacia Gauss, por no aceptar deportivamente la prioridad del descubrimiento.

**§. Contenido del "Apéndice"**

Las primeras reflexiones de J. Bolyai se encaminaron a construir una teoría absoluta de la geometría, esto es, aplicando el método deductivo de Euclides pero sin decidir a priori la validez o no del quinto postulado.

En la primera carta escrita a su padre, en 1823, ya le hace saber que ha descubierto una fórmula mediante la cual se puede obtener el ángulo de paralelismo Π(a) en función de una constante k.

$$e^{\frac{-a}{k}} = \tan\frac{1}{2}\Pi(a)$$

La obra de Bolyai, en términos generales, es muy parecida a la de Lobachevski. Sus resultados más importantes son:

- Definición de las paralelas y sus propiedades, independientes del quinto postulado euclídeo.
- Definición absoluta del horiciclo y la horosfera.
- Obtención de las fórmulas trigonométricas planas en el caso no euclídeo.
- Estudio de la geometría esférica sin recurrir al postulado de Euclides.
- Problemas resolubles en la geometría no euclídea, en particular obtiene un cuadrado equivalente a un círculo dado (cuadratura del círculo en el caso de la geometría no euclídea).
- Demostración de que la geometría obtenida sobre la horosfera coincide con la geometría euclídea.
- Demuestra la independencia de la trigonometría esférica del postulado de Euclides.

En algunos aspectos su obra es más avanzada que la de Lobachevski. Por ejemplo, en el campo de la trigonometría esférica obtiene más fórmulas; si bien la mayoría ya fueron conocidas y descritas por Taurinus.

La obra de J. Bolyai concluye de la siguiente manera (1831):

> *"Queda finalmente por demostrar la imposibilidad de decidir a priori si existe la Geometría euclidiana u otra Geometría distinta. Esto, sin embargo, queda reservado para mejor ocasión*

A partir de 1831, J. Bolyai se preocupó por perfeccionar su geometría tratando de responder a una serie de cuestiones que
aún estaban sin resolver. Una de ellas era si se podía demostrar rigurosamente que el quinto postulado no era consecuencia de los otros cuatro.

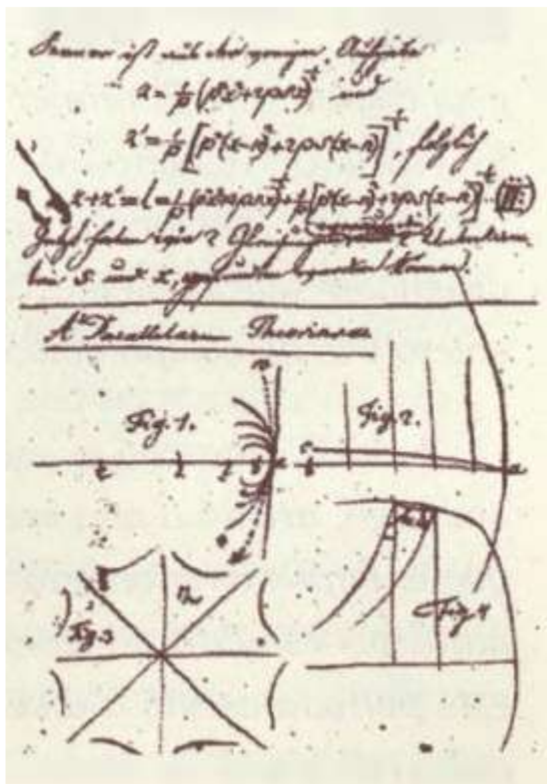
Durante algunos años más, János siguió trabajando en su geometría absoluta, pero en 1841 llegó a sus manos un libro titulado *Geometrische Untersuchungen* de un tal Lobachevski. El impacto intelectual al leer el pequeño tratado escrito por un matemático ruso, desconocido para él, debió ser enorme. Al principio pensó que el tal Lobachevski no existía, incluso llegó a pensar que detrás del trabajo podía estar el mismísimo Gauss. Posteriormente reconocerá que la obra ha tenido que ser escrita por un genio, calificándola de obra maestra. Se da cuenta de que la obra de Lobachevski es similar a la suya, y posiblemente se decepcione al leer la introducción, en la que el matemático ruso hace referencia a que se trata de una versión alemana de una memoria publicada originalmente en 1828, tres años antes de la publicación de su “Apéndice".

## §. Riemann y la geometría

Los creadores de la geometría hiperbólica murieron casi al mismo tiempo:

Gauss en 1855, Lobachevski en 1856 y J. Bolyai en 1860.

Por aquellos años sus obras eran prácticamente desconocidas pero sus teorías, aún insuficientemente establecidas y fundamentadas, plantearían pronto una serie de difíciles problemas, lo que condujo a una revisión del edificio geométrico clásico.

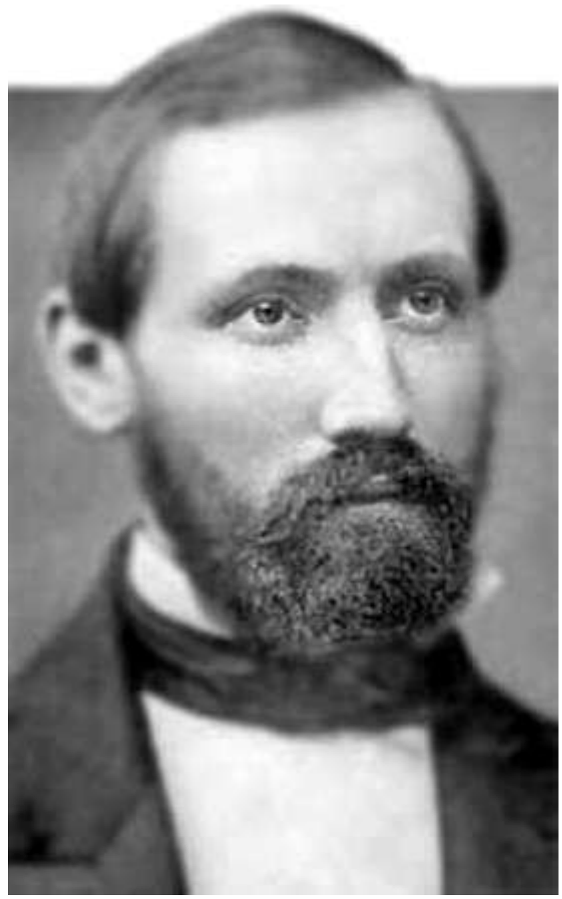


*Dibujos de János Bolyai referentes a sus investigaciones sobre la geometría no euclidiana (1820).*

El punto de partida de esta revolución fue la célebre exposición de B. Riemann presentada en 1854, si bien no sería publicada hasta 1868. Riemann introduce espacios muy generales mediante el dato constituido por el cuadrado del elemento lineal $ds^2$, y sugiere el segundo tipo de geometría no-euclídea, que corresponde al caso en el cual la suma de los ángulos de un triángulo es superior a dos rectos.

***Riemann***

*Bernhard Riemann (1826- 1866) nació en Breselenz (Hannover, Alemania) en 1826 Con apenas seis años ya era capaz de resolver problemas de aritmética elemental. Los estudios de secundaria los realizó en el* Gymnasium *de Lüneburg, cuyo director, Schmalfuss, poseía una excelente biblioteca particular que puso a su disposición. El primer libro que cayó en sus manos fue la* Teoría de números *de Legendre. Cerca de novecientas páginas que Riemann devolvió a Schmalfuss a los seis días diciéndole sencillamente: "Es un libro admirable; lo he leído entero y lo he comprendido todo*



*En 1846 marchó a estudiar teología a Göttingen. Sin embargo, asistió a una serie de conferencias matemáticas que le* *impresionaron enormemente. De esta manera alternaría sus estudios de teología con los de matemáticas. En este periodo asistió a diversos cursos de matemáticas dictados por Moritz A. Stern (1807-1849) y por Gauss. Sus estudios de matemáticas los completó en Berlín, a cuya universidad debe su formación matemática, puesto que fue discípulo de C. Jacobi (1804-1855), Dirichlet (1805-1859), J. Steiner (1796-1863) y F. Eisenstein (1823-1852), que dejaron en él huella profunda.*

*Al acabar sus estudios, en 1849, volvió Göttingen donde se doctoró en 1851 con una tesis de la que Gauss dijo en su informe oficial:*

*"Esta tesis es una prueba fidedigna de las profundas y penetrantes investigaciones del autor en el punto de que se trata y denuncia, al propio tiempo, un espíritu creador, activo, realmente matemático, y de fecunda originalidad. El lenguaje es claro y conciso y, en algunos pasajes, bello y elegante. La mayoría de los lectores hubieran preferido, sin duda, mayor claridad en la exposición; pero, en su conjunto, este trabajo es un estudio sustancial cuyo valor intrínseco no sólo satisface las condiciones exigidas en una tesis para el doctorado, sino que las supera ampliamente*

*Con ayuda de Gauss, Riemann se incorporó a la Universidad de Göttingen y comenzó a trabajar para obtener la habilitación, requisito imprescindible para ser profesor. Para ello tenía que disertar sobre un tema. Propuso tres (dos sobre* *temas de electricidad y uno sobre geometría) creyendo que, según la costumbre, el tribunal elegiría el primero de la terna; pero en este caso se decantó por el último porque se refería a una cuestión sobre la que Gauss, que presidía el tribunal, llevaba trabajando casi sesenta años. El tema en cuestión era fundamentos de la geometría*

*Riemann trabajó con una intensidad sobrehumana preparando la exposición sobre el tema y el día 10 de junio de 1854 impartió su famosa disertación titulada: "Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grande liegen " ("Sobre las hipótesis que están en los fundamentos de la geometría "). Riemann, a quien le aterraba la idea de tener que hablar en público, presentó la geometría bajo un aspecto completamente nuevo y su exposición entusiasmó a Gauss, tanto por la belleza de la misma como por su profundidad.*

*Riemann considera a la geometría como no-euclídea, haciéndola depender del concepto de medida. Su trabajo se puede dividir en dos partes, en la primera Riemann plantea el problema de cómo definir un espacio n-dimensional y propone una definición de lo que hoy se conoce como variedad de Riemann. La segunda parte de la conferencia plantea cuestiones profundas acerca de la relación de la geometría con el mundo en el que vivimos.*

*Respecto a la exposición, dice Monastyrsky :*

*“Entre la audiencia de Riemann solamente Gauss fue capaz de apreciar la profundidad de los razonamientos de*

*Riemann... La conferencia superó todas sus expectativas y le sorprendió gratamente... A su regreso a la facultad, Gauss comentó con W. Weber entre grandes alabanzas sobre la profundidad de los pensamientos que Riemann había presentado".*

*Este brillante trabajo permitió que Riemann iniciara su carrera como profesor. Sus ideas relativas a la geometría han tenido profundos efectos en el desarrollo de la matemática y de la teoría física modernas.*

Se funda en realidad en dos hipótesis, una de las cuales niega la posibilidad de trazar una recta paralela a otra por un punto exterior, mientras que la segunda abandona la concepción de la infinitud de la recta. Esta *geometría elíptica,* introducida explícitamente por Klein en 1871, es *a priori* más desconcertante que la de Gauss, Lobachevski y Bolyai, lo que explica que estos geómetras no la tuvieran en cuenta aunque correspondiera a uno de los casos previstos por Saccheri y Lambert.

Después de haber establecido esas nociones generales, Riemann se pregunta cuales son los ejemplos más simples de la geometría que él ha creado. Se trata de espacios en que la curvatura en cada punto es la misma, es decir, espacios de curvatura constante.

Tales espacios, naturalmente, se dividen en tres categorías: los de curvatura positiva constante, cuya geometría suele llamarse *elíptica*; los de curvatura negativa constante, cuya geometría es conocida con el nombre de *hiperbólica*, y los de curvatura nula, cuya geometría se llama *parabólica.*

La geometría parabólica (geometría del espacio de curvatura nula) es la geometría euclidiana; la geometría hiperbólica no es otra cosa que la geometría de Lobachevski.

¿Cuál es, pues, la geometría elíptica? En lo que se refiere a la geometría elíptica bidimensional, la respuesta es absolutamente clara: es la geometría de la esfera, después de identificar los pares de puntos antipodales. Las rectas son las circunferencias máximas de la esfera, con todos los pares de puntos antipodales identificados, de forma que dos rectas, distintas, cualesquiera se cortan en un punto, ya que las circunferencias máximas correspondientes se cortan en dos, pero antipodales. Además, vemos que la longitud de las rectas es finita, y el área de todo el plano elíptico también.

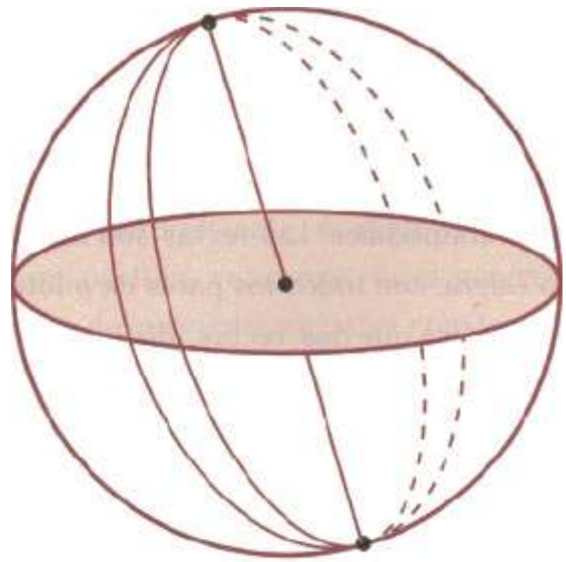


Fig. 22

Al demostrar, en el capítulo 5, que el quinto postulado de Euclides implica el postulado de Playfair, se usó que, gracias a los postulados de Euclides sin el quinto, por un punto exterior a una recta existe al menos una paralela. Como en la geometría elíptica no existe tal paralela, debe existir algo en el sistema de Euclides, sin el quinto postulado, incompatible con la geometría elíptica. Siguiendo las demostraciones se ve que la existencia de la paralela se deduce de la

Preposición 16 de Euclides y su demostración necesita que las rectas tengan longitud infinita. Es este hecho el que es incompatible con la geometría elíptica.

## §. Distinción entre lo infinito y lo ilimitado

El primer científico en percibir la existencia de una geometría compatible con la *hipótesis del ángulo obtuso* fue Riemann. Su idea se basa en sustituir la hipótesis de la *recta infinita* por otra más general de *recta ilimitada.* La distinción entre los conceptos infinito e ilimitado es clave para entender el sistema geométrico expuesto por Riemann.

Dice Riemann:

> *"Cuando se extienden las construcciones del espacio a lo infinitamente grande, es necesario distinguir entre lo ilimitado y lo infinito; lo primero pertenece a las relaciones de extensión, mientras que lo segundo, a las relaciones métricas. Que el espacio sea una variedad ilimitada de tres dimensiones es una hipótesis que se aplica en todas las concepciones relativas al mundo externo, que nos sirve para completar en todo momento el campo de nuestras percepciones y construir los lugares posibles de los objetos observados, y que se encuentra constantemente verificada en todas estas aplicaciones. La propiedad del espacio de ser ilimitado posee, pues, una certeza empírica, que ningún otro dato empírico posee. Pero la infinidad del espacio no se sigue de aquí de ningún modo; al contrario, si se suponen los cuerpos independientes de sus posiciones y se*

*atribuye al espacio una curvatura constante, el espacio sería necesariamente finito, apenas esta medida de la curvatura tuviese un valor positivo, por pequeño que fuera... "*

Las ideas de Riemann son muy profundas y está fuera de lugar explicarlas aquí, pero sí concluiremos con una idea fundamental que él mismo describe: lo básico de la geometría es la idea de posición, y las relaciones de posición se pueden expresar por medio de dirección y distancia. Partiendo de estas nociones básicas sería posible describir la geometría clásica e inventar nuevas geometrías que también podrían ser interesantes para otros campos del saber, por ejemplo en física.

# Capítulo 13

## Los modelos geométricos

*"Los hechos son entes que no pueden manipularse ni discutirse".*
*RobertBurns (1759-1796)*

Lobachevski había ideado una nueva geometría pero surgía una gran pregunta: ¿había algún modelo real capaz de explicar dicha teoría?

La primera interpretación intuitiva de la geometría de Lobachevski se dio en 1868. El matemático italiano E. Beltrami hizo notar que la geometría intrínseca de una superficie, llamada pseudoesfera, coincidía con la geometría sobre parte del plano de Lobachevski.

La superficie en cuestión se genera a partir de una curva muy conocida, llamada tractriz. Esta curva tiene la propiedad de que la longitud del segmento de tangente comprendido entre el punto de tangencia y el punto de corte con el eje OY es constante.

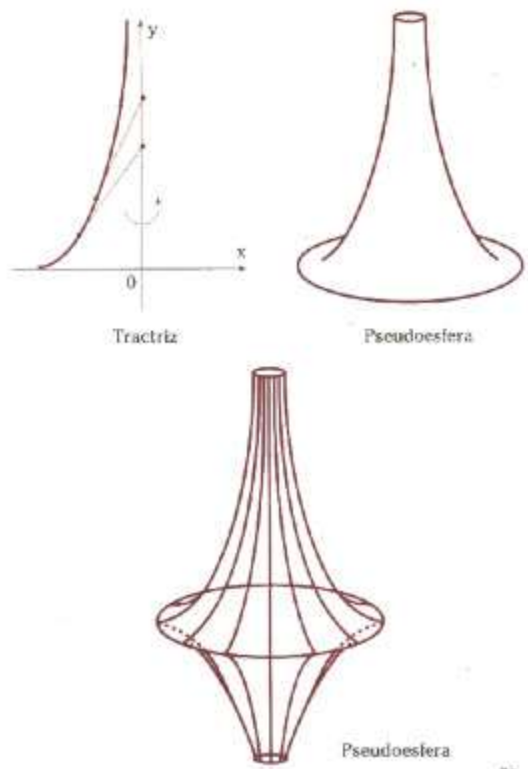



Fig. 23

El eje OY es una asíntota de la tractriz. Si giramos la curva alrededor de su asíntota se engendra una superficie llamada pseudoesfera.

***Beltrami***

*Eugenio Beltrami (1835-1900) nació en Cremona (Italia) y murió en Roma. Provenía de una familia de artistas Además de las matemáticas tenía interés por la música y la pintura. Sus necesidades económicas impidieron que se dedicara por completo a las matemáticas, pero dio clases en Bolonia de álgebra y geometría analítica. Más tarde aceptó la cátedra de geodesia en la Universidad de Pisa. Su trabajo se extendió por casi todas las matemáticas, tanto*

*puras como aplicadas, pero especialmente se centró en las teorías sobre superficies del espacio con curvatura constante, en ellas era un consumado especialista.*

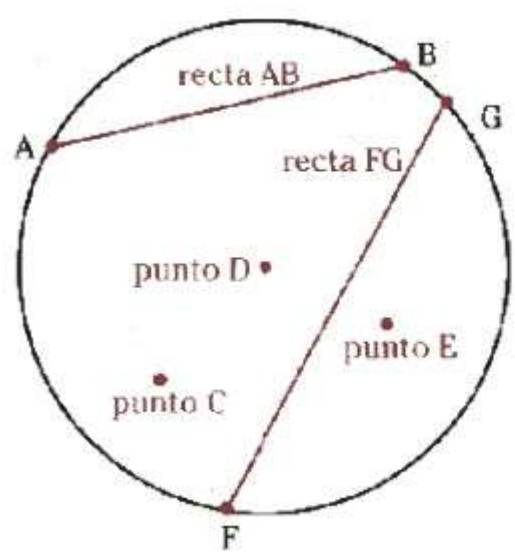
El hallazgo de Beltrami viene a decirnos que todas las relaciones geométricas sobre una parte del plano de Lobachevski coinciden con las relaciones geométricas sobre una parte conveniente de la pseudoesfera, naturalmente suponiendo una serie de convenios:

> *"Los segmentos de recta son las líneas, que unen dos puntos, con menor longitud sobre la superficie, las llamadas geodésicas. La distancia entre dos puntos se define como la longitud de la*

*línea más corta que une a ambos sobre la superficie. Diremos que dos figuras son iguales si entre sus puntos se puede establecer una correspondencia, de forma que la distancia entre puntos correspondientes sea la misma. Un movimiento sobre la pseudoesfera que conserve las dimensiones desde el punto de vista de la geometría intrínseca, aunque vaya acompañado de torsiones, representa un movimiento en el plano de Lobachevski. Las longitudes, áreas y ángulos se miden, como de costumbre, sobre la superficie, y corresponden a longitudes, áreas y ángulos en la geometría de Lobachevski".*

***El modelo de Klein***

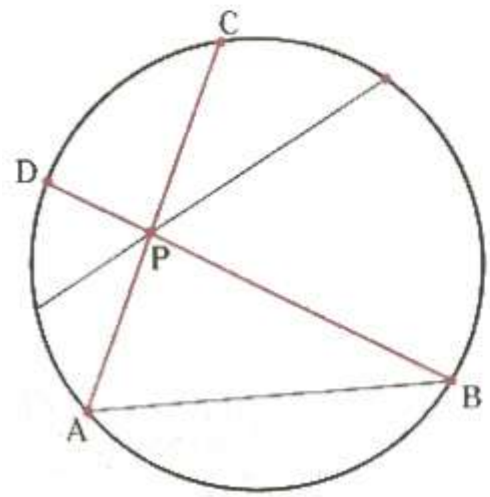
*En el plano euclidiano tomemos un círculo y consideremos únicamente su interior. Convenimos en llamar plano al interior de! círculo, las rectas de dicho plano son las cuerdas del círculo (con la exclusión, por tanto, de los puntos extremos), los puntos del plano serán los puntos interiores del círculo, tal como se muestra en el dibujo:*




*En este modelo dos rectas son paralelas si los segmentos correspondientes tienen un extremo común. Un movimiento será cualquier transformación que transforma rectas en rectas y que aplique* *el círculo en sí mismo.*

*Mediante estos acuerdos se pueden demostrar todos los resultados de la geometría de Lobachevski dentro del círculo e inversamente*

*El famoso axioma de Lobachevski ("Por un punto P fuera de la recta AB pasan al menos dos rectas paralelas a la recta dada") se muestra perfectamente en la siguiente representación:*




*En el dibujo se pueden ver las dos paralelas (AC y BD) que pasan por P, así como otras muchas hiperparalelas que no cortan a la recta AB y que también pasan por P.*

*El modelo de Klein (actualmente es conocido como modelo de Beltrami-Cayley-Klein) así construido sirve para interpretar la geometría plana de Lobachevski.*

La interpretación de Beltrami muestra que, en estas condiciones, a cada proposición de la geometría de Lobachevski referida a una parte del plano corresponde una situación en la geometría intrínseca sobre la pseudoesfera. El descubrimiento del matemático italiano es notable: la geometría de Lobachevski no es más que una exposición abstracta de la geometría sobre la pseudoesfera. Por tanto la geometría imaginaria creada por el matemático ruso tiene un perfecto significado real.

Realmente este aspecto ya había sido descubierto, treinta años antes, por F. Minding, quién probó, de hecho, las propiedades que demuestran la coincidencia entre la geometría de Lobachevski y la Geometría intrínseca de la pseudoesfera.

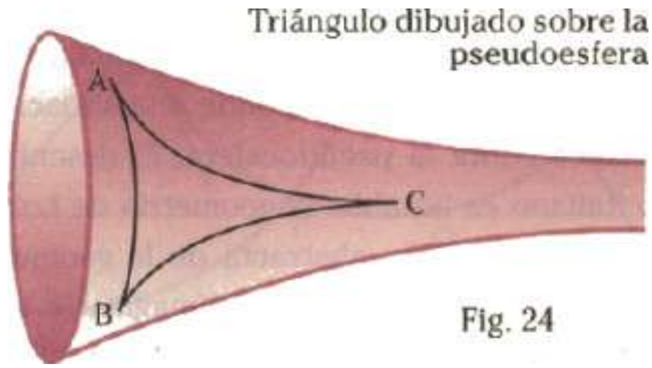


Fig. 24

El descubrimiento de Beltrami cambió por completo la actitud de los matemáticos hacia la geometría de Lobachevski, que pasó de ser una creación imaginaria a ser algo real y perfectamente tangible. Sin embargo, el problema de dar una interpretación real de la geometría de Lobachevski sobre el plano completo estaba sin resolver, pero en 1870 el matemático alemán Félix Klein encontró una ingeniosa solución a éste problema.

Al modelo de Klein le siguió el famoso modelo del matemático francés H. Poincaré (1854-1912). En el plano euclidiano tomemos un círculo y consideremos únicamente su interior. Convenimos en llamar plano al interior del círculo, nuestros puntos son puntos corrientes dentro del círculo, pero nuestras líneas son los arcos de los círculos dentro del círculo dado, con la condición de que corten al mismo en ángulos rectos, tal como muestra la Figura 25.

En el dibujo se puede ver que por el punto P pasan dos rectas, mientras que por el punto P* pasan tres rectas, además dos de esas rectas son paralelas a la recta *t* El modelo descrito se conoce como modelo circular de Poincaré.

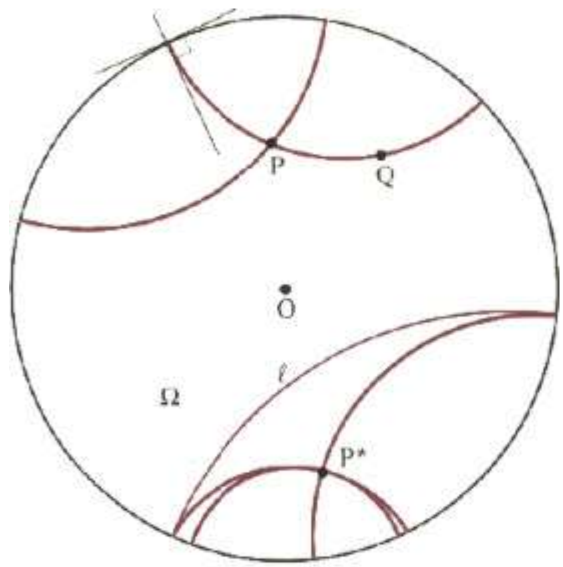


Fig. 25 Modelo circular de Poincaré

El mismo Poincaré ideó otro modelo muy interesante, conocido en la literatura como modelo semiplanar de Poincaré. En el plano euclídeo se traza una recta, que divide al plano en dos semiplanos, se identifican los puntos hiperbólicos como los puntos pertenecientes al semiplano superior (sin incluir los puntos de la recta), las rectas hiperbólicas son las semicircunferencias (contenidas en el semiplano superior, cuyo centro está situado en la recta) y las semirrectas perpendiculares a la recta original, por tanto las rectas hiperbólicas serán ortogonales a la recta inicial.

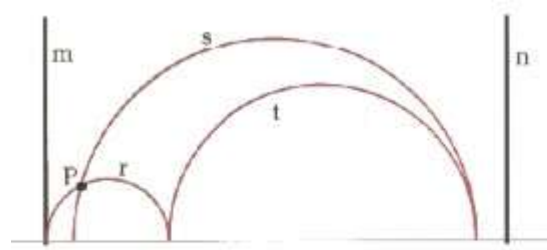


Fig. 26 Modelo semiplanar de Poincaré

En nuestro dibujo las rectas hiperbólicas son r, s y t, así como las m y n; las rectas r y s se cortan en el punto P y además las rectas s y t son paralelas (ya que no se cortan al no pertenecer los puntos de la recta inicial al plano hiperbólico).

E. Beltrami también observó en 1868 que el quinto postulado de la geometría elíptica se verifica en la superficie de la esfera a condición de que las rectas elípticas sean interpretadas como círculos máximos sobre la esfera, y considerando que los puntos diametralmente opuestos de la esfera es un objeto único que llamaremos punto de la geometría de Riemann.

***Escher y la geometría de Lobachevski***

*En el grabado aparecen los peces de diferente tamaño. Así, las figuras que están situadas cerca de la frontera son más pequeñas para nosotros que las situadas en el interior del círculo.*

*Mientras que para los habitantes de ese universo lobachevskiano, todas las figuras tienen el mismo tamaño.*

*El modelo circular de Poincaré ha cautivado a muchos geómetras y artistas. El holandés Maurits Escher (1898-1972) se inspiró en el modelo circular de Poincaré para describir en una magnifica ilustración el universo de Lobachevski.*

En este breve resumen no podemos olvidar las aportaciones del matemático Ernst A. Minding (1824-1873), que inició el estudio geométrico sobre las superficies con curvatura negativa. Matemáticos posteriores fueron capaces de unificar los tres tipos de geometrías, basándose en el concepto de curvatura propuesto por Gauss.

## §. La difusión de las geometrías no euclidianas

La historia de cómo la geometría de Gauss, Lobachevski y Bolyai llegó a ser aceptada es compleja de contar. En 1866, diez años después de la muerte de Lobachevski, el matemático francés G. J. Hoüel (1823-1886) publicó una traducción al francés del libro de Lobachevski Geometrische Untersuchungen junto con parte de la correspondencia de Gauss sobre geometría imaginaria. En 1867 el matemático italiano G. Battaglini (1826-1894) fue quien tradujo al italiano la "Pangeometría" de Lobachevski.

Beltrami, en 1868, proporcionó una realización concreta de la geometría de Lobachevski, ese mismo año apareció la traducción rusa de Geometrische Untersuchungen editada por Letnikov. Karl Weierstrass (1815-1897) impartió un seminario (1870) sobre la geometría de Lobachevski al que acudió Félix Klein, que por esa época ya trabajaba en el problema de las geometrías al mismo tiempo que lo hacía el noruego M. S. Lie (1842-1899).

Las ideas de Klein sobre su visión general de la geometría, expresadas en su famoso Programa de Erlangen, así como las contribuciones de H. Poincaré (1854-1912) hicieron que por fin se aceptaran las ideas de Lobachevski.

***Curvatura y geometrías***

*Gauss ya conocía la fórmula*

$$\int_T K ds = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \Pi$$

*En la misma se relaciona la integral de superficie, aplicada* *sobre un triángulo geodésico ABC, con la suma de sus tres ángulos, siendo K la curvatura en cada punto de la superficie en cuestión.*

*Si analizamos las superficies de curvatura constante, nos encontramos con tres posibilidades:*

***a)*** *Si $K = 0$ entonces la integral de superficie es igual a cero, y por tanto en este tipo de superficies se cumple que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \Pi$. Por tanto, sobre superficies de curvatura nula la suma de los ángulos de un triángulo es igual a $\Pi$.*

***b)*** *Si $K > 0$, si hacemos $K = 1/k^2 > 0$ , entonces la integral de superficie nos indica que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \Pi$*

*Sobre superficies de curvatura positiva la suma de los ángulos de un triángulo geodésico es mayor que $\Pi$.*

*Además como $\int_T ds = \Delta$ = Área del triángulo, tenemos que el área del triángulo geodésico ABC es proporcional al exceso de la suma de sus tres ángulos sobre el valor de 180", o bien*

$$\Delta = k^2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \Pi)$$

*Una superficie de curvatura constante y positiva $K = 1/k^2$ es necesariamente una esfera de radio k. Estas fórmulas son, entonces, consistentes con las de Lambert y Taurinus (capítulo 6).*

***c)*** *Si $K < 0$, si hacemos $K = - 1/k^2 < 0$, entonces la integral de superficie nos indica que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < \Pi$*

*Sobre superficies de curvatura negativa la suma de los ángulos de un triángulo geodésico es menor que $\Pi$.*

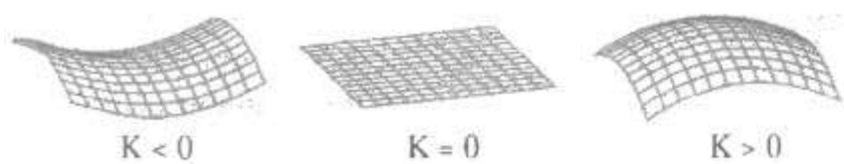
*Siguiendo los pasos anteriores, obtenemos*

$$\Delta = k^2(\Pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C})$$

*que nos indica que el área del triángulo geodésico ABC es proporcional al defecto de la suma de sus tres ángulos sobre el valor de 180°.*

*Las superficies de curvatura nula y de curvatura constante positiva ya eran conocidas, corresponden a la geometría plana euclidiana y a la geometría sobre una esfera. Mientras que la curvatura negativa está relacionada con la geometría de Lobachevski o hiperbólica.*

*El siguiente esquema es suficientemente explicativo:*




| Superficies de curvatura constante | | | |
|---|---|---|---|
| Valor de la curvatura | Tipo de superficie | Carácter específico | Tipo de geometría |
| K > 0 | esfera | A + B + C > 180° | elíptica |
| K = 0 | plano | A + B + C = 180° | parabólica |
| K < 0 | pseudoesfera | A + B + C < 180° | hiperbólica |

A partir de la década de los 60 del siglo XIX, el camino geométrico que iniciaron Gauss, Lobachevski y Bolyai discurrió por una etapa que el filósofo y matemático británico Bertrand Russell llamó etapa métrica. Representantes de dicha corriente son B. Riemann y Hermann von Helmholtz (1821-1894), iniciándose, en paralelo, la llamada investigación sintética o proyectiva. Con la figura del geómetra A. Cayley (1821-1895) se abre un nuevo camino, ya que fue el primero en realizar el intento de generar un espacio euclídeo a partir de un espacio proyectivo. El testigo lo recogió F. Klein demostrando que era posible generalizar el método de Cayley tanto para espacios euclidianos como no euclidianos. En 1872, en el Programa de Erlangen, queda plasmada la idea central de Klein de que las diferentes geometrías pueden ser caracterizadas como un grupo de transformaciones y que una geometría trata realmente de los invariantes de ese grupo de transformaciones.

*Felix Klein*

Curiosamente el interés por las geometrías no euclídeas declinó poco después de la obra de Klein, en parte porque éste fue capaz de generalizar todas las geometrías conocidas, y en parte porque no se veían aplicaciones de dichas geometrías al mundo real. Además, no hay que olvidar la primacía que por esos años tenía la geometría proyectiva, incluso B. Russell (1897) se atrevió a decir “que la geometría proyectiva era necesariamente la forma a priori de cualquier geometría del espacio físico”.

**§. Problema de la consistencia**

Con el paso de los años quedaba una gran pregunta sin resolver: ¿eran consistentes las geometrías no euclidianas que se habían inventado?

La consistencia de estas geometrías se estableció partiendo del supuesto de que la geometría euclídea era consistente. Los modelos anteriores nos dicen claramente que si la geometría euclidiana es consistente entonces la geometría hiperbólica o imaginaria también lo es.

Para la mayoría de los matemáticos, hasta 1880, la geometría que propuso Euclides era perfectamente consistente, y además era aceptada como la única geometría que explicaba el mundo físico. Sin embargo, no había una demostración rigurosa y convincente de que la geometría euclidiana fuera consistente.

El panorama era el siguiente: teníamos modelos perfectamente consistentes dentro de una geometría que se admitía consistente. Por tanto, era urgente abordar el problema de consistencia dentro de la geometría clásica (la de Euclides). En ello se pusieron a trabajar los mejores matemáticos de la época. Había que pulir las demostraciones, definir y precisar términos no definidos, completar los teoremas que faltaban, revisar las demostraciones realizadas anteriormente, proponer nuevas definiciones y postulados, etc. El asunto que tenían entre manos era, ni más ni menos, fundamentar la geometría.

# Capítulo 14
## Fundamentación de la geometría

*"La lógica es el arte de equivocarse con confianza".*
*Anónimo*

El demostrar que la geometría de Lobachevski no es contradictoria se reduce a formular de una manera completa y exacta sus postulados. Además, como los supuestos iniciales de la geometría de Lobachevski sólo difieren de los de la de Euclides en el postulado de las paralelas, la tarea consiste en dar una formulación completa y precisa a los postulados de la geometría de Euclides. Como ya sabemos, tal formulación no se encuentra en la obra de Euclides

El trabajo de construir los postulados de Euclides de una forma exacta y completa surgió precisamente en conexión con el desarrollo de la geometría de Lobachevski, así como de una tendencia general a hacer más rigurosos los fundamentos de las matemáticas.

Como una generalización de los sistemas axiomáticos de las geometrías no euclidianas se inicia una etapa conocida como *etapa axiomática formalizada*, y aparece una nueva idea de rigor lógico: *los sistemas axiomáticos formales.*

En este periodo hay un riguroso tratamiento de la geometría de Euclides, y varios matemáticos trabajan en esta línea: Moritz Pasch (1843-1930), Giuseppe Peano (1858-1932), Giuseppe Veronese (1854-1927), Mario Pieri (1860-1913) y David Hilbert (1862-1943), entre otros.

## §. Hilbert y sus *Fundamentos de la geometría*

La obra de Hilbert *Fundamentos de la geometría* (1899) es considerada actualmente como una réplica moderna de los *Elementos* de Euclides.

El académico español José M. Sánchez Ron dice al respecto:

> *"Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de la geometría) es todo un clásico de la Matemática, una obra cuya influencia se dejó sentir durante mucho tiempo en diversas áreas del pensamiento matemático y filosófico. Ninguno de sus precursores se le puede comparar en perfección y capacidad de persuasión. Con un mínimo de simbolismo, Hilbert convenció a la mayor parte de los geómetras, como ni Pasch o Peano habían logrado, del carácter abstracto y puramente formal de la Geometría, y su gran autoridad estableció el método axiomático, no sólo en la Geometría del siglo XX, sino también en casi toda la Matemática a partir de 1900.*
>
> *Como trabajo constituyó en su momento una cierta novedad, ya que hasta entonces su autor apenas se había ocupado de la Geometría: únicamente había publicado en 1895 una nota acerca*
>
> *de la línea recta como el camino más corto entre dos puntos, en donde presentaba una generalización del modelo de geometría hiperbólica propuesto por Cayley y Klein . No obstante, parece que los gérmenes de Grundlagen der Geometrie se encontraban en la mente de Hilbert desde mucho antes de 1899, al menos esto es lo que se deduce de una anécdota contada por Otto*

*Blumenthal (1876-1944), quien señaló que a comienzos de 1891, regresando en tren a Königsberg después de haber asistido a una conferencia de Hermana Wiener en Halle dedicada a los fundamentos y estructura de la Geometría (más concretamente, al papel de los teoremas de Desargues y Pascal-Pappus), Hilbert manifestó: «Uno debería ser capaz de decir siempre, en lugar de puntos, líneas rectas y planos; mesas, sillas y jarras de cerveza»*

En la obra de Hilbert se sistematiza, con rigor lógico formal, el saber geométrico anterior. Hilbert inicia su famosa obra estableciendo tres clases de objetos a los cuales denomina *puntos, rectas* y *planos.* Admite que tales elementos están en relaciones mutuas que designa por expresiones como *estar en, entre, paralelo, congruente* y *continuo,* cuya exacta y completa descripción se consigue por medio de los axiomas o postulados de la geometría. La relación de los axiomas de la geometría está basada en los conceptos de punto, línea, recta, movimiento, y nociones tales como: el punto X está *sobre* la recta a; el punto B se encuentra *entre* los puntos A y C ; un *movimiento* lleva el punto X sobre el punto Y.

*"Concebimos los puntos, rectas y planos en ciertas relaciones recíprocas y expresamos estas relaciones con palabras tales como "estar situado", "entre", "congruente", "paralelo", "continuo". La descripción completa de estas relaciones hecha exactamente y con fines matemáticos resulta de los axiomas de la Geometría. Los axiomas de la Geometría podemos dividirlos en cinco grupos: cada uno de estos grupos, aisladamente,*

*expresa ciertos hecho fundamentales correspondientes a nuestra intuición".*

*D. Hilbert*

En el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París en 1900, Hilbert pronunció una famosa conferencia en la que intentó, basándose en las principales tendencias de las investigaciones matemáticas de finales del siglo XIX, predecir de alguna manera las direcciones futuras de los progresos matemáticos. Para ello propuso veintitrés problemas que, a sus ojos, representaban los puntos de discusión que podrían eventualmente hacer progresar las matemáticas.

Los problemas sugeridos por Hilbert provienen de diferentes áreas de las matemáticas y se adivina fácilmente la profundidad y complejidad de su contenido. Se incluye la hipótesis del continuo, la buena ordenación de los números reales, la conjetura de Goldbach, la trascendencia de las potencias de números algebraicos, la hipótesis de Riemann, la extensión del principio de Dirichlet y muchos otros temas.

Una de estas cuestiones era: ¿son las matemáticas decidióles? es decir, ¿hay un método definido que pueda aplicarse a cualquier sentencia matemática y que nos diga si esa sentencia es cierta o no? Esta cuestión recibió el nombre de *entscheidungsproblem (problema de decisión)* y para resolverla, Alan

Turing (1912-1954), construyó, en 1936, un modelo formal de computador, conocido como *la máquina de Turing* y demostró que había problemas que una máquina no podía resolver.

FESTSCHRIFT

ZUR FEIER DER

ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS

IN GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN

VON DEM FEST-COMITEE

INHALT

D. HILBERT: GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

E. WIECHERT: GRUNDLAGEN DER ELEKTRODYNAMIK

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER

*La primera edición de Fundamentos de la geometría de Hilbert (89 páginas), apareció en un volumen que también incluía un trabajo de E. Wiechert. Se publicó en 1899 en Leipzig.*

En *Fundamentos de la geometría,* Hilbert afirma que los axiomas o postulados (actualmente estos términos se consideran equivalentes) son proposiciones absolutamente arbitrarias cuyo conjunto constituye la definición implícita de los conceptos primitivos. Demuestra la compatibilidad e independencia de sus axiomas o postulados y, con todos ellos, establece los teoremas o demostraciones de la geometría, mediante razonamientos puramente lógicos.

La construcción axiomática formal debida a Hilbert ha sido modificada en los últimos años, aunque conservando la estructura que él le dio. En ese sentido son notables las contribuciones del matemático italo-argentino Beppo Levi.

En síntesis, la geometría euclidiana, con los axiomas de Hilbert, es un sistema axiomático deductivo, cuyos objetos no son objetos físicos, sino, ideales o sea, pertenecen a un espacio conceptualizado. Como en todo sistema deductivo, los axiomas o postulados deben cumplir ciertas condiciones (consistencia o no contradicción, independencia, completitud). Se trata, en definitiva, de un modelo clásico construido sobre las ideas de Euclides.

Desgraciadamente la obra de Hilbert no está exenta de defectos e imprecisiones y ha dado lugar a muchos trabajos y discusiones. La no independencia del sistema axiomático de Hilbert fue señalada y subsanada por el americano E. H. Moore en 1902 y por A. Rosenthal en 1912. Modernamente el desarrollo axiomático más perfecto, según el modelo euclídeo, ha sido propuesto por los polacos Karol Borsuk y W. Szmielew.

El largo camino iniciado con el estudio de las geometrías desembocó en problemas de fundamentación. Hacia 1930 el estado de los fundamentos de las matemáticas era tolerable, aunque es verdad que de vez en cuando se encontraban paradojas y situaciones comprometidas, pero en el ánimo de los matemáticos había grandes esperanzas de asentar las matemáticas sobre un sistema lógico riguroso.

Había, no obstante, dos problemas que continuaban preocupando a los matemáticos: el problema de establecer la consistencia de las matemáticas (propuesto por Hilbert en 1900) y el problema de la completitud.

***Hilbert***

*David Hilbert (1862-1943) nació en un pueblo cerca de Königsberg, la capital de la Prusia del Este en aquella época (hoy Kaliningrado). Asistió a un instituto en su ciudad natal.*

*Después ingresaría en la Universidad de Königsberg donde estudió bajo la dirección de C. Ferdinand Lindemann (1852-1939). Obtuvo su doctorado en 1885 con una tesis que hizo progresar enormemente la teoría de invariantes algebraicos. Uno de sus mejores amigos fue Hermann Minkowski (1864-1909), que también fue estudiante de doctorado en la misma universidad. En 1886 fue nombrado miembro directivo de la Universidad de Königsberg, alcanzando las categorías de profesor extraordinario en 1892 y de catedrático en 1893. En 1895 fue nombrado profesor de la Universidad de Göttingen ocupando* *el puesto de Heinrich Weber (1842-1913).*

En 1931, el matemático Kurt Gödel (1906-1978) anunció a la comunidad matemática un resultado espectacular, conocido como el teorema de la incompletitud. Demostró que en cualquier sistema matemático axiomático, que contenga la aritmética de los números enteros, hay proposiciones indecidibles, es decir, tales que ni ellas ni su negación pueden ser verificadas con los axiomas del sistema.

Este teorema es un hito en las matemáticas. Durante años se había intentado establecer un conjunto de axiomas en el que se pudiesen basar todas las matemáticas. Bertrand Russell (1872-1970) lo intentó en *Principia mathematica,* David Hilbert también lo pretendió. Por fin, Kurt Gödel demostró que la tarea era imposible.

*La eminente posición que ocupaba en el mundo de las matemáticas, desde su famosa conferencia del año 1900, hizo que otras instituciones quisieran convencerlo de que abandonara Göttingen. En 1902, la Universidad de Berlín le ofreció la cátedra de L. Fuchs (1833-1902), pero prefirió quedarse en Göttingen y convenció a las autoridades para que crearan otro puesto de profesor para su amigo Minkowski.*

*Hilbert trabajó sobre los invariantes algebraicos, geometría, ecuaciones integrales, también se dedicó a la física (decía que era demasiado difícil para los físicos), los fundamentos de las matemáticas y la lógica matemática. Entre sus discípulos se encuentran Hermana Weyl (1885-1995), Ernst Zermelo (1871-*

*1953) y el campeón mundial de ajedrez Emanuel Lasker (1868-1941).*

*Hilbert recibió muchos honores y reconocimientos. En 1930 se retiró a su ciudad, de la que fue nombrado hijo predilecto. Pronunció entonces un discurso que acabó con sus seis palabras famosas: "Wir müssen wissen, wir werden wissen" ("Debemos saber, de modo que sabremos").*

***Algunos axiomas o postulados de la geometría de Hilbert***

***Axiomas de incidencia o de enlace***

*1. Por dos puntos pasa una línea recta, y sólo una.*

*2. Una línea recta contiene al menos dos puntos.*

*3. Existen al menos tres puntos que no se hallan sobre una recta.*

***Axiomas de orden***

*1. De cada tres puntos que se hallan sobre una línea recta, hay uno que se encuentra entre los otros dos.*

*2. Si A y B son dos puntos de una línea recta, existe al menos un punto C sobre la recta tal que R se halla entre A y C.*

*3. (Axioma de Pasch) Sean A, B, C tres puntos que no pertenecen a una misma recta, y r una recta en el plano ABC, que no contiene ninguno de los puntos A, B, C. Entonces, si la recta r pasa por algún punto del segmento AB, también pasará o bien por algún punto del segmento AC] o bien por algún punto del segmento BC.*

***Axiomas de congruencia (o de movimiento)***

*Los axiomas de este grupo definen el concepto de congruencia, y, con éste, el de movimiento.*

*1. Un movimiento transforma rectas en rectas.*

*2. Dos movimientos efectuados sucesivamente equivalen a un solo movimiento*

*3. Sean A y B dos puntos, a y b dos semirrectas que parten de ellos,* α y β *dos semiplenos limitados por las rectas prolongación de a y b ; entonces existe un único movimiento que lleva A sobre B, a sobre b, y* α *sobre* β.

***Axiomas de continuidad***

*1. (Axioma de Arquímedes) Sean* AB *y* CD *segmentos arbitrarios. Entonces sobre la recta* AB *existe un número finito de puntos* $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_n$ *situados de manera que* $A_1$ *está entre* A y $A_2$, $A_2$, *está entre.* $A_1$ *y* $A_3$, *tales que los segmentos* $AA_1$, $A_1 A_2$, $A_2$,$A_3$...$A_{n-1}A_n$ *son congruentes al segmento* CD *y* B *está entre A y* $A_n$.

*2. (Axioma de Cantor o de la plenitud lineal). Supóngase que en una recta arbitraria a se da una sucesión infinita de segmentos* $A_1B_1$ , $A_2$,$B_2$..., *cada uno de los cuales está en el interior del precedente. Supóngase además que, cualquiera que sea un segmento prefijado, existe un índice n para el cual* $A_nB_n$ *es menor que dicho segmento.*

*Entonces existe sobre la recta a un punto X que está en el interior de todos los segmentos:* $A_1B_1$ , $A_2B_2$... *(a la sucesión de segmentos suele llamársela: sucesión de segmentos encajados* *o anidados.)*

***Axiomas de paralelismo***

*1. Por un punto que no está sobre una recta dada sólo se puede trazar una recta que no la corte (Euclides).*

*1'. Por un punto que no está sobre una recta dada pasan al menos dos rectas que no cortan a la primera recta (Lobachevski).*

El resultado frustró a Hilbert, quien tenía confianza en la posibilidad de fijar los fundamentos de las matemáticas mediante un proceso *autoconstructivo* en el que la consistencia pudiera deducirse de una teoría lógica sencilla y evidente.

*Kurt Gödel*

Gödel no creyó que sus conclusiones demostrasen la arbitrariedad del método axiomático-deductivo, sino sólo que la deducción de teoremas no puede mecanizarse del todo, justificando así el papel de la intuición en la investigación formal.

*Bertrand Russell*

Morris Kline resume el desarrollo de la fundamentación de las matemáticas con la siguiente parábola:

> *"A orillas del Rin, un hermoso castillo se había mantenido en pie durante siglos. En los sótanos del castillo las laboriosas arañas que lo habitaban habían construido una tupida red de telarañas. Un día sopló un fuerte viento y destruyó la red. Las arañas se pusieron a trabajar frenéticamente para reparar el*

*daño. Creían que eran sus telarañas las que mantenían en pie el castillo”*

## Cronología

En la época de Lobachevski el calendario utilizado en el imperio ruso era el llamado *calendario juliano* (implantado por Julio César en el año 47 a.C.). a diferencia de la mayoría de los territorios europeos que ya habían adoptado el *calendario gregoriano* (elaborado principalmente según las reglas establecidas por Luigi Lilio (1510-1576) y establecido por bula papal de Gregorio XIII en 1582).

Las fechas que figuran a continuación corresponden al calendario juliano.

| | |
|---|---|
| 1792 | El 20 de noviembre (1 de diciembre en el calendario gregoriano) nace Lobachevski en la ciudad de Nizhni Novgorod (llamada Gorki durante la época soviética). |
| 1800 | Muere su padre. La familia se traslada a la ciudad de Kazán. |
| 1802 | El 5 de noviembre, es admitido en el Gymnasium (instituto) de Kazán, al que asiste hasta 1807 |
| 1807 | El 14 de febrero comienza sus estudios de matemáticas y ciencias naturales en la Universidad de Kazán. |
| 1811 | Aprueba con matrícula de honor el examen de maestría. Recibe, el 3 de agosto, el grado de |

| | |
|---|---|
| | maestro en Ciencias Físicas y Matemáticas Comienza su actividad como docente en la universidad. |
| 1814 | El 26 de marzo es nombrado profesor adjunto. Ese mismo año comienza a da clases de matemáticas puras y aplicadas. |
| 1816 | El 7 de julio alcanza la categoría de profesor extraordinario del departamento de matemáticas y física. |
| 1819 | Comienza a dar cursos de física y astronomía. Además, asume las funciones de director del observatorio. A finales de año, el 14 de diciembre, es nombrado miembro del comité encargado de poner en orden la biblioteca. |
| 1820 | El 19 de noviembre es elegido decano de la Facultad Físico- Matemática (permanecerá en el cargo basta junio de 1821), ocupando el cargo que había dejado vacante su profesor Bartels. |
| 1821 | Realiza un viaje a San Petersburgo para comprar instrumentos de astronomía y física, así como libros de matemáticas. |
| 1822 | Es elegido, el 25 de febrero, profesor titular. Poco después, el 16 de marzo, es nombrado miembro del comité de construcción universitario. |
| 1823 | Es nuevamente elegido decano de la Facultad |

| | |
|---|---|
| | Físico- Matemática. Ocupa dicho cargo desde junio de 1823 hasta agosto de 1825. |
| 1825 | Es elegido bibliotecario de la universidad y presidente del comité de construcción. Además de sus obligaciones, imparte cursos sobre estática y dinámica. |
| 1826 | Recibe el título de bibliotecario, permaneciendo en dicho cargo hasta el 22 de marzo de 1835. El 11 de febrero lee una memoria que contiene los principios de una geometría no euclidiana. Esta fecha es considerada como el nacimiento de la geometría no euclidiana. |
| 1827 | El 30 de julio es elegido rector de la Universidad de Kazán. Desempeña dicho cargo, de forma ininterrumpida, desde el 25 de agosto de 1827 hasta el 14 de agosto de 1846. |
| 1828 | Pronuncia, el 5 de julio, su famoso discurso “Sobre las materias de la educación social". |
| 1829-1839 | Se publican en varias revistas diversas memorias geométricas. Entre ellas está “Acerca de los principios de geometría” (1829-30), primera obra publicada sobre la geometría no euclidiana, “Geometría imaginaria” (1835), “Aplicación de la geometría imaginaria a algunas integrales” (1836) y “Nuevos elementos de geometría con una teoría completa de las |

| | |
|---|---|
| | paralelas" (1835-38). |
| 1832 | El 16 de octubre contrae matrimonio con Varvara A. Moiséeva. |
| 1834 | Publica un libro titulado *El álgebra o el cálculo de los finitos.* |
| 1840 | Publica en alemán el libro *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.* |
| 1842 | A propuesta de Gauss, es nombrado miembro de honor de la Sociedad Científica de Göttingen. |
| 1846 | Se retira de la universidad. El 18 de abril pasa al protectorado de los centros docentes de Kazán. |
| 1855 | Publica "Pangeometria", su última obra. El 12 de noviembre, por razones de salud, es liberado de todas sus responsabilidades académicas. |
| 1856 | El 12 de febrero fallece Lobachevski en la ciudad de Kazán. |

## Bibliografía


- Aleksandrov, A. D; Kolmogorov A. N.; Laurentiev M. A. y otros (1982); *La matemática: su contenido, métodos* y *significado* (Vol. 3). Alianza Universidad, Madrid.
- Bolyai, W. (con apéndice de J. Bolyai) (1832); *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos (Ensayos sobre elementos de matemáticas pura jóvenes estudiosos*).
- Bonola, R. (1923); *Geometrías no euclidianas.* Calpe, Madrid.
- Boyer, C. B.(1986); *Historia de la matemática.* Alianza Universidad, Madrid.
- Cañón, C.(1993); *La matemática, creación y descubrimiento.* Universidad Pontificia de Comillas, Madrid.
- Courant, R.; Robbins, H. (1979); *¿Qué es la matemática?* Aguilar, Madrid.
- Coxeter, H. S. M. (1971); *Fundamentos de geometría.* Limusa-Wiley, México.
- Coxeter, H. S. M. (1978); *Non-Euclidean Geometry.* University of Toronto Press, Toronto.
- Dou, A. (1967); Los paralogismos de Euclides y Saccheri en la teoría de las paralelas (pp. 155-174). Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- Dou, A. (1970), *Fundamentos de la matemática.* Labor, Barcelona.

- Dou, A. (1992); "Orígenes de la geometría no euclídea", *Historia de la matemática en el siglo XIX* (pp. 43-65). Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- Lobachevski. Un espíritu indomable
- De Lorenzo, J. (19871; *El método axiomático y sus creencias.* Tecnos, Madrid.
- De Lorenzo, J. (1977); *La matemática y el problema de su historia.* Tecnos, Madrid.
- Dunham, W. (1993); *Viaje a través de los genios.* Pirámide, Madrid.
- Efimov, N. V. (1989); *Geometría superior.* Mir, Moscú.
- Euclides (1991); *Elementos, Libros I-IV,.* Introducción de Luis Vega. Traducción de María Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos, Madrid.
- Cray, J. J. (1992); Ideas de espacio. Mondadori, Madrid.
- Greemberg, M. J. (1974); *Euclidean and non-euclidean geometries.* Freeman, San Francisco.
- Gangs, D. (1973); *An Introduction to non-euclidean Geometry.* Academic Press.
- Moise, E. E. (1990); *Elementary geometry from an advanced stand- point.* Addison-Wesley.
- Meschkovskl, H. (1964); *Non-euclidean Geometry.* Academic Press.
- Eves, H. (1969); *Estudio de las geometrías.* Tomos I y II .UTEHA, México.

- Smogorzhevski, A. S. (1978); *Acerca de la geometría de Lobachevski.* Mir, Moscú.
- Hilbert, D. (1996); *Fundamentos de la geometría* (corresponde a la traducción española de la obra escrita en 1899). CSIC, Madrid.
- Kagan, V. F. (1984); *Lobachevski.* Mir, Moscú.
- Kant, I. (1988); *Crítica de la razón pura.* Alfaguara, Madrid.
- Kárteszi, F.; Szénássy, B. (1987); *János Bolyai, Appendix the theory of Space,* Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Kline, M. (1992); *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días (Tomos I y III).* Alianza Editorial, Madrid.
- Kline, M. (1985); *Las matemáticas. La pérdida de la certidumbre.* Siglo XXI de España Editores, Madrid.
- Lakatos, I. (1981); *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Alianza Universidad, Madrid.
- Legendre, A. M. (1833); "Réflexions sur differéntes manieres de démontrer la théorie des paralléles ou le théoréme sur la somme des trois angles du triangle", *Mém. Ac. Se. París, T. XIII.*
- Levi, B. (2000); *Leyendo a Euclides.* Libros del Zorzal, Buenos Aires.
- Lobachevski, N. I. (1835-38); "Geometría imaginaria". *Obras geométricas, Vol. I* (pp. 71-120). Publicaciones científicas de la Universidad de Kazán (en ruso).
- Lobachevski, N. I. (1835-38); "Nuevos principios de la geometría, con una teoría completa de las paralelas". *Obras*

*geométricas, Vol. I* (pp. 219-486). Publicaciones científicas de la Universidad de Kazán (en ruso).

- Lobachevski, N. I. (1840); *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.* Berlín (en alemán).
- Lobachevski, N. I. (1855); "Pangeometría, donde se precisa la geometría fundada sobre la teoría general y rigurosa de las paralelas". *Colección de Memorias de Profesores de la Universidad de Kazán en el cincuenta aniversario de su fundación, Vol I*, (pp. 279-340).
- Lobachevski, N. I. (1835-38); "Aplicaciones de la geometría imaginaria a algunas integrales". *Obras geométricas, Vol. I* (pp. 121-218). Publicaciones científicas de la Universidad de Kazán (en ruso).
- Lobachevski, N. I. "Sobre los principios de la geometría", *Boletín de Kazán* (1829-1830). Trabajos geométricos de Lobachevski (primera parte obras publicadas en ruso, segunda parte, obras publicadas en francés y alemán). Kazán (1883-1886), Vol. I (pp. 1-67).
- Mankiewicz, R. (2000); *Historia de las matemáticas.* Paidós, Barcelona.
- Montesinos, J. M. (1992); "Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevski y Bolyai", *Historia de la matemática en el siglo XIX* (pp. 65-105). Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- Poincaré, H. (1963); *Ciencia y método.* Espasa-Calpe, Madrid.
- Pont, J. C. (1986); *L'aventure des paralléles.* Lang, Berna.

- Ribnikov, K. (1974); *Historia de las matemáticas*. Mir, Moscú.
- Rosenfeld, B. A. (1988); *A History of non-euclidean Geometry.* Springer-Verlag. Nueva York.
- Wussing, H.; Arnold, W. (1989); *Biografías de grandes matemáticos*. Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza.
- Taton, R. (1971); *Historia general de las ciencias.* Destino, Barcelona.
- Toth, 1. (1977); “La révolution non euclidienne". *La Recherche, 8* (pp. 143-152).

# El autor

Santiago Fernández Fernández es profesor de matemáticas desde 1976 y ha impartido numerosos cursos y seminarios sobre didáctica e historia de las matemáticas. Actualmente es asesor de matemáticas del Berritzegune de Bilbao y responsable de la revista de matemáticas SIGMA, editada con el apoyo del Departamento de Educación del Gobierno Vasco. El interés por el estudio de la historia de las matemáticas y la geometría le han llevado a profundizar en el nacimiento de las geometrías no euclidianas.